

УДК 621.01+519.82

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ РАЗМЕРОВ
КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ
С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ ПО УГЛУ ДАВЛЕНИЯ
МЕТОДАМИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

Ю. Я. КОВЫЛИН, М. Ю. КОРОБЕЙНИКОВ, З. П. ОСИПОВА

(Представлена научно-методическим семинаром кафедры прикладной механики)

Проектирование кулачковых механизмов ведется в настоящее время с учетом ограничений по углу давления α

$$\alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_1, \quad (1)$$

где α_1 и α_2 — наибольшее и меньшее допустимые значения угла давления соответственно. При работе механизма текущие значения угла давления определенным образом зависят от основных (свободных) размеров механизма. Выбор последних производится так, чтобы обеспечить выполнение ограничений по углу давлений и вместе с тем получить наименьшие размеры механизма. Отвечающие этим требованиям размеры механизма назовем оптимальными. В общем случае нахождение оптимальных размеров механизма сводится, таким образом, к решению задачи нелинейного программирования, где роль ограничений играют ограничения по углу давления.

Имеются хорошо разработанные графические методы определения размеров этого и других типов плоских кулачковых механизмов. Случай вращающегося дискового кулачка рассмотрен в работе [1], случай поступательного движущегося кулачка — в работе [2]. Аналитическим методом определения оптимальных размеров кулачковых механизмов с поступательно движущимся толкателем посвящены работы [3] (случай поступательно движущихся кулачка и толкателя) и [4] (случай вращающегося кулачка при поступательно движущемся толкателе). В этих работах основные размеры механизмов найдены в виде явных формул. Последнее стало возможным благодаря тому, что соответствующая задача нелинейного программирования имела специфику, допускающую явное решение.

Для механизмов с качающимся (коромысловым) толкателем имеющиеся аналитические решения [5, 6, 7] представляются весьма приближенными и, в силу этого, приемлемы чаще всего лишь на стадии предварительных расчетов. Поэтому разработка аналитических или эффективных численных методов синтеза оптимальных (в указанном смысле) механизмов представляет актуальную задачу.

В настоящей статье рассматривается задача определения основных размеров $L \equiv x_{\max}/l_{\text{BC}}$ и δ плоского механизма (рис. 1) с поступательно движущимся кулачком 1 и качающимся (коромысловым) толкателем 2.

Нахождение указанных размеров производится согласно принятым выше условиям оптимальности.

Для определенности положим, что график функции $\psi(x)$, где $x = x/x_{\max}$, состоит из двух гладких кусков $\psi = p_i(x)$, $i = 1, 2$ (рис. 2) и пусть $p_i(x) = q_i(x)$. Отрезок, на котором определена функция $p_i(x)$, обозначим K_i . Когда x пробегает отрезок K_i , $i = 1, 2$, точка с координатами $p(x)$, $q(x)$ описывает в прямоугольной системе координат p, q фазовую кривую $q = \Gamma_i(p)$ (рис. 3). Характер разрывов фазового цикла $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ определяется значениями односторонних производных $p'(x)$ в точках $x = 0, x_0, 1$. Последующие рассуждения будут пригодны для любых кусочно непрерывных кривых Γ . Переменная $\operatorname{tg} \alpha$ от x явно не зависит, а определяется переменными $\psi = p$, $\psi' = q$ и управляющими параметрами (L, δ)

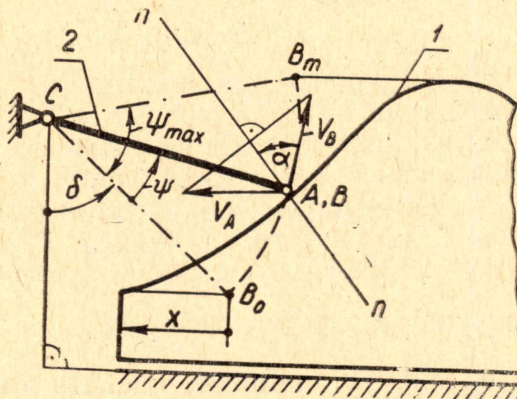


Рис. 1. Плоский механизм с поступательно движущимся кулачком и качающимся толкателем

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg}(p + \delta) + q/L \sin(p + \delta), \quad (p, q) \in \Gamma, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 \leq \operatorname{tg} \alpha \leq \operatorname{tg} \alpha_1. \quad (2)$$

Мы хотим при всех $(p, q) \in \Gamma$ поддерживать значения $\operatorname{tg} \alpha$ в определенных границах за счет выбора управляющих параметров (L, δ) . При этом нам выгодно, чтобы параметр $L > 0$ принял наименьшее значение из всех возможных. Пару (L, δ) , для которой ограничения (2) выполняются, назовем допустимым управлением. Допустимое управление

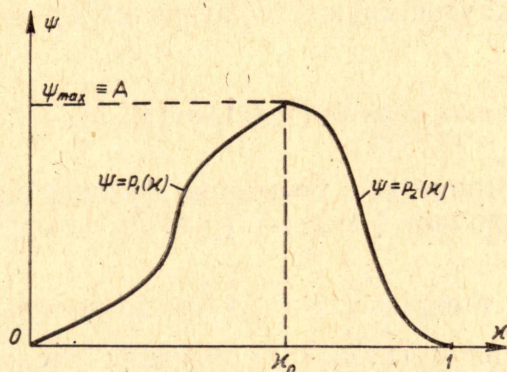


Рис. 2. График функции $\Psi(x)$ для плоского механизма с кулачком и толкателем

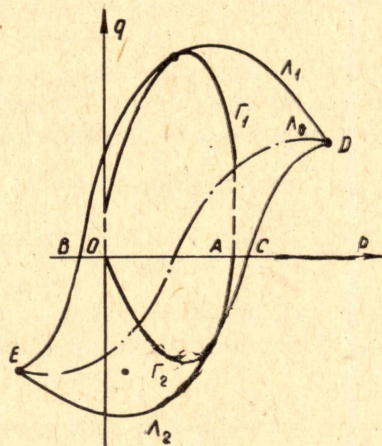


Рис. 3. Фазовая кривая $q = \Gamma_i(p)$ для плоского механизма с кулачком и толкателем

(L^*, δ^*) назовем оптимальным управлением (ОУ), если L^* уже нельзя уменьшить за счет изменения δ^* , т. е. если для любого $L < L^*$ управление (L, δ) не допустимо ни при каком δ .

На рисунке (2) показаны также три кривые: Λ_1 , Λ_2 , являющиеся линиями уровня функции $\operatorname{tg} \alpha$ (2), на которых она принимает крайние допустимые значения $\operatorname{tg} \alpha_1$, $\operatorname{tg} \alpha_2$, и Λ_0 — линия уровня $\operatorname{tg} \alpha = 0$. Для получения уравнений этих кривых нужно уравнение (2) разрешить относительно q и положить $\alpha = \alpha_i$, $i = 1, 2$.

$$q = \Lambda_i(p, L, \delta) = -L \cos(p + \delta + \alpha_i) / \cos \alpha_i, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Расположение кривых Λ_i характеризуется точками

$$B = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1 - \delta, 0 \right); \quad C = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 - \delta, 0 \right);$$

$$D = (\pi - \delta, L); \quad E = (-\delta, -L).$$

Линии уровня промежуточных значений $\operatorname{tg} \alpha$ целиком заполняют область, для которой кривая $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ служит границей. Пара точек D и E является общей для всех линий уровня. Амплитуды всех линий уровня изменяются прямо пропорционально параметру L . Для того, чтобы управление (L, δ) было допустимым, необходимо и достаточно, чтобы фазовая кривая Γ целиком охватывалась границей Λ (рис. 2). Отсюда, в частности, следует, что имеют смысл только такие ограничения (2), для которых $\alpha_2 > -\frac{\pi}{2}$, $\alpha_1 < \frac{\pi}{2}$, $\alpha_1 - \alpha_2 > A$. Любое управление (L, δ) можно сделать допустимым, если выбрать L достаточно большим.

Параметр δ может изменяться на отрезке Δ :

$$\frac{\pi}{2} - \alpha_1 < \gamma_1 \leq \delta \leq \gamma_2 < \frac{\pi}{2} - \alpha_2 - A.$$

Концы этого отрезка γ_1 и γ_2 выбираются из соображений, на которые будет указано ниже. Зафиксируем некоторое $\delta \in \Delta$ и разрешим уравнение (3) относительно L .

$$L = \Phi_i(p, q, \delta) = -q \cos \alpha_i / \cos(p + \delta + \alpha_i), \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Заметим, что при $\delta \in \Delta$ знаменатель в (4) не обращается в нуль, если $0 \leq p \leq A$. Зависимость (4) для каждого $\delta \in \Delta$ определяет L , при котором линия уровня Λ_i (3) проходит через точку $(p, q) \in \Gamma_i$. Если точка (p, q) пробегает кривую $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, то формула (4) определяет при каждом $\delta \in \Delta$ ограниченное замкнутое множество значений L , среди которых есть наибольшее $\tilde{L}$.

$$\tilde{L}(\delta) = \max_{i=1,2} \max_{(p,q) \in \Gamma_i} \Phi_i(p, q, \delta) = \max_{i=1,2} \max_{x \in K_i} \Phi_i(p_i(x), q_i(x), \delta) \quad (5)$$

Здесь $p_i(x)$, $q_i(x) = p_i(x)$ — параметрическое уравнение фазовой кривой Γ_i , соответствующей куску функции $\psi = p_i(x)$ (рис. 2) на отрезке K_i .

Если для фиксированного $\delta \in \Delta$ выбрать $L = \tilde{L}(\delta)$ (5), то построенные для этих значений линии уровня $\Lambda_i(\tilde{L}, \delta)$ (3) обладают следующими свойствами: 1) фазовая кривая $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ целиком лежит внутри области, ограниченной кривой $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$; 2) граница Λ касается кривой Γ в той точке $\tilde{p} = p(\tilde{x})$, $\tilde{q} = q(\tilde{x})$, где достигается наибольшее значение $\tilde{L}(\delta)$ (5). Число точек касания и их расположение определяется видом кривой L и выбором $\delta \in \Delta$ (на рис. 2 таких точек по одной на каждом куске Γ_i). Геометрические свойства (1) — (2) равносильны тому, что: 1) управление $(\tilde{L}, \delta)$ допустимо; 2) при таком управлении значения $\operatorname{tg} \alpha$ (2) один (или несколько) раз выходят на границу отрезка допустимых значений. Управление $(\tilde{L}, \delta)$, обладающее свойствами 1) — 2), назовем опорным управлением. Опорное управление характе-

ризуется тем, что уменьшение $\tilde{L}$ при постоянном δ приводит к недопустимому управлению. Ясно, что оптимальное управление нужно искать среди опорных управлений, просматривая значения $\tilde{L}(\delta)$ (5) при различных $\delta \in \Delta$ и выбирая наименьшее из них. Выбор концов отрезка $\Delta = [\gamma_1, \gamma_2]$ основан на следующих соображениях. Если $\delta = \gamma_1 > \frac{\pi}{2} - \alpha_1$ стремится к $\frac{\pi}{2} - \alpha_1$, то при $p = 0$, $i = 1$ знаменатель в (4) стремится к нулю и, следовательно, L , при котором управление (L, δ) допустимо, стремится к бесконечности. То же самое происходит в (4) при $p = A$, $i = 2$, когда $\delta = \gamma_2 < \frac{\pi}{2} - \alpha_2 - A$ стремится к $\frac{\pi}{2} - \alpha_2 - A$. Геометрически (рис. 2) это означает, что при стремлении точки B к точке O (либо точки C к точке A), граница Δ охватывает кривую Γ лишь при неограниченно растущих L , поскольку касательная к графику Γ в точках $p = 0$ и $p = A$ всегда вертикальна. Если из каких-то соображений заранее установлено, что значения $L > L_0$ не оптимальны либо неприемлемы, то тем самым определены границы отрезка $\Delta = [\gamma_1, \gamma_2]$, вне которого рассматривать δ не имеет смысла, поскольку там $L(\delta) > L_0$. С учетом такой предварительной информации задача разыскания ОУ (L^*, δ^*) сведена к нахождению

$$L^* = \tilde{L}(\delta^*) = \min_{\delta \in \Delta} \{\tilde{L}(\delta), L_0\}, \quad (6)$$

то есть к решению минимаксной задачи, так как $L(\delta)$ определено в (5).

Возможности использования аналитических методов классического анализа для нахождения оптимума (L^*, δ^*) ограничены даже для случая гладкой фазовой кривой Γ , так как сведение задачи (5) — (6) к нахождению условного экстремума приводит к нелинейным уравнениям, которые явно не решаются. Поэтому в общем случае имеет смысл смотреть на задачу (5) и (6) как на задачу нелинейного программирования и разрабатывать численную процедуру (алгоритм) нахождения оптимума с некоторой наперед заданной точностью. Разработаны специальные методы численного решения минимаксных задач (см. [8]), однако их непосредственное применение здесь затруднено разрывностью производственных исходной функции Ψ . Вместе с тем в использовании этих методов здесь нет необходимости, поскольку для вычисления (5) и (6) экстремумов функций одного переменного имеются относительно простые алгоритмы [9], [10].

Из общих результатов работы [8] следует, что независимо от наличия разрывов у фазовой кривой Γ положительная функция $\tilde{L}(\delta)$ (5) непрерывна по $\delta \in \Delta$ и выпукла вниз. Последнее обстоятельство позволяет использовать для нахождения минимума (6) особо эффективные методы последовательного поиска [9], [10].

АЛГОРИТМ 1 (минимизация (6)). Выбирается длина отрезка $|d\delta|$ на котором должно быть локализовано значение δ^* . Согласно методу последовательного поиска, основанному на использовании чисел Фибоначчи [9], [10], перебирается конечное число значений δ_k , $k = 1, 2, \dots, n$ (начиная с $\delta_1 = \gamma_1$) так, что на каждом удачном шаге значение $\tilde{L}(\delta_k)$ уменьшается. Вычисления прекращаются, когда для δ^* достигнута точность $|d\delta|$. Для реализации $(k+1)$ удачного шага нужно лишь помнить значение $\tilde{L}(\delta_k)$, вычисление которого можно организовать так

АЛГОРИТМ 2 (максимизация (5)). В (5) фиксируется $\delta = \delta_k$, предписанное алгоритмом 1. Выбирается длина отрезка $|dx|$, на котором должно быть локализовано значение x , доставляющее максимум функции Φ_i (5) на отрезке K_i . В общем случае имеется несколько локальных максимумов на каждом отрезке K_i , и для нахождения глобального максимума приходится использовать малоэффективный пассивный поиск [9] (при каждом значении δ_k просматривать заново сетку значений x). Если же (см. рис. 3) фазовые кривые Γ_i выпуклы (безразлично в какую сторону), то Φ_i имеет по $x \in K_i$ единственный максимум, для нахождения которого организуется эффективный последовательный поиск.

Фазовый портрет подсказывает, что x следует искать в окрестности тех значений $x \in K_i$, где $q_i(x)$ имеет экстремум. Сущность вычислений ОУ (L^*, δ^*) состоит, таким образом, в нахождении опорных управлений (алгоритм 2) и их последовательном улучшении (алгоритм 1). На последнем шаге в алгоритме 1 получим значение $\tilde{L}(\delta_k)$, для которого

$$|\tilde{L}(\delta_k) - L^*| \leq Q |d\delta| + R |dx| \leq c^{-2} [a |d\delta| + (bc + a^2) |dx|]. \quad (7)$$

Здесь Q и R — наибольшие по абсолютной величине значения производных функции (4) по $\delta \in \Delta$ и $x \in [0, 1]$ соответственно. Эти производные оцениваются далее в (7) с помощью вспомогательных чисел $c = \min_{i=1,2} \min_{p, \delta} |\cos(p + \delta + \alpha_i)| = \min \{ |\cos(\gamma_1 + \alpha_1)|; |\cos(A + \gamma_2 + \alpha_2)| \}$

(согласно замечанию к формуле (4), $c > 0$; $a_i = \max |p'_i(x)|$,

$$b_i = \max |p''_i(x)|, \quad i = 1, 2, \quad a = \max \{a_1; a_2\}; \quad b = \max \{b_1, b_2\}.$$

Формула (7) позволяет обеспечить нужную точность вычисления L^* путем надлежащего выбора отрезков $|d\delta|$ и $|dx|$ в алгоритмах 1 — 2.

Построим на фазовой плоскости p, q прямоугольник с вершинами $H_1(0, a_1)$, $H_2(A, a_1)$, $H_3(0, -a_2)$, $H_4(A, -a_2)$. По формулам (3) — (4) явно вычисляются три управления (L_i, δ_i) , $i = 1, 2, 3$, для которых границы $\Delta(L_i, \delta_i)$ проходят соответственно через такие три пары вершин: $\{H_1, H_2\}$, $\{H_3, H_4\}$, $\{H_1, H_4\}$. Из управлений (L_i, δ_i) выберем то, у которого L_i наибольшее, и обозначим его (L_0, δ_0) . Граница $\Delta(L_0, \delta_0)$ целиком охватывает прямоугольник и касается его в соответствующей паре вершин. Отметим эту пару вершин. Теперь ясно, что для любой фазовой кривой Γ , которая проходит внутри прямоугольника (или по его границе) и заходит в отмеченную пару вершин, управление (L_0, δ_0) будет оптимальным. Управление (L_0, δ_0) допустимо для любой вложенной в прямоугольник фазовой кривой Γ и может быть использовано на практике как первое приближение ОУ. Управления, у которых $L > L_0$, заведомо не оптимальны. Поэтому L_0 можно использовать для вычисления ОУ, как это сказано при выводе формулы (6).

Если положить $l_0 = \max_{i=1,2} a_i \cos \alpha_i$, то при $L < l_0$ граница Δ сузится по вертикали настолько, что при любом выборе δ кривая будет выступать за эту границу. Поэтому при $L < l_0$ управление (L, δ) недопустимо ни при каких δ . Следовательно, в любом опорном управлении $(\tilde{L}, \delta)$ (5) значение $\tilde{L} \geq l_0$. Из этой оценки и из формулы (6) следует, что ОУ (L^*, δ^*) заключено в пределах $0 < l_0 \leq L^* \leq L_0$, $\delta^* \in \Delta$.

Оценки ОУ и вычислительная процедура с очевидными изменениями переносятся на случай, когда график функции Ψ (рис. 2) более чем из двух гладких кусков и имеет более одного экстремума. В заключение заметим, что фазовый портрет Γ сыграл заметную эвристическую роль в математической постановке задачи и априорных оценках. Вместе с тем, при любом численном методе нахождения ОУ, как решения минимаксной задачи (5) — (6), никаких графиков строить не нужно, достаточно иметь лишь таблицу значений функции $P(x)$ и ее производной в конечном числе нужных точек x .

Заключение

Задача нелинейного программирования применительно к оптимальному проектированию механизмов с учетом ограничений по некоторым из их параметров может быть в общем виде поставлена так. Пусть некоторый механизм характеризуется тремя группами параметров: 1) конфигурационными параметрами $\bar{u} = (p, q, \dots)$, принадлежащими жестко заданному множеству F в фазовом пространстве $\bar{u}$ (в нашем случае — это профиль кулачка, заданный фазовой кривой F на плоскости (p, q) ; 2) свободными (управляющими) параметрами $\bar{\beta} = (L, \delta, \dots)$, которые можно выбрать из некоторого множества B ; 3) управляемыми параметрами $\bar{\alpha} = (\alpha, \dots)$, которые зависят от конфигурации механизма и управляющих параметров $\bar{\beta}$, т. е.

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(p, q, \dots, L, \delta, \dots) = \bar{\alpha}(\bar{u}, \bar{\beta})$$

(у нас эта зависимость задана формулой (2), причем параметры $\bar{\alpha}$ нужно поддерживать в пределах некоторого множества ограничений A).

Требуется обеспечить минимум некоторой целевой функции $G(\bar{\beta}) = G(L, \delta, \dots)$ при соблюдении ограничений

$$\bar{\alpha}(\bar{u}, \bar{\beta}) = \bar{\alpha}(p, q, \dots, L, \delta, \dots) \in A, \quad \bar{u}(p, q, \dots) \in F, \quad \bar{\beta} = (L, \delta, \dots) \in B.$$

Постановка задачи оптимального проектирования механизмов на языке нелинейного программирования позволит использовать для ее решения большие возможности ЭЦВМ. В нашем случае имеется 2 упрощающих обстоятельства: 1) $G(\bar{\beta}) = L$ — целевая функция совпадает с минимизируемым параметром L ; 2) целевая функция L может быть представлена как функция ограничений задачи, конфигурационных параметров и оставшихся свободных параметров, т. е. $L = \Phi(p, q, \dots, \alpha, \dots, \delta)$ (см. формулу (4)). Именно эти два условия сводят поставленную общую задачу (и рассмотренную задачу в частности) к нахождению минимакса $L^* = \min_{\delta \in \Gamma \times A} \max_{\bar{u} \in F} \Phi(p, q, \dots, \alpha, \dots, \delta)$, где максимум вычисляется по всем значениям параметров $\bar{u} = (p, q, \dots) \in F$ и $\bar{\alpha} = (\alpha, \dots) \in A$.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Артоболевский. Теория механизмов. М., «Наука», 1967.
2. Ю. Я. Ковылин. Динамический синтез плоских кулачковых механизмов с ступательными кулачками и роликовыми толкателями. Известия ТПИ, т. 96/1. Томск, изд-во ТГУ, 1959.
3. Н. Я. Нибергер. Теория механизмов и машин. В кн.: Справочник машиностроителя. Т. 1. Под редакцией Н. С. Ачеркана. М., Машгиз, 1954.
4. Ю. Я. Ковылин. Определение основных размеров кулачков без построения фазовых диаграмм. Настоящий сборник.

5. Д. М. Лукичев, А. А. Савелова. Теория механизмов. Курс лекций. Вып. 1, изд. 2-е. М., изд-во МВТУ, 1968.
 6. Теория механизмов и машин. Проектирование. Под общей ред. О. И. Кульбачного. М., «Высшая школа», 1970.
 7. Ю. Я. Ковылин. Определение основных размеров копиров и цилиндрических кулачков станков-автоматов. В сб.: Автоматизация производственных процессов в машиностроении. Ч. IV. Томск, изд-во ТГУ, 1970.
 8. В. Ф. Демьянов, В. Н. Малоземов. Введение в минимакс. М., «Наука», 1972.
 9. Ю. В. Чуев, Г. П. Спехова. Технические задачи исследования операций. М., «Советское радио», 1971.
 10. Г. Вагнер. Основы исследования операций. Т. 2. М., «Мир», 1973.
-