ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 283 1974

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КОРНЕЙ ФУНКЦИЙ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена кафедрой высшей математики)

1. Пусть аналитическая функция $f(x)$ представляется степенным рядом

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,\ c_0=1,\ c_k>0,\ |x|<\infty,$$

и уравнение $f(-x)=0$ имеет вещественные положительные корни $0<\alpha_1<\alpha_2<\ldots$.

Для частного функций $f^1(x):f(x)$ имеет место теорема.

Теорема. Цепная дробь относительно частного функций

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{a_1}{1}+\frac{a_2 x}{1}+\cdots+\frac{a_n x}{1}+\cdots \tag{1}$$

имеет положительные коэффициенты звеньев $a_n>0$.

Доказательство. Методом математической индукции нетрудно доказать, что коэффициенты s_i $(i=1, 2,\ldots)$ в равенстве

$$f'(x):f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} s_k(-x)^k$$

являются степенными суммами ([1], стр. 245) относительно обратных значений $1:\alpha_k$ корней α_k функций

$$f(-x)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{\alpha_k}\right),\ s_i=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_m^i}(i=1,2,\ldots).$$

Последовательность $s_1, s_2,\ldots$ линейно независима, поэтому определители

$$\Delta_k=\begin{vmatrix} s_1\cdots s_k \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ s_k\cdots s_{2k-1}\end{vmatrix}\neq 0,\ \delta_k=\begin{vmatrix} s_2\cdots s_{k+1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ s_{k+1}\cdots s_{2k}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Определители Δ_k, $\delta_k>0$, потому что для любой конечной суммы $\sum_{k=0}^{2n} c_k x^k$ квадратичная форма $\sum_{i,k=1}^{n} s_{i+k-2}\, x_i x_k$ $(s_0=2n)$ положительно определенная ([2], задачи 949, 943). Так как определители Δ_k, $\delta_k > 0$, то и коэффициенты $a_n > 0$ ([3], стр. 23), что и требовалось доказать.

2. Минимальные вещественные корни функции $f(x)$ приближенно равны корням многочлена $q_{2n+1}(x)$ $(n=1, 2,...)$, который является знаменателем подходящей дроби из равенства (1). Таким образом, минимальные корни функции Бесселя $I_\nu(x)$ приближенно равны минимальным корням следующего многочлена

$$q_{2n+1}(x)=\sum_{m=0}^{n}\frac{C_{2n+1=m}^{m}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^m}{(\nu+1)_m(\nu+2n+2-m)_m}. \tag{2}$$

Например, для двух первых корней имеем

$$\alpha_{1,2}=\sqrt{\frac{8}{3}M\pm\frac{4}{3}\sqrt{M(\nu^2+6\nu+17)}}+\Delta\,(M=\nu^2+6\nu+8)$$

и относительная погрешность $\delta_1<0{,}0001$ $(\nu=0)$,

$$\delta_2=\left|\frac{\Delta_2}{\alpha_2}\right|<0{,}082\,(\nu=0),\ \delta_1<0{,}0081\ (\nu=5).$$

3. Теорема. Для произведения двух функций Бесселя имеем равенство

$$\frac{I_\nu(x)\cdot I_\nu(x)}{[\Gamma(\nu+1)]^{-1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{4k+2\nu}}{k!\,(1+\nu)_k(1+\nu)_{2k}}. \tag{3}$$

Доказательство. Для коэффициента $(-1)^k c_k$ $(\kappa=1, 2,...)$ получим ([4], стр. 191, [4])

$$(-1)^k c_k=\frac{(-1)^k}{k!\,k!\,(1+\nu)_k(1+\nu)_k}\times$$

$$\times\lim{}_4F_3\begin{bmatrix} a,1+\frac{a}{2},-k,-\nu-k;-1\\ \frac{a}{2},1+a+k,1+a+\nu+k\end{bmatrix}=\frac{(-1)^k}{k!(1+\nu)_k(1+\nu)_{2k}},$$

что и требовалось доказать.

Частным случаем равенства (3) являются следующие равенства:

$$\operatorname{sh}x\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{4k+2}}{k!\left(\frac{1}{2}\right)_{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)_{2k+1}};\ \frac{\operatorname{ch}x}{\sec x}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{4k}}{k!\left(\frac{1}{2}\right)_k\left(\frac{1}{2}\right)_{2k}}. \tag{4}$$

4. Ряд (3) с аргументом $-x^4$ умножаем на этот же ряд с аргументом x^4. Таким путем получим знакопеременный ряд относительно аргумента $-x^8$

$$f(-x^8)=1-c_1x^8+c_2x^{16}-c_3x^{24}+\cdots \tag{5}$$

Минимальные положительные корни функции Бесселя $I_\nu(x)$ приближенно равны минимальным вещественным корням функции $f(-x^8)$. В силу равенства (5) первые два корня функции Бесселя α_1 и α_2 равны

$$\alpha_{1,2}=2\sqrt{\frac{2(\nu+2)^2(\nu+3)_2[M\mp\sqrt{M^2-N(\nu+1)^4(\nu+5)_4}]}{}}+\Delta, \qquad (6)$$

где

$$M=(5\nu+11)(\nu+5)_4;\ N=50\nu^2+462\nu+1084.$$

Причем остаточный член Δ по модулю следующий:

$$|\Delta|<\frac{c_3}{x^{-24}}=\frac{5(25\nu^4+628\nu^3+5873\nu^2+24098\nu+36384)x^2{}_4}{2^{24}\cdot 6(\nu+1)_3(\nu+1)_4(\nu+1)_6(\nu+1)_{12}}. \qquad (7)$$

Для α_1, α_2 функции $I_\nu(x)$ имеем относительную погрешность

$$\delta_1<2{,}12\cdot 10^{-8}(\nu=0),\ \delta_2<0{,}004\ (\nu=0),\ \delta_1<9{,}71\cdot 10^{-5}(\nu=5)$$

(δ_2 получена путем непосредственного вычисления корня и сравнения его с табличным).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Мишина и И. В. Проскуряков. Высшая алгебра. М., Физматгиз, 1962.

2. Д. К. Фаддеев и И. С. Соминский. Сборник задач по высшей алгебре. М., Гостехиздат, 1956.

3. Т. И. Стилтьес. Исследования о непрерывных дробях. М., ОНТИ, 1936.

4. Г. Бейтмен и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. М., Физматгиз, 1965.