ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 122 1962

К ВОПРОСУ О ГРУППИРОВАНИИ ЭЛЕКТРОНОВ В СИНХРОТРОНЕ

А. С. ЧУМАКОВ

Вопрос о группировании электронов в синхротроне в известном смысле аналогичен тому, который встречается в теории электронных приборов СВЧ. Общим для этих двух типов электронных приборов является процесс создания колебаний энергии электронов и как следствие этого—изменение функции распределения электронов по фазам в. ч. напряжения. Группирование электронов в синхротроне тесно связано с радиально-фазовыми и бетатронными колебаниями. Однако действие указанных видов колебаний на функцию распределения не одинаково. Бетатронные колебания не связаны с изменением энергии частиц и изменение фазы, вызванное ими, в обычных ускорителях очень мало. Поэтому при исследовании группирования можно ограничиться рассмотрением только радиально-фазовых колебаний.

Для анализа процесса группирования электронов в синхротроне целесообразно использовать методы, развитые в теории клистрона ЛБВ и т. д. В частности, для решения поставленной задачи необходимо решить уравнения движения электронов и, воспользовавшись законом сохранения заряда, по известному начальному распределению найти функцию распределения электронов в любой момент времени. В настоящей работе этот вопрос рассматривается в кинематическом приближении, т. е. пренебрегается действием отталкивающих сил между электронами.

В работе [1] получена формула для фазы любого электрона в любой момент времени, выраженная через эллиптические функции Якоби. Однако для наших целей удобнее выразить фазу электрона через эллиптические функции Вейерштрасса. Для этого необходимо в выражении для фазовой скорости [2]

$$\dot{\varphi}=\omega_0\sqrt{\frac{eV_0KFq}{\pi E}\left[\left(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi_0\right)-\left(\sin\varphi_{вх}-\varphi_{вх}\cos\varphi_0\right)\right]}$$

$\sin\varphi$ разложить в ряд Тейлора по отклонению от равновесной фазы $\alpha=\varphi-\varphi_0$ и ограничиться пятью членами разложения. Тогда второй интеграл фазового уравнения сводится к эллиптическому

$$\int\limits_0^t\sqrt{\frac{eV_0KFq\sin\varphi_0}{24\pi E}}\cdot\omega_0 dt=\int\limits_{\alpha_{вх}}^{\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{P(\alpha)-P(\alpha_{вх})}},$$

где

$$P(\alpha)=\alpha^4-4\alpha^3\mathrm{ctg}\varphi_0-12\alpha^2+24(1-\varphi_0\mathrm{ctg}\varphi_0),$$

$$P(\alpha_{вх})=\alpha_{вх}^4-4\alpha_{вх}^3\,\mathrm{ctg}\varphi_0-12\alpha_{вх}^2+24(1-\varphi_0\mathrm{ctg}\varphi_0).$$

С помощью дробно-линейного преобразования [3]

$$\alpha=\alpha_{вх}+\frac{P'(\alpha_{вх})}{4\left\{\beta-\frac{1}{24}P''(\alpha_{вх})\right\}}$$

($P'(\alpha_{вх})$, $P''(\alpha_{вх})$—производные от $P(\alpha)$ при $\alpha=\alpha_{вх}$) последний интеграл сводится к канонической форме Вейерштрасса

$$\int_0^t\sqrt{\frac{eV_0KF\sin\varphi_0 q}{24\pi E}}\cdot\omega_0 dt=\int_\beta^\infty\frac{d\beta}{\sqrt{4\beta^3-g_2\beta-g_3}}; \tag{1}$$

Обращение эллиптического интеграла (1)

$$\beta=\gamma(u);\quad u=\sqrt{\frac{eV_0KFq\sin\varphi_0}{24\pi E}}\cdot\omega_0 t$$

позволяет нам записать фазу электрона в виде

$$\alpha=\alpha_{вх}+\frac{P'(\alpha_{вх})}{4\left\{\gamma(u)-\frac{1}{24}P''(\alpha_{вх})\right\}}, \tag{2}$$

где $\gamma(u)$—функция Вейерштрасса, инварианты которой равны

$$g_2=12-P(\alpha_{вх});$$

$$g_3=P(\alpha_{вх})\cdot(2+\mathrm{ctg}^2\varphi_0)+8.$$

Период функции $\gamma(u)$ и период фазовых колебаний T соответственно равны

$$2\omega_1=\frac{2K}{\sqrt{l_1-l_3}};\qquad T=\frac{2\omega_1}{\sqrt{\frac{eV_0KFq\sin\varphi_0}{24\pi E}}\cdot\omega_0},$$

где K—полный эллиптический интеграл первого рода, вычисленный при модуле

$$k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}.$$

В этих выражениях e_1, e_2, e_3—корни уравнения $4\beta^3-g_2\beta-g_3$, расположенные в порядке убывания. На рис. 1 изображены графики зависимости фазы электрона от входной фазы в разные моменты времени для случая

$$\varphi_0=60^\circ\quad\text{и}\quad\sqrt{\frac{eV_0KFq\sin\varphi_0}{24\pi E}}\cdot\omega_0=10^7.$$

Из графиков видно, что в общем случае $\alpha_{вх}$ является многозначной функцией α.

Считая входной ток постоянным $i_{вх}$, на основании принципа сохранения заряда можно записать, что в интервале фаз $\Delta\alpha$ электроны переносят заряд

$$i_{вх} \cdot \sum_{\alpha_{вх}(\alpha)} \Delta\alpha_{вх} = i_{вх} \cdot \Delta\alpha \cdot \sum_{\alpha_{вх}(\alpha)} \left| \frac{d\alpha_{вх}}{d\alpha} \right|,$$

где суммирование производится по всем интервалам фаз, соответствующим одной и той же фиксированной фазе α. Так как общий заряд $i\Delta\alpha$, то для мгновенного значения тока i в любой момент времени можно записать выражение [4]

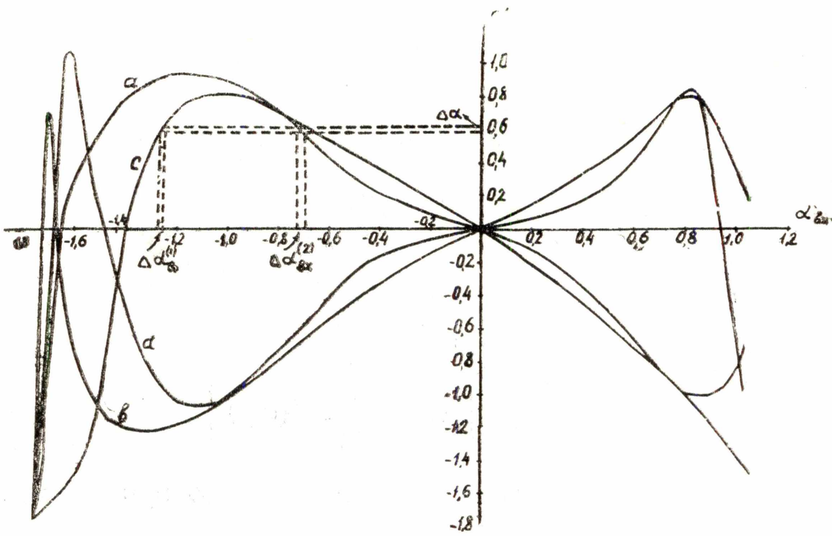

Рис. 1. Зависимость фазы электрона от входной фазы в различные моменты времени. Кривая *a* для $t=1\cdot10^{-7}$ *сек*; *в*— для $t=2\cdot10^{-7}$ *сек*; *c*—для $t=3\cdot10^{-7}$ *сек*; *d*—для $t=4\cdot10^{-7}$ *сек*.

$$i = i_{вх} \cdot \sum_{\alpha_{вх}(\alpha)} \left| \frac{d\alpha_{вх}}{d\alpha} \right|. \tag{3}$$

Уравнение (3) говорит о том, что в любой момент времени t ток i выражается через входной ток $i_{вх}$ и сумму абсолютных значений производных $\frac{d\alpha_{вх}}{d\alpha}$, соответствующих заданному значению α. Производные $\frac{d\alpha_{вх}}{d\alpha}$ можно определить графически с помощью рис. 1.

Предположим, что электроны инжектируются в синхротрон одиночным прямоугольным импульсом длительностью, соответствующей области захвата в ускорение. Тогда с помощью уравнения (3), суммируя производные $\frac{d\alpha_{вх}}{d\alpha}$, соответствующие заданному α, можно рассчитать зависимость мгновенных значений тока от фазы в. ч. напряжения в различные моменты времени. Такие графики для вышеуказанного случая приведены на рис. 2.

Анализируя полученные результаты, следует отметить, что вследствие нелинейности периода фазовых колебаний, картина распределения электронов по фазам в. ч. напряжения является нестационарной. Бесконечные пики на импульсах тока соответствуют фазам, где $\frac{d\alpha}{d\alpha_{вх}} = 0$.

Равенство $\frac{d\alpha}{d\alpha_{вх}} = 0$ означает, что электроны, вылетевшие в интервале фаз $d\alpha_{вх}$, в какой-то момент времени попадают в интервал фаз $d\alpha$, являющийся бесконечно малым, более высокого порядка, а

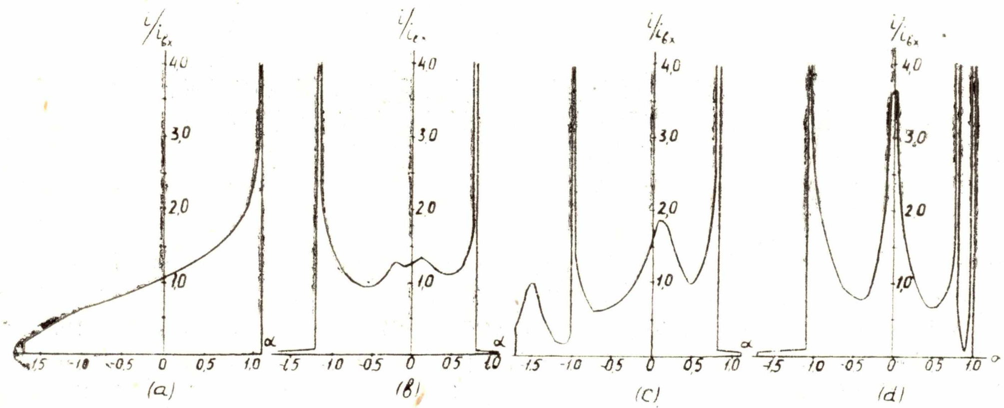

Рис. 2. Форма тока в различные моменты времени.

поэтому и получаются бесконечно большие мгновенные значения тока, переносящего заряд конечной величины. Наличие бесконечных пиков на импульсах тока объясняется тем, что мы не учитывали сил отталкивания между электронами. На самом деле, вследствие кулоновского взаимодействия, плотность заряда везде сохраняет конечное значение. Однако бесконечные пики тока начинают играть важную роль при рассмотрении высших гармонических. Вклад же этих пиков в основную гармонику тока, которая представляет наибольший интерес, является незначительным. Поэтому в вопросах определения основной гармоники тока может быть использована кинематическая теория группирования электронов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Чумаков. Изв. вузов, Физика, в печати.
2. М. С. Рабинович. Труды ФИАН, X, 1958.
3. Н. И. Ахиезер. Элементы теории эллиптических функций, Гостехиздат, 1948.
4. Клистроны, под ред. Е. Д. Науменко, изд-во Сов. радио, 1952.