ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 293 1977

УДК 681.142.644.3.088

ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СТУПЕНЧАТОЙ ФУНКЦИИ ЦИФРОВЫМ ИНТЕГРАТОРОМ

В. С. МОСКВИН, В. К. ЯСЕЛЬСКИЙ, Е. М. БЕЛОВ

(Представлена научным семинаром физико-технического факультета)

Цифровые интеграторы находят широкое применение в цифровых дифференциальных анализаторах, в специализированных вычислительных устройствах.

В ряде работ [1, 2] достаточно полно проведен анализ точных характеристик цифровых интеграторов, построенных на обычных двоичных умножителях.

Применение в интеграторах счетчиков циклического кода дает определенное преимущество, но в этом случае возникают некоторые особенности при оценке точности их работы.

Следует заметить, что задача нахождения погрешности устройства, содержащего цифровые интеграторы, не может в общем случае сводиться к задаче о точности интегрирования ступенчатой функции. Исключение составляют цифровые линейные интеграторы (их интеграторы работают в режиме интегрирования скачка), на примере которых целесообразно провести анализ точности выполнения указанной операции [1].

Поскольку цифровые вычислительные устройства дают значение ординат функции в дискретных точках, то рассматривать погрешность имеет смысл в этих же точках при целочисленных значениях аргумента, выраженных в виде числа импульсов.

Предположим, что на вход регистра интегратора, имеющего n разрядов и работающего в циклическом коде, поступило N импульсов. Тогда из N поступивших импульсов со счетного выхода триггера i-го разряда снимем

$$\operatorname{ent}\left(N\cdot 2^{i-n-1}+\frac{3}{4}\right) \text{ импульсов,}$$

а с инверсного выхода

$$\operatorname{ent}\left(N\cdot 2^{i-n-1}+\frac{1}{4}\right) \text{ импульсов.}$$

Индекс $i=0$ относится к триггеру последнего разряда, $i=1$ — предпоследнего разряда и т. д. Символ ent означает выделение целочисленной части числа.

Число импульсов, поступивших на вход регистра интерполятора за цикл, равно

$$\Delta x = 2^n.$$

Под погрешностью интегрирования ступенчатой функции будем понимать разность между значением выходной величины y_1, соответствующей точному выполнению операции интегрирования, и величиной y_2, выдаваемой устройством при одном и том же значении аргумента.

Очевидно, в соответствии с рис. 1, где представлена ступенчатая кривая, аппроксимирующая линейную функцию заданного наклона, можно записать

$$y_1 = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \cdot x, \qquad (1)$$

где Δy — общее число импульсов, поступивших с выхода устройства за цикл.

Учитывая особенность формирования импульсных наборов в интеграторе, общее число импульсов, задаваемое кодом, представим в виде

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n-1} 2^{i-1} K_i + \sum_{i=1}^{n-1} 2^{i-1} \overline{K}_i + 1 \cdot K_0, \qquad (2)$$

где K_i и $\overline{K}_i$ принимают значения 1 и 0 и являются коэффициентами перед соответствующими степенями числа два при задании числа импульсов Δy в двоичной системе исчисления.

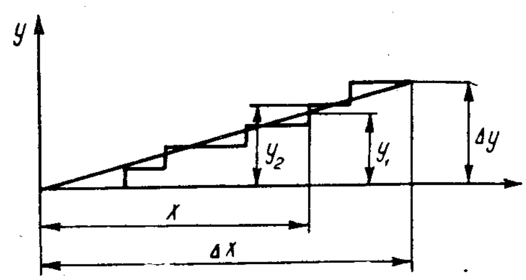

Рис. 1. Аппроксимация линейной функции заданного наклона ступенчатой кривой

Коэффициент K_i показывает, триггеры каких разрядов и какие их выходные цепи участвуют в выполнении операции интегрирования.

K_0 — счетный выход триггера последнего разряда;

$\overline{K}_1$ — инверсный выход триггера предпоследнего разряда.

На основании проведенных рассуждений получим

$$y_1 = 1 \cdot N \cdot 2^{-n} K_0 + \sum_{i=1}^{n-1} N \cdot 2^{i-n-1} K_i + \sum_{i=1}^{n-1} N \cdot 2^{i-n-1} \overline{K}_i, \qquad (3)$$

$$y_2 = \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{ent}\left(N \cdot 2^{i-n-1} + \frac{3}{4}\right) K_i + \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{ent}\left(N \cdot 2^{i-n-1} + \frac{1}{4}\right) \overline{K}_i. \qquad (4)$$

Отсюда погрешность интегрирования ступенчатой функции

$$\Delta = y_1 - y_2. \qquad (5)$$

Для обеспечения необходимой точности выполнения интегрирования важно знать, какую максимальную ошибку можно ожидать от принятого метода интегрирования при заданном числе разрядов n счетчика.

Воспользуемся неравенствами

$$\operatorname{ent}\left(N \cdot 2^{i-n-1} + \frac{3}{4}\right) \geqslant \left(N \cdot 2^{i-n-1} + \frac{3}{4} - 1\right) \qquad (6)$$

и

$$\operatorname{ent}\left(N \cdot 2^{i-n-1} + \frac{1}{4}\right) \geqslant N \cdot 2^{i-n-1}. \qquad (7)$$

В соответствии с выражениями (6) и (7) соотношение (5) можно переписать в виде

$$\Delta \leqslant N \cdot 2^{-n} \cdot K_0 + \sum_{i=1}^{n-1} N \cdot 2^{i-n-1} K_i + \sum_{i=1}^{n-1} N \cdot 2^{i-n-1} \overline{K}_i -$$

$$- \sum_{i=0}^{n-1} \left(N \cdot 2^{i-n-1} - \frac{1}{4} \right) K_i - \sum_{i=0}^{n-1} N \cdot 2^{i-n-1} \cdot \overline{K}_i. \tag{8}$$

Предположим, что при изменении i в указанных пределах все коэффициенты K_i и $\overline{K}_i$ принимают значения, равные единице.

Это допущение позволяет представить неравенство (8) так:

$$\Delta \leqslant N \cdot 2^{-n} + \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{n-1} K_i - 2 \cdot N \cdot 2^{-n-1}. \tag{9}$$

Произведя некоторые преобразования, получим

$$\Delta_{\max} \leqslant \frac{n}{4}. \tag{10}$$

Таким образом, проведенная оценка максимальной погрешности интегрирования ступенчатой функции показывает, что абсолютная ошибка возрастает с увеличением числа разрядов интерполятора, но не превосходит величины $\frac{n}{4}$. Следует однако учитывать, что с ростом n уменьшается цена деления импульса.

Полученное соотношение (10) позволяет оценить максимальную погрешность интегрирования в произвольной дискретной точке траектории для различного числа разрядов n регистра интерполятора.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Воронов, А. Р. Гарбузов и др. Цифровые аналоги для систем автоматического управления. М., изд-во АН СССР, 1960.
2. А. В. Каляев. Введение в теорию цифровых интеграторов. Киев, «Наукова думка», 1964.