ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 122 1962

РАДИАЛЬНО-ФАЗОВОЕ ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В СИНХРОТРОНЕ

А. Н. ДИДЕНКО, А. С. ЧУМАКОВ

Для исследования движения электронов в синхротроне обычно записывают уравнения движения в зависящем от времени аксиально-симметричном поле и далее рассматривают отдельно три вида движения [1, 2]:

1. Движение электрона по равновесной орбите.
2. Медленные радиально-фазовые колебания около равновесной орбиты. В процессе фазовых колебаний электроны двигаются по почти замкнутым мгновенным орбитам.
3. Быстрые свободные колебания около мгновенной орбиты.

Однако радиально-фазовое движение можно описать, исходя из более общих соображений закона сохранения энергии и понятия фазы электрона относительно бегущей волны.

В данном случае уравнения движения имеют вид:

$$\frac{dE}{d\Theta} = \frac{eV_0}{2\pi} \cos\varphi, \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{\omega r}{\beta c} - 1\right), \tag{2}$$

$$\frac{dE}{dr} = (1-n)\,\frac{E}{r}\,. \tag{3}$$

Величины, входящие в (1—3), связаны между собой следующими соотношениями:

$$\varphi = \omega t - \Theta; \quad \dot{\Theta} = \frac{\beta c}{r}\,. \tag{4}$$

В этих выражениях приняты обозначения:

E — энергия электрона,
Θ — азимут положения электрона,
φ — фаза электрона относительно бегущей волны,
V_0 — амплитуда напряжения на резонаторе,
r — мгновенный радиус электрона,
βc — скорость электрона,
n — показатель спадания магнитного поля.

Интегрируя (3) и совместно уравнения (1) и (2), получим

$$E = E_{вх} \left(\frac{r}{r_{вх}} \right)^{1-n}, \tag{5}$$

$$\frac{eV_0}{2\pi} \sin \varphi = E_{вх} \left(\frac{r}{r_{вх}} \right)^{1-n} \left[\frac{\omega r}{\beta c} \frac{(1-n)}{(2-n)} - 1 \right] + C, \tag{6}$$

где

$$C = \frac{eV_0}{2\pi} \sin \varphi_{вх} - E_{вх} \left[\frac{\omega r_{вх}}{\beta c} \frac{(1-n)}{(2-n)} - 1 \right].$$

С помощью (5) и (6) уравнение (1) можно записать в виде

$$d\Theta = \frac{dr}{\left\{ \left(\frac{eV_0}{2\pi} \right)^2 r^{2n} \frac{r_{вх}^{2(1-n)}}{(1-n)^2 E_{вх}^2} - \left[\frac{\omega r^2}{(1-n)(2-n)\beta c} - \frac{r}{(1-n)} + \frac{C r^n r_{вх}^{1-n}}{(1-n) E_{вх}} \right]^2 \right\}^{1/2}}. \tag{7}$$

Уравнение (7) в общем случае не интегрируется. Однако его можно проинтегрировать с большой степенью точности, если представить $r = r_0 + \rho$, и разложить r^n и r^{2n} в биномиальный ряд по малому отклонению от равновесного радиуса ρ.

Ограничиваясь четвертой степенью отклонения ρ, уравнение (7) после интегрирования можно представить в виде эллиптического интеграла

$$\int_0^{\Theta} d\Theta = \int_{\rho_{вх}}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{a\rho^4 + b\rho^3 + c\rho^2 + d\rho + e}}. \tag{8}$$

В этом интеграле коэффициенты a, b, c, d, e определяются начальными условиями электрона $r_{вх}$, $E_{вх}$, $\varphi_{вх}$ и параметрами ускорителя n, ω, r_0, V_0 и имеют вид:

$$a = \left[\left(\frac{eV_0}{2\pi} \right)^2 - C^2 \right] \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{4!(1-n)^2 E_{вх}^2} r_0^{2n-4} r_{вх}^{2(1-n)} -$$

$$- \left[\frac{2\omega C}{(1-n)(2-n)\beta c} \cdot \frac{r_{вх}^{(1-n)}}{E_{вх}} \right] \frac{(2+n)(1+n)n(n-1)}{4!} r_0^{n-2} +$$

$$\left[\frac{2 C r_{вх}^{1-n}}{(1-n)^2 E_{вх}} \right] \frac{(1+n)n(n-1)(n-2)}{4!} r_0^{n-3} - \left[\frac{\omega^2}{(2-n)^2 (\beta c)^2} \right];$$

$$b = \left[\left(\frac{eV_0}{2\pi} \right)^2 - C^2 \right] \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!(1-n)^2 E_{вх}^2} r_0^{2n-3} r_{вх}^{2(1-n)} -$$

$$- \left[\frac{2\omega C}{(1-n)(2-n)\beta c} \frac{r_{вх}^{1-n}}{E_{вх}} \right] \frac{(2+n)(1+n)n}{3!} r_0^{n-1} +$$

$$
+\left[\frac{2C}{(1-n)^2}\frac{r_{\text{вх}}^{1-n}}{E_{\text{вх}}}\right]\frac{(1+n)\,n\,(n-1)}{3!}\,r_0^{n-2}-\left[\frac{4\,\omega^2}{(2-n)^2(\beta c)^2}\right]r_0+
$$

$$
+\left[\frac{2\,\omega}{(1-n)(2-n)\,\beta c}\right];
$$

$$
c=\left[\left(\frac{eV_0}{2\pi}\right)^2-C^2\right]\frac{2n\,(2n-1)}{2!\,(1-n)^2\,E_{\text{вх}}^2}\,r_0^{2n-2}\,r_{\text{вх}}^{2(1-n)}+
$$

$$
+\left[\frac{2\,\omega\,C}{(1-n)(2-n)\,\beta c}\frac{r_{\text{вх}}^{1-n}}{E_{\text{вх}}}\right]\frac{(2+n)(1+n)}{2!}\,r_0^n+
$$

$$
+\left[\frac{2C}{(1-n)^2}\frac{r_{\text{вх}}^{1-n}}{E_{\text{вх}}}\right]\frac{(1+n)\,n}{2!}\,r_0^{n-1}-\left[\frac{6\,\omega^2}{(2-n)^2\,(\beta c)^2}\right]r_0^2+
$$

$$
+\left[\frac{6\,\omega}{(1-n)(2-n)\beta c}\right]r_0-\frac{1}{(1-n)^2};
$$

$$
d=\left[\left(\frac{eV_0}{2\pi}\right)^2-C^2\right]\frac{2n\,r_0^{2n-1}}{(1-n)^2\,E_{\text{вх}}^2}\,r_{\text{вх}}^{2(1-n)}+
$$

$$
+\left[\frac{2\,\omega\,C}{(1-n)(2-n)\beta\,c}\frac{r_{\text{вх}}^{1-n}}{E_{\text{вх}}}\right](2+n)\,r_0^{1+n}+\left[\frac{2C}{(1-n)^2}\frac{r_{\text{вх}}^{1-n}}{E_{\text{вх}}}\right](1+n)\,r_0^n-
$$

$$
-\left[\frac{4\,\omega^2}{(2-n)^2(\beta c)^2}\right]r_0^2+\left[\frac{6\,\omega}{(1-n)(2-n)\,\beta c}\right]r_0^2-\frac{2\,r_0}{(1-n)^2};
$$

$$
e=\left[\left(\frac{eV_0}{2\pi}\right)^2-C^2\right]\frac{r_0^2\,r_{\text{вх}}^{2(1-n)}}{(1-n)^2E_{\text{вх}}^2}-\left[\frac{2\,\omega\,C}{(1-n)(2-n)\beta c}\frac{r_{\text{вх}}^{1-n}}{E_{\text{вх}}}\right]r_0^{2+n}+
$$

$$
+\left[\frac{2C}{(1-n)^2}\frac{r_{\text{вх}}^{1-n}}{E_{\text{вх}}}\right]r_0^{1+n}+\left[\frac{\omega^2}{(2-n^2)\,(\beta c)^2}\right]r_0^4+
$$

$$
+\left[\frac{2\,\omega}{(1-n)\,(2-n)\,\beta c}\right]r_0^3-\frac{r_0^2}{(1-n)^2}.
$$

Интеграл (8) можно переписать так:

$$
\Theta+\Theta_{\text{вх}}=\int\limits_0^{\rho}\frac{d\rho}{\sqrt{R(\rho)}},\tag{9}
$$

где

$$
\Theta_{\text{вх}}=\int\limits_0^{\rho_{\text{вх}}}\frac{d\rho}{\sqrt{R(\rho)}};\quad R(\rho)=a\rho^4+b\rho^3+c\rho^2+d\rho+e.\tag{10}
$$

Физически $\Theta_{\text{вх}}$ означает угол, который должен пройти электрон с начальным отклонением $\rho_{\text{вх}}$, чтобы он попал на равновесный радиус.

Обращение эллиптического интеграла (9) дает выражение для ρ как функции от Θ для электрона с заданными начальными условиями [3]:

$$\rho = -\frac{b}{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}} \frac{\wp'\left(\Theta+\Theta_{вх}-\frac{\nu}{2}\right) + \wp'\left(\Theta+\Theta_{вх}-\frac{\nu}{2}\right)}{\wp\left(\Theta+\Theta_{вх}+\frac{\nu}{2}\right) - \wp\left(\Theta+\Theta_{вх}-\frac{\nu}{2}\right)}. \tag{11}$$

Функция Вейерштрасса $\wp$ и ее производная $\wp'$, входящие в (11), имеют инварианты g_2 и g_3, которые определяются следующим образом:

$$g_2 = ae - 4\,bd + 3\,c^2,$$

$$g_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Параметры ν и $\Theta_{вх}$ находятся из решения уравнений [4]:

$$\wp(\nu) = \frac{b^2 - ac}{a},$$

$$\wp(\Theta_{вх}) = \frac{\wp'\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\rho_{вх} + \frac{b}{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\wp''\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{\nu}{2}\right)}} + \wp\left(\frac{\nu}{2}\right). \tag{13}$$

Прежде, чем перейти к анализу выражения (11), заметим, что в теории эллиптических функций вместо многочлена четвертой степени $R(\rho)$ часто фигурирует многочлен третьей степени в канонической форме

$$F(z) = 4\,z^3 - g_2\,z - g_3.$$

Для перехода от $R(\rho)$ к канонической форме необходимо подвергнуть переменную ρ дробно-линейному преобразованию

$$\rho = \alpha + \frac{R'(\alpha)}{4\left\{z - \frac{1}{24} R''(\alpha)\right\}},$$

где $\alpha = -\frac{b}{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\wp''\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\wp'\left(\frac{\nu}{2}\right)}$ — один из корней многочлена $R(\rho)$.

Многочлен $F(z)$ имеет корни в порядке убывания e_1, e_2 e_3 и его дискриминант равен

$$\Delta = g_2^3 - 27\,g_3^2.$$

Возвращаясь к (11), мы видим, во-первых, что ρ является периодической функцией Θ и, во-вторых, что устойчивое колебательное движение электронов возможно только при $\Delta > 0$.

Период колебаний радиуса равен

$$2\,\omega_1 = \frac{2K}{\sqrt{e_1 - e_3}}\,, \tag{14}$$

где K—полный эллиптический интеграл первого рода, вычисленный при модуле

$$k = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_2}}\,.$$

Подставляя (11) в (2), последнее уравнение можно проинтегрировать с помощью теоремы сложения для функции ζ [3]:

$$\varphi - \varphi_{вх} = \left[\frac{\omega r_0}{\beta c} - 1\right]\Theta - \frac{\omega}{\beta c}\cdot\frac{b}{a}\,\Theta +$$

$$+ \frac{\omega}{\beta c\sqrt{a}} \ln \frac{\sigma\left(\Theta + \Theta_{вх} - \frac{\nu}{2}\right)}{\sigma\left(\Theta + \Theta_{вх} + \frac{\nu}{2}\right)} + \tag{15}$$

$$+ \frac{\omega}{\beta c}\,\frac{\Theta + \Theta_{вх}}{\sqrt{a}}\,\zeta(\nu).$$

В выражении (15) σ и ζ сигма- и дзета-функции Вейерштрасса.

Полученное выражение (15) позволяет определить фазу любого электрона относительно бегущей волны на любом азимуте. Как и радиус, фаза электрона является периодической функцией с периодом

$$2\omega_1 = \frac{2K}{\sqrt{e_1 - e_3}}\,.$$

Выражение (15) может быть использовано при рассмотрении вопроса о группировании электронов в синхротроне.

ЛИТЕРАРТУРА

1. Frank N. H. Phys. Rev., 70., 177, 1946.
2. М. С. Рабинович. Труды ФИАН. Том X, 1958.
3. Н. И. Ахиезер. Элементы теории эллиптических функций, Гостехиздат, 1948.
4. С. В. Ковалевская. Научная работа, Изд-во АН СССР, 1948.