ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 290 1974

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МЕТРИЗАЦИИ ПРОСТРАНСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Ю. Я. ТАРНОПОЛЬСКИЙ

(Представлена научно-техническим семинаром кафедры АСУ и лаборатории управления)

Нахождение наилучшего расписания работы оборудования является центральной задачей теории управления дискретным производством. Для этого в традиционной постановке рассматривается задача календарного планирования, в которой находится оптимальное, в смысле выбранного критерия, расписание обработки n деталей на m станках. Комбинаторные возможности такой задачи экспоненциально растут с ростом ее размеров $(n \times m)$. Так, например, для нахождения оптимального расписания методом полного перебора понадобилось бы рассмотреть $(n!)^m$ вариантов планов.

Если предположить, что детали имеют одинаковые технологические маршруты без повторения операций, то любой действительный план определяется порядком обработки деталей на каждом из m станков. Любой порядок деталей на j-м станке $(j = \overline{1,m})$ определяется некоторой перестановкой P_j из n элементов (номеров деталей), а каждый календарный план — набором из m таких перестановок.

Обозначим через S множество всех перестановок из n элементов, а через V — множество наборов перестановок $(P_1, P_2, ..., P_m)$, где $P_j \in S$ $(j=\overline{1,m})$. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между множеством V и множеством всех действительных планов, а задача календарного планирования сводится к оптимизации некоторого функционала $F(v)$ $(v \in V)$ на множестве наборов перестановок V.

Поиск оптимального набора v в комбинаторном пространстве такого типа требует определенной упорядочности этого пространства для выделения его малых окрестностей и выбора направления движения. Для этой цели на V вводится некоторым образом метрика. Тогда для оптимизации функционала $F(v)$ в методическом пространстве может быть применен метод статистической оптимизации [1]. Пусть для определенности отыскивается $min\ F(v)$. Рассмотрим метод поиска локального минимума функционала в нашей задаче.

Для заданной начальной точки v_0 из ее ε-окрестности выбираются случайным образом K точек, в которых вычисляются значения $F(v)$. Пусть минимальное из K-значений функционала достигнуто в точке v_1, тогда при $F(v_0) \leqslant F(v_1)$ можно считать v_0 точкой локального минимума, либо провести дополнительное исследование. Если $F(v_0) > F(v_1)$, то принимаем v_1 за новую начальную точку, и рассмотренный процесс повторяется снова для v_1.

Применение метода статистической оптимизации при достаточно большом количестве шагов может гарантировать достижение локального оптимума с вероятностью, близкой к единице. Однако эффективность оптимизации таким методом существенно зависит от того, каким образом вводится метрика в пространстве V.

Как известно, эффективность статистического поиска увеличивается при увеличении объема дополнительной информации о поведении исследуемой функции. При разработке методов поиска экстремума для аналитических функций понятие о непрерывности имеет наиболее существенное значение. По аналогии — для дискретных функций, если близким точкам из комбинаторного пространства V соответствуют близкие значения функционала, то скорость достижения оптимума должна быть, по всей вероятности, выше, чем при «слепом» поиске (метод Монте-Карло). В связи с этим возникает задача выбора метрики в пространстве V, обеспечивающей достаточную эффективность поиска. Такая метрика, по нашему мнению, должна обеспечивать хорошую упорядоченность комбинаторного пространства поиска, отвечающую тому определению непрерывности, которое употребляется для обычных аналитически заданных функций.

Действительно, если взять гладкую функцию непрерывного аргумента, разделить область определения на N интервалов, произвольно пронумеровать эти интервалы и согласно нумерации построить новую функцию с N-1 разрывами, то при $N \to \infty$ мы получим некоторый эквивалент рассматриваемой нами разрывной функции дискретного аргумента. Для такого примера наша задача заключается в том, чтобы найти метрику (способ нумерации интервалов), восстанавливающую в среднем первоначальный вид функции. В связи с этим определим некоторый статистический эквивалент свойства непрерывности для функции дискретного аргумента. Назовем это свойство, дающее важную информацию о поведении функции дискретного аргумента, свойством статистической непрерывности.

Будем в дальнейшем для упрощения рассматривать множество перестановок S, поскольку метрика, заданная на этом множестве, естественным образом индуцирует метрику в V.

Пусть в S задана некоторым образом метрика. Обозначим через $Q(p)$ окрестность точки p. Окрестность $Q(p)$ будем называть неминимальной, если существует окрестность $Q_1(p) \subset Q(p)$. Здесь $\subset$ обозначает строгое включение.

Определение: Функцию F, определенную в пространстве S, назовем статистически непрерывной в точке $p \in S$, если для каждой не минимальной окрестности $Q_1(p)$ существует окрестность $Q_2(p) \subset Q_1(p)$ такая, что

$$DF[Q_2(p)] \leqslant DF[Q_1(p)],$$

где через $DF[Q(p)]$ обозначена дисперсия F на множестве $Q(p)$.

Легко заметить, что все функции непрерывного аргумента обладают свойством статистической непрерывности. Для функций дискретного аргумента наличие статистической непрерывности может быть установлено экспериментально. Проведенные автором исследования показали, что для пространства V обнаружение свойства статистической непрерывности существенно связано с выбором метрики в этом пространстве. Статистическая непрерывность может быть установлена не для всех точек V. Метрики, обеспечивающие лучшую упорядоченность, то есть больший процент точек в пространстве со статистической непрерывностью, являются лучшими с точки зрения организации статистического поиска.

Свойство статистической непрерывности дает дополнительную информацию о пространстве V, что позволяет организовать эффективный поиск экстремума за счет адаптации к этому пространству.

При наличии достаточно больших выборок значений $F(v)$, полученных с помощью тестовых задач календарного планирования, можно, не прибегая к фактической проверке методов поиска с применением тех или иных метрик, проверить, используя свойство статистической непрерывности, относительную эффективность таких метрик.

Рассмотрим несколько метрик, удобных для организации поиска.

Метрика Пейджа (метрика П). В работе Е. С. Пейджа [2] введена метрика для пространства решений одномаршрутной одномерной задачи календарного планирования. За меру близости двух перестановок p_1 и p_2 принимается число нарушений группового расположения элементов одной перестановки относительно другой. Эта величина является аналогом расстояния между перестановками и обозначается через $\pi(p_1, p_2)$.

Пусть, например, $p_1 = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$, а $p_2 = (4, 5, 6, 1, 2, 3)$, тогда $\pi(p_1\ p_2) = 1$.

Нетрудно установить, что расстояние $\pi(p_1\ p_2)$ удовлетворяет известным аксиомам метрики:

1) $\pi(p_1, p_2) \geqslant 0$ — (аксиома тождества),

2) $\pi(P_1, P_2) = \pi(p_2, p_1)$ — (аксиома симметрии),

3) $\pi(p_1, p_2) + \pi(p_2, p_3) \geqslant \pi(p_1, p_3)$ — (аксиома треугольника).

В работе [2] введено понятие K-окрестности некоторой перестановки p_0, как множества перестановок, для которых $\pi(p_0, p_i) \leqslant K$, $(K = \overline{1, n-1})$. K-окрестность обозначается через $U(p, K)$.

Случайный поиск в окрестности $U(p_0, K)$ организуется следующим образом. Из множества перестановок S выбирается случайным образом исходная перестановка p_0 и число K. Генерируется $K = 1$ случайных чисел ξ_i в интервале $[0,1]$, которые упорядочиваются по возрастанию. Далее образуются числа $U_i = (n+1)\xi_i$ (с интервалом изменения $0 \leqslant U_i \leqslant n+1$; $i = \overline{1, K\text{-}1}$), с помощью которых определяется разбиение исходной перестановки на K групп. Натуральные числа, входящие в первый интервал $[0, U_1]$ указывают номера позиций элементов первой группы перестановки, входящие во второй интервал — второй группы и т. д. Если обозначать номера групп натуральными числами, то каждой перестановке этих чисел $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_K)$ соответствует некоторая перестановка p_i из множества S, такая, что $p_i \in U(p\ , K)$. Получая и переставляя случайным образом K-группы исходной перестановки, мы образуем случайные выборки из окрестности $U(p_i, K)$, которые используются на каждом шагу поиска.

Такой метод назван «цепным» методом Монте-Карло. В работе [2] проведено исследование данного метода в сравнении с обычным методом Монте-Карло (методом слепого поиска). Эксперименты проводились для тестовых задач размером 20×10 и 30×5. Для достижения примерно одинаковых результатов цепной метод требует в $5 \div 6$ раз меньшего количества испытаний.

В работе [3] показано, что «цепной» метод поиска дает лучшие результаты по сравнению с рядом эвристических методов. По мнению авторов [3], это явление объясняется более высокой упорядоченностью поиска.

Лексикографическая метрика (метрика γ). Авторами работы [4] предложена метрика, устанавливающая взаимно-однозначное соответствие между множеством перестановок S и отрезком натурального ряда $R = \{1, 2, ..., n!\}$. В работе выведены формулы для определения номера N(p) перестановки в ряду перестановок, упорядоченных лексикографическим способом, и нахождения перестановки p по заданному номеру $N(p)$.

Расстояние между двумя перестановками выводится формулой

$$\gamma(p_1, p_2) = |N(p_1) - N(p_2)|$$

и удовлетворяет аксиомам метрики.

Для нахождения $N(p)$ все множество перестановок из n объектов, упорядоченных лексикографическим способом, подразделяется на классы от первого до $(n-1)$-го порядка. В каждом классе $(n-1)$-го порядка содержится по одной перестановке, в классе $(n-2)$-го порядка — по две перестановки, в классе $(n-3)$-го порядка — 3! перестановки и, наконец, в классе первого порядка — $(n-1)!$ перестановок.

На основании такого разбиения выведена формула для определения номера перестановки

$$N(p) = (l_1 - 1)(n-1)! + (l_2 - 1)(n-2)! + \\ + (l_{n-2} - 1)\,2! + (l_{n-1} - 1) + 1, \qquad (1)$$

где $l_K (K = \overline{1, n})$ — обозначает номер класса K-го порядка в классе $(K$-$1)$-го порядка.

Для вычисления $N(p)$ по расположению n объектов в перестановке $p = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ все объекты перенумеровываются, и одновременно записывается натуральный ряд чисел от единицы до n. В этом случае l_K есть номер числа α_K в ряду 1, 2, ..., n, если не считать $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{K-1}$.

Для нахождения перестановки по заданному номеру $N(p)$, к формуле для $N(p)$ применяется метод последовательного деления.

$$\begin{aligned} N(p)-1 &= (l_1-1)\,(n-1)! + q_1,\\ q_1 &= (l_2-1)\,(n-2)! + q_2,\\ &\dots\dots\dots\\ q_{n-3} &= (l_{n-2} - 1)\,2! + q_{n-2},\\ q_{n-2} &= l_{n-1} - 1. \end{aligned} \qquad (2)$$

В этих формулах q_1 — остаток от деления $N(p) - 1$ на $(n-1)!$, а $q_i (i = \overline{2, n-2})$—остаток от деления q_{i-1} на $(n-i)!$. Будем считать $l_1 - 1 = l_2 - 1 = ... = l_{n-2} - 1 = 0$, если $N(p) - 1 < (n-1)!$, $q_1 < (n-2)!, ..., q_{n-3} < 2!$ соответственно. Последнее вытекает из того, что при вычислениях мы не выходим за пределы множества целых чисел.

На основании соотношений (2) определяются значения $l_K (K=\overline{1, n-1})$

$$\begin{aligned} l_1 &= \left[\frac{N(p)-1}{(n-1)!}\right] + 1\\ l_2 &= \left[\frac{q_1}{(n-2)!}\right] + 1\\ &\dots\dots\\ l_{n-2} &= \left[\frac{q_{n-1}}{2}\right] + 1\\ l_{n-1} &= q_{n-2} + 1. \end{aligned} \qquad (3)$$

В этих выражениях квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Построив прямую $N(p)$ и обратную $N^{-1}(p)$ зависимости между перестановкой и ее номером в натуральном ряду чисел, можно легко организовать статистический поиск наилучшего решения следующим образом. Представим точкой M в прямоугольной системе координат некоторый план, определенный набором перестановок $v=(p_1, p_2, \ldots, p_m)$. Компонентами координат этой точки M будут соответственно величины $N(p_1), N(p_2), \ldots, N(p_m)$. Пространство поиска в прямоугольной системе координат является m-мерным параллелепипедом с присоединенными границами $[a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_m, b_m]$, где $a_к=1$; $b_к=n!$ $(К=\overline{1, m})$. Выбрав случайно в пространстве поиска некоторую начальную точку M_0 и определив для нее значение $F(M_0)$, найдем в ее ε-окрестности $[\gamma(M_0, M)\leqslant\varepsilon]$ путем случайного отбора K точек. Каждую из этих точек M_q характеризует набор координат $\{N_j^q\}$ $(j=\overline{1, m}$; $q=\overline{1, K})$, который после преобразования $N^{-1}(p)$ превращается в набор перестановок v_q. Далее вычисляется функционал $F(v_q)$, и поиск продолжается по схеме, описанной выше.

Инверсная метрика (метрика ρ). В работе [5] рассмотрена метрика, в которой расстояние между перестановками p_1 и p_2 определяется как число всех инверсий перестановки p_2 относительно p_1. Расстояние от p_1 до p_2 удовлетворяет аксиомам метрики и обозначается через $\rho(p_1, p_2)$. Авторы [5] показали, что расстояние $\rho(p_1, p_2)$ пробегают все целочисленные значения от 0 до $\frac{n(n-1)}{2}$.

С помощью введенной метрики в пространстве V определяется система окрестностей. Пусть $v_0=(p_{01}, p_{02}, \ldots, p_{0m})$ — произвольный набор перестановок, а K—целое число $0<K\leqslant\frac{n(n-1)}{2}$. Назовем K-окрестностью v_0 множество всех тех наборов перестановок $v=(p_1, p_2, \ldots, p_m)$, для которых выполняется условие для всех $i=\overline{1, m}$.

В работе [5] установлено взаимно-однозначное соответствие между всеми перестановками символов $1, 2, \ldots, n$ и всеми целочисленными векторами вида $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$, где $0\leqslant a_i\leqslant n-i$ $(i=\overline{1, n-1})$. Вектор $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$, соответствующий перестановке $p=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$, называется индексом I этой перестановки. Координаты вектора $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ определяются по компонентам перестановки p согласно следующему алгоритму:

$$1)\ a_1=\alpha_1-1,$$

$$2)\ a_i=l_i-1\ (i=\overline{1, n-1}), \tag{4}$$

где l_i — номер числа α_i в ряду $1, 2, \ldots, n$, если не считать α_i, $\alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$.

При этом предполагается, что нулем пространства является перестановка $p_0=(1, 2, \ldots, n)$.

Нетрудно заметить, что в перестановке с индексом $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ первый элемент перестановки образует a_1 инверсий, второй—a_2 инверсий и т. д. Отсюда можно сделать заключение, что число инверсий перестановки с индексом $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ равно $\sum_{i=1}^{n-1} a_i$. Далее вводится понятие r-окружности с центром в некоторой перестановке p_0, как множества всех перестановок $p\in S$, обладающих свойством $\rho(p_0, p)=r$. Каждая r-окружность содержит столько перестановок, сколько существует различных представлений числа r в виде суммы

$$r=\sum_{i=1}^{n-1} a_i\,(0\leqslant a_i<i)$$

с учетом порядка слагаемых.

Обозначим через (r, q) количество разложений числа r в сумму $r=\sum_{i=1}^{q} a_i$ с учетом порядка слагаемых. Тогда числа (r, q) могут быть определены из следующего рекуррентного соотношения:

$$(r, q)=(r-1, q)+(r, q-1)-(r-q-1, q-1). \qquad (5)$$

Введенные понятия индекса r-окрестности, числа (r, q) используются для организации равновероятной выборки некоторой перестановки p из K-окрестности любой перестановки p_0. При этом можно ограничиться K-окрестностью нуля, поскольку любую перестановку $p=(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n)$ с некоторой ее K-окрестностью можно топологически отобразить в нуль с его K-окрестностью, установив соответствие $\alpha_1 \longleftrightarrow i \ (i=\overline{1, n})$.

Определим количество перестановок в некоторой K-окрестности. Поскольку K-окрестность в метрике ρ состоит из K r-окружностей $(0<r\leqslant \kappa)$, а каждая r-окружность, в свою очередь, из $(r, n-1)$ перестановок, то всего в K-окрестности находится $\sum_{r=1}^{\kappa}(r, n-1)$ перестановок. Среди этих перестановок имеется $\sum_{r=1}^{\kappa-a_1}(r, n-2)$ таких, индекс которых начинается с a_1. В свою очередь, среди последних имеется $\sum_{r=1}^{\kappa-a_1 a_2}(r, n-3)$ перестановок, индекс которых имеет на втором месте a_2. Продолжая эти рассуждения, можно заключить, что множество перестановок, индексы которых начинаются с чисел $a_1, a_2, \dots, a_i$, состоит из следующего количества:

$$\sum_{r=1}^{\kappa-a_1-a_2-\dots-a_i}(r, n-i-1).$$

Для обеспечения равновероятной выборки перестановок из K-окрестности нулевой перестановки используется следующий алгоритм:

1. Отрезок $[0, 1]$ делится на K_1 частей в отношении

$$\sum_{r=1}^{\kappa_1-1}(r, n_1):\sum_{r=1}^{\kappa_1-2}(r, n_1):\dots:\sum_{r=1}^{1}(r, n_1),$$

где $K_1=K,\ n_1=n-1$.

2. Генерируется некоторе значение ζ_0 равномерно-распределенной в $(0,1)$ случайной величины. Если ζ_0 принадлежит i-му интервалу отрезка $(0,1)$, то полагаем $a_j=i-1$.

3. Осуществляется переход к этапу 1, полагая, что $K_{j+1}=K_j-a_j$, $n_{i+1}=n_j-1 \ (j=\overline{1, n-1})$. Повторением этапов 1 и 2 получаем a_{j+1} и т. д.

4. После того как индекс $(a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_{n-1})$ построен, находим соответствующую ему перестановку с помощью приведенного выше алгоритма (4).

На основании рассмотренного алгоритма может быть легко осуществлена любая схема статистического поиска наилучшего плана.

При построении метрик γ и ρ была предпринята попытка устранить некоторые недостатки метрики π, предложенной Пейджем. Метрики γ и ρ по сравнению с метрикой π имеют ряд преимуществ, которые сводятся к следующему:

1. Максимальные удаления между точками пространства S для метрик π, ρ и γ составляют $n-1$, $\frac{n(n-1)}{2}$ и $n!$ соответственно. Таким образом, в метриках ρ и γ каждая точка пространства имеет больший набор K-окрестностей, что обеспечивает большую детализацию комбинаторного пространства и, следовательно, дает возможность лучше организовать статистический поиск.

2. В метрике ρ близость перестановок зависит не только от количества разрывов, как это имеет место в метрике π, но и от того, насколько далеко разносятся разорванные части друг от друга и от того, как много элементов перестановки изменили свое взаимное расположение. Эти свойства метрики ρ позволяют лучше учесть особенности задачи календарного планирования с точки зрения организации целенаправленного поиска оптимального плана.

3. Известное преимущество перед остальными метриками имеет метрика γ, которая дает наибольшую детализацию пространства S. Вместе с тем ее недостатком в сравнении с метрикой ρ является зависимость расстояния $\gamma(p_1, p_2)$ от порядка нумерации деталей.

Для сравнения метрик на рис. 1 приведены полученные расчетным путем для $n = 6$ кривые, характеризующие количество M перестановок, находящихся в r-окрестности некоторой перестановки p_0, в зависимости от применяемых метрик. Из рис. 1 видно, что наиболее грубую детализацию пространства перестановок дает метрика π, наиболее тонкую — метрика γ. При шаге поиска $r = 1$ все метрики практически эквивалентны, но уже при $r = 3,4$ использование метрики π нереально. Применение метрик ρ и γ позволяет значительно быстрей, чем при метрике π, проходить эквивалентные области, что существенно повышает эффективность поиска.

Проведенные на ЭВМ исследования подтвердили эффективность метрики γ по сравнению с метрикой π. Отыскивался оптимальный план для тестовой задачи календарного планирования размером $m \times n \times l = 6 \times 6 \times 6$ (l — количество операций каждой детали) при самых общих предположениях. Обнаружилось, что количество недействительных планов на один действительный для метрики π в $5 \div 6$ раз было больше, чем для метрики γ при одних и тех же K-окрестностях ($K = 2$). Это указывает на то, что эффективность поиска с применением метрики γ в $5 \div 6$ раз больше, чем с применением метрики π.

В настоящее время разрабатываются программы для ЭВМ, которые позволят провести экспериментальную проверку метрики ρ.

В заключение необходимо отметить, что исследования в области метризации комбинаторных пространств, по нашему мнению, весьма перспективны для построения оптимальных календарных планов задачи календарного планирования самого общего вида.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Растригин. Статистические методы поиска. М., «Наука», 1968.
2. E. S. Page. On Monte-Karlo Methods in Congrestion Problems. J. Oper. Res., 13, 2, 1965.
3. С. Е. Осколкова, И. О. Осколков. Применение некоторых эвристических методов к решению задач календарного планирования. «Автоматика и телемеханика», 2, 1968.
4. Д. И. Голенко, Ю. Я. Тарнопольский. Оптимизация календарных планов методами направленного поиска. «Кибернетика», 6, 1970.
5. Д. И. Голенко, Ю. Я. Тарнопольский, Я. Н. Ярокер. Алгоритм статистической оптимизации для задачи календарного планирования. Сб. научных трудов семинара МДНТП. М., 1969.