

ПРИБЛИЖЕНИЕ МНОЖЕСТВА ТОЧЕЧНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ ЭЛЛИПСОМ

О.Н. Вылегжанин, С.А. Рыбалка

Томский политехнический университет

E-mail: onv@am.tpu.ru

Обсуждаются вопросы получения оценок координат центра, длин полуосей эллипса и их ориентации относительно системы координат на основании результатов измерения координат точек, расположенных на его поверхности. Показано, что процедура получения оценок может быть сведена к последовательности задач линейного оценивания и определения собственных векторов и собственных значений симметричной вещественной матрицы.

В различных приложениях (см. например [1, 2]) возникает необходимость вычисления параметров эллипса (длин полуосей и их ориентации относительно выбранной системы координат) по результатам определения координат точек, находящихся на поверхности эллипса. Эту задачу можно также рассматривать как процедуру приближения множества наблюдаемых точек эллипсом. В настоящей работе предложен метод решения указанной задачи.

Каноническое уравнение эллипса размерности n , центр которого совпадает с точкой $\mathbf{x}_0$, имеет вид [3]:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{W} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 1. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{x}$ – вектор координат точки эллипса, а $\mathbf{W}$ – матрица вида:

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{V}, \quad (2)$$

где $\mathbf{V}$ – унитарная матрица поворота (матрица направляющих косинусов), а $\mathbf{A}$ – диагональная матрица:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_n^2} \end{pmatrix},$$

где a_i – длина соответствующей полуоси эллипса, где $i=1,2,\dots,n$. Таким образом, выражение (2) соответствует разложению матрицы $\mathbf{W}$ по собственным числам и собственным векторам.

Разлагая (1) в сумму квадратичных форм, получим:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{W} \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{W} \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0^T \mathbf{W} \mathbf{x}_0 = 1, \quad (3)$$

или

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} x_i x_j - 2 \sum_{i=1}^n x_i b_i + C = 1, \quad (4)$$

т. е. уравнение, линейное относительно $k=n(n+1)/2+n+1$ неизвестных (в силу симметричности $\mathbf{W}$), из которых первые $n(n+1)/2$ суть элементы w_{ij} матрицы $\mathbf{W}$, следующие n неизвестных $b_i = \sum_{j=1}^n w_{ij} x_{0j}$, а $C = \mathbf{x}_0^T \mathbf{W} \mathbf{x}_0$.

Приведем выражение (4) к виду:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} x_i x_j - 2 \sum_{i=1}^n x_i b_i = 1 - C. \quad (5)$$

Если имеются координаты m ($m \geq k$) точек, принадлежащих поверхности эллипса, то, составив для каждой из них уравнение вида (5), получим систему уравнений. Решая эту систему с единичным вектором в правой части, что равносильно умножению обеих частей системы на $1/(1-C)$, получим оценки коэффициентов $\hat{w}_{ij} = w_{ij}/(1-C)$ и $\hat{b}_i = b_i/(1-C)$, из которых сформируем матрицу $\hat{\mathbf{W}} = \mathbf{W}/(1-C)$ и $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b}/(1-C)$ вектор соответственно. Из определения b_i следует, что $\mathbf{b} = \mathbf{W} \mathbf{x}_0$, поэтому, оценка $\mathbf{x}_0$ может быть получена в виде:

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \hat{\mathbf{W}}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{b}}.$$

При разложении матрицы $\hat{\mathbf{W}}$ на собственные векторы и собственные числа получим матрицу поворота $\mathbf{V}$ и диагональную матрицу $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/(1-C)$. Вычислим сумму квадратичных форм (3), подставив вместо матрицы $\mathbf{W}$ полученную при решении системы (5) матрицу $\hat{\mathbf{W}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \hat{\mathbf{W}} \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \hat{\mathbf{W}} \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0^T \hat{\mathbf{W}} \mathbf{x}_0 &= \\ &= (\mathbf{x}^T \mathbf{W} \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{W} \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0^T \mathbf{W} \mathbf{x}_0)/(1-C), \end{aligned}$$

а, учитывая (3), получим:

$$\mathbf{x}^T \hat{\mathbf{W}} \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \hat{\mathbf{W}} \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0^T \hat{\mathbf{W}} \mathbf{x}_0 = 1/(1-C). \quad (6)$$

Вышеприведенные рассуждения обосновывают следующий алгоритм определения параметров эллипса по координатам набора точек, принадлежащих его поверхности:

- измерить координаты m точек, расположенных на поверхности эллипса;
- составить из них систему уравнений вида (5);
- решить полученную систему линейных уравнений с единичным вектором в качестве правой части;
- составить из первых $n(n+1)/2$ элементов вектора решения системы матрицу $\hat{\mathbf{W}}$, а из следующих n элементов – вектор $\hat{\mathbf{b}}$;
- получить оценку вектора координат центра эллипса в виде $\hat{\mathbf{x}}_0 = \hat{\mathbf{W}}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{b}}$;
- вычислить матрицу собственных векторов и вектор собственных значений матрицы $\hat{\mathbf{W}}$;

- получить оценку матрицы поворота эллипса относительно выбранной системы координат как транспонированную матрицу собственных векторов матрицы $\dot{W}$;
- вычислить сумму квадратичных форм $x^T \dot{W} x - 2x^T \dot{W} x_0 + x_0^T \dot{W} x_0$, и, деля эту сумму на элементы вектора собственных значений матрицы $\dot{W}$, определить длины полуосей эллипса, как корни квадратные из полученных величин.

Для демонстрации работы алгоритма задали трехмерный эллипс с полуосями, равными 235, 181 и 27. Были вычислены координаты 20 точек, случайным образом расположенных на поверхности эллипса. К этим координатам был добавлен вектор координат центра эллипса $x_0 = (10, -5, 7)$. Затем эти координаты были преобразованы с использованием матрицы поворота вида:

$$T = \begin{pmatrix} 0,766 & 0,643 & 0 \\ -0,583 & 0,694 & 0,423 \\ -0,272 & 0,324 & 0,906 \end{pmatrix},$$

что соответствует сумме поворота системы координат на 25° в плоскости YZ и на 40° в плоскости XY. Исходные и преобразованные координаты точек представлены в табл. 1.

Из преобразованных координат была составлена система линейных уравнений вида (5), матрица которой приведена в табл. 2.

Полученная в результате решения системы методом наименьших квадратов матрица $\dot{W}$ равна:

$$\dot{W} = 10^{-4} \cdot \begin{pmatrix} 1,235 & -1,254 & -3,337 \\ -1,254 & 1,677 & 3,977 \\ -3,337 & 3,977 & 1,144 \end{pmatrix}.$$

Матрица собственных векторов и вектор собственных значений матрицы $\dot{W}$ равны соответственно:

$$V = \begin{pmatrix} 0,766 & 0,643 & -3,8 \cdot 10^{-15} \\ 0,583 & -0,694 & 0,423 \\ -0,272 & 0,324 & 0,906 \end{pmatrix}$$

и $\Lambda = (1,82005 \cdot 10^{-5}, 3,084733 \cdot 10^{-5}, 1,38626799 \cdot 10^{-3})$.

Обратные значения корней квадратных из собственных чисел равны 233,766; 180,049 и 26,858.

Таблица 1. Координаты точек эллипса

Исходные			Преобразованные		
x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
-165,151	128,758	0,215	-191,581	-21,694	-47,221
-22,412	60,696	25,306	-49,402	30,926	4,284
49,491	151,055	-13,745	-36,353	127,236	-69,296
-32,692	103,658	21,813	-81,356	53,015	-17,039
-79,074	51,832	-24,221	-74,190	-27,684	-36,857
-105,965	15,388	23,990	-86,655	-54,663	22,239
1,162	-44,458	-26,173	43,900	-43,592	2,068
50,405	46,042	25,462	14,873	67,609	10,618
196,270	-15,454	14,669	165,369	115,180	26,826
-119,263	58,391	21,572	-121,237	-34,137	1,874
164,842	-128,339	-1,948	211,571	11,226	59,473
-154,522	-58,596	18,369	-79,225	-139,060	48,411
12,992	180,438	1,513	-85,576	129,114	-67,885
-227,324	28,733	-5,336	-179,429	-132,900	-9,979
98,946	123,644	-16,111	18,144	139,228	-59,856
-100,598	47,553	23,347	-101,108	-29,090	8,063
-21,164	171,643	8,217	-108,437	103,223	-58,093
-219,889	-6,678	9,473	-157,128	-147,912	18,408
12,746	-36,313	-26,410	48,093	-30,568	-1,590
233,026	6,297	-3,363	185,754	148,069	1,291

Таблица 2. Матрица системы линейных уравнений

$3,670 \cdot 10^4$	470,624	$2,230 \cdot 10^3$	$4,156 \cdot 10^3$	$9,047 \cdot 10^3$	$1,024 \cdot 10^3$	-191,581	-21,694	-47,221
$2,441 \cdot 10^3$	956,393	18,353	$-1,528 \cdot 10^3$	-211,638	132,485	-49,402	30,926	4,284
$1,322 \cdot 10^3$	$1,619 \cdot 10^4$	$4,802 \cdot 10^3$	$-4,625 \cdot 10^3$	$2,519 \cdot 10^3$	$-8,817 \cdot 10^3$	-36,353	127,236	-69,296
$6,619 \cdot 10^3$	$2,811 \cdot 10^3$	290,319	$-4,313 \cdot 10^3$	$1,386 \cdot 10^3$	-903,301	-81,356	53,015	-17,039
$5,504 \cdot 10^3$	766,419	$1,358 \cdot 10^3$	$2,054 \cdot 10^3$	$2,734 \cdot 10^3$	$1,020 \cdot 10^3$	-74,190	-27,684	-36,857
$7,509 \cdot 10^3$	$2,988 \cdot 10^3$	494,575	$4,737 \cdot 10^3$	$-1,927 \cdot 10^3$	$-1,216 \cdot 10^3$	-86,655	-54,663	22,239
$1,927 \cdot 10^3$	$1,900 \cdot 10^3$	4,278	$-1,914 \cdot 10^3$	90,801	-90,165	43,900	-43,592	2,068
221,212	$4,571 \cdot 10^3$	112,734	$1,006 \cdot 10^3$	157,918	717,845	14,873	67,609	10,618
$2,735 \cdot 10^4$	$1,327 \cdot 10^4$	719,615	$1,905 \cdot 10^4$	$4,436 \cdot 10^3$	$3,090 \cdot 10^3$	165,369	115,180	26,826
$1,470 \cdot 10^4$	$1,165 \cdot 10^3$	3,512	$4,139 \cdot 10^3$	-227,212	-63,977	-121,237	-34,137	1,874
$4,476 \cdot 10^4$	126,020	$3,537 \cdot 10^3$	$2,375 \cdot 10^3$	$1,258 \cdot 10^4$	667,635	211,571	11,226	59,473
$6,277 \cdot 10^3$	$1,934 \cdot 10^4$	$2,344 \cdot 10^3$	$1,102 \cdot 10^4$	$-3,835 \cdot 10^3$	$-6,732 \cdot 10^3$	-79,225	-139,060	48,411
$7,323 \cdot 10^3$	$1,667 \cdot 10^4$	$4,608 \cdot 10^3$	$-1,105 \cdot 10^4$	$5,809 \cdot 10^3$	$-8,765 \cdot 10^3$	-85,576	129,114	-67,885
$3,219 \cdot 10^4$	$1,766 \cdot 10^4$	99,586	$2,385 \cdot 10^4$	$1,791 \cdot 10^3$	$1,326 \cdot 10^3$	-179,429	-132,900	-9,979
329,190	$1,938 \cdot 10^4$	$3,583 \cdot 10^3$	$2,526 \cdot 10^3$	$-1,086 \cdot 10^3$	$-8,334 \cdot 10^3$	18,144	139,228	-59,856
$1,022 \cdot 10^4$	846,220	65,012	$2,941 \cdot 10^3$	-815,228	-234,551	-101,108	-29,090	8,063
$1,176 \cdot 10^4$	$1,066 \cdot 10^4$	$3,375 \cdot 10^3$	$-1,119 \cdot 10^4$	$6,299 \cdot 10^3$	$-5,997 \cdot 10^3$	-108,437	103,223	-58,093
$2,469 \cdot 10^4$	$2,188 \cdot 10^4$	338,854	$2,324 \cdot 10^4$	$-2,892 \cdot 10^3$	$-2,723 \cdot 10^3$	-157,128	-147,912	18,408
$2,313 \cdot 10^3$	934,392	2,527	$-1,470 \cdot 10^3$	-76,453	48,593	48,093	-30,568	-1,590
$3,450 \cdot 10^4$	$2,192 \cdot 10^4$	1,666	$2,750 \cdot 10^4$	239,774	191,131	185,754	148,069	1,291

Столбцы матрицы в таблице соответствуют следующим регрессорам: $x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1 * x_2, x_1 * x_3, x_2 * x_3, x_1, x_2, x_3$.

Таблица 3. Рассчитанные координаты точек эллипса при переносе начала координат в его центр

x_1	x_2	x_3
-191,581	-21,694	-47,221
-49,402	30,926	4,284
-36,353	127,236	-69,296
-81,356	53,015	-17,039
-74,190	-27,684	-36,857
-86,655	-54,663	22,239
43,900	-43,592	2,068
14,873	67,609	10,618
165,369	115,180	26,826
-121,237	-34,137	1,874
211,571	11,226	59,473
-79,225	-139,060	48,411
-85,576	129,114	-67,885
-179,429	-132,900	-9,979
18,144	139,228	-59,856
-101,108	-29,090	8,063
-108,437	103,223	-58,093
-157,128	-147,912	18,408
48,093	-30,568	-1,590
185,754	148,069	1,291

Вычисленное по формуле (6) значение множителя $1/(1-C)$ равно 1,010702696321, а полученные с использованием этого множителя значения полуосей эллипса равны соответственно 235,013; 181,010; 27,002, т. е. практически совпадают с заданными.

Таким образом, показано, что по результатам определения координат точек, принадлежащих его поверхности, можно определить параметры эллипса, находящегося в общем положении. Предложен алгоритм получения соответствующих оценок. Результаты решения численного примера подтверждают работоспособность предложенного алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ржанов А.В., Свитаев К.К., Семенов А.И. и др. Основы эллипсометрии. – Новосибирск: Наука, 1974. – 253 с.
2. Шолпо Л.Е. Использование магнетизма горных пород для решения геологических задач. – Л.: Недра, 1977. – 187 с.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1973. – 837 с.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

УДК 621.397;621.391.883.2

ФРАКТАЛЬНОСТЬ ОТНОШЕНИЯ СИГНАЛ/ШУМ

С.М. Слободян

Инновационный центр «ТЕСТ», г. Томск

E-mail: IC_Test@inbox.ru

Обсуждается классическое определение отношения сигнала к шуму, обычно используемое для количественной оценки эффективности различения сигналов в оптимальном линейном фильтре. Введено понятие фрактальной размерности отношения сигнал/шум для использования в качестве параметра обнаружения объекта в оптико-электронных и телевизионных автоматических системах и средствах контроля и диагностики состояния пространства наблюдения.

В большинстве задач, решаемых в измерительной технике, радиолокации, астрономии, оптической связи, локации, навигации, телевизионной автоматике и многих других весьма широких областях науки и техники, одной из основных и сложных проблем является проблема помехоустойчивости устройств, систем и комплексов [1–12]. Другими словами, решение задачи отыскания наилучшего из способов распознавания сигналов и объектов при наличии шума или помех. В определение «наилучший» способ или метод часто вкладывают синоним «оптимальный» в том или ином смысле подход к обработке сигнала или распознаванию изображения объекта в условиях воздействия помех. Определение наилучшего производится на основе выбранного критерия оптимальности, в большей или меньшей степени соответствующего пониманию разработчиком принципа оценки качества решения данной задачи, которые весьма широки и разнообразны.

Так, например, в оптической и радиолокации требуется установить параметры (x , y , z – координаты объекта, скорость и т. п.) путем облучения этого объекта некоторым видом излучения с последующим приемом отраженной от него энергии этого вида излучения или (при пассивной локации) естественного вида излучения (теплового, солнечного или другого вида электромагнитного излучения). В оптической и радиоастрономии полезным сигналом является собственное излучение наблюдаемого небесного тела. Характеристики сигнала с полезной информацией заданы естественным образом самой природой, и измерительные или регистрирующие средства изменять его или подвергать активному воздействию наблюдаемый объект не могут. В оптико-электронных, телевизионных и радиоизмерительных средствах задача также сводится к измерению параметров или характеристик сигналов по отличительным их признакам при наличии помех.