ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 123 1963

О ПЕРЕДАЧЕ ЭНЕРГИИ УДАРОМ ЧЕРЕЗ УПРУГОЕ ЗВЕНО

А. П. ТРОНОВ

(Представлено кафедрой горных машин и рудничного транспорта)

Ряд практических задач, связанных с расчетом и конструированием машин ударного действия, сводятся к изучению процесса соударения двух масс через упругий элемент.

Для выяснения количественной и качественной сторон соударения при обычных допущениях, упрощающих задачу, обратимся к рассмотрению колебаний системы, приведенной на рис. 1.

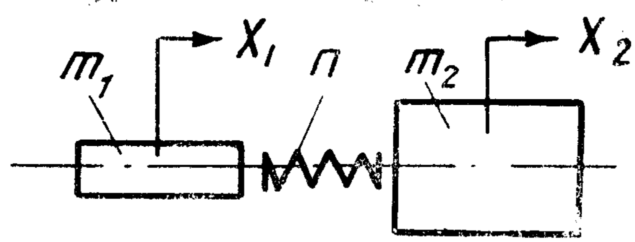

Рис. 1.

В процессе соударения движение масс происходит согласно с уравнениями

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2);$$
$$m_2 \ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2), \qquad (1)$$

где

k — коэффициент жесткости пружины;

x_1 и x_2 — координаты масс, отсчитываемые от положения равновесия, которое характеризуется наличием контакта обеих масс с пружиной при отсутствии ее деформации.

Будем искать частные решения уравнений (1) в виде

$$x_1 = B_1 \sin p t, \quad x_2 = B_2 \sin p t. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1) и производя обычные математические операции, необходимые для отыскания общего решения уравнений (1), получим частотное уравнение системы (1) в виде

$$m_1 m_2 p^4 - (m_1 + m_2)\, k p^2 = 0\,. \tag{3}$$

Решая уравнение (3) относительно p^2, найдем два значения корня

$$p_1^2 = 0; \qquad p_2^2 = \frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\,. \tag{4}$$

Корень частотного уравнения (3) $p_1^2=0$ означает возможность поступательного движения упругой системы вдоль оси x [1] и соответствует решению уравнений (1) в форме

$$x_{1\,p1} = x_{2\,p1} = at + b\,, \tag{5}$$

где a, b — постоянные величины.

Второе частное решение, соответствующее значению частоты $p_2 = \pm\sqrt{\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}}$ при соотношении амплитуд

$$\frac{B_{1\,p2}}{B_{2\,p2}} = -\frac{m_2}{m_1} \tag{6}$$

найдется как

$$x_{1\,p2} = B_{1\,p2} \sin p_2 t\,, \quad x_{2\,p2} = -\frac{m_1}{m_2} B_{1\,p2} \sin p_2 t\,. \tag{7}$$

Общее решение уравнений (1) определится суммой частных решений (5) и (7)

$$x_1 = at + b + B_{1\,p2} \sin p_2 t, \quad x_2 = at + b - \frac{m_1}{m_2} B_{1\,p2} \sin p_2 t\,. \tag{8}$$

Произвольные постоянные, a, b, B_{1p2} должны удовлетворять начальным условиям

$$x_{1,0} = 0\,, \qquad x_{2,0} = 0\,,$$
$$\dot{x}_{1,0} = \pm U_1\,; \qquad \dot{x}_{2,0} = \mp V_2, \tag{9}$$

с учетом которых общие решения (8) примут вид

$$x_1 = \frac{\pm V_1 m_1 \mp V_2 m_2}{m_1 + m_2}\, t + \frac{(\pm V_1 \pm V_2)\, m_2}{(m_1 + m_2)\, p_2} \sin p_2 t,$$
$$x_2 = \frac{\pm V_1 m_2 \mp V_2 m_2}{m_1 + m_2}\, t - \frac{(\pm V_1 \pm V_2)\, m_1}{(m_1 + m_2)\, p_2} \sin p_2 t\,. \tag{10}$$

Зависимости (10) являются уравнениями движения масс m_1 и m_2 в процессе удара, описывающими все возможные случаи соударений. Первые производные уравнений (10) определяют законы изменения скоростей масс

$$\dot{x}_1 = \frac{\pm V_1 m_1 \pm V_2 m_2}{m_1 + m_2} + \frac{(\pm V_1 \pm V_2)\, m_2}{m_1 + m_2} \cos p_2 t\,,$$
$$\dot{x}_2 = \frac{\pm V_1 m_1 \mp V_2 m_2}{m_1 + m_2} - \frac{(\pm V_1 \pm V_2)\, m_1}{m_1 + m_2} \cos p_2 t\,. \qquad (11)$$

Как следует из уравнений (11), абсолютные скорости масс в процессе удара слагаются из постоянной скорости центра колебаний $\frac{\pm V_1 m_1 \mp V_2 m_2}{m_2 + m_2}$ (переносная составляющая) и скоростей движений относительно центра колебания $\frac{(\pm V_1 \pm V_2)\, m_2}{m_1 + m_2} \cos p_2 t$, $\frac{(\pm V_1 \pm V_2) m_1}{m_1 + m_2} \cos p_2 t$ (относительные составляющие).

Полученные выражения позволяют определить величину деформации пружины, усилие, развиваемое при ударе, скорости масс в процессе удара, перемещение центра колебаний за время удара и количество переданной энергии при заданных значениях скоростей и величин масс и жесткости пружины.

На рис. 2 приведены графики изменения составляющих скоростей масс за время удара для случаев:

$$\text{а) } m_2 = 2 m_1; \quad \text{б) } m_2 = m_1; \quad \text{в) } m_2 = \frac{m_1}{2}\,,$$

где m_1 — масса ударника, наносящего удар по неподвижной массе m_2 через пружину с жесткостью k. Линии $1_{1,2}$ определяют зависимость переносной составляющей скоростей масс от времени; кривые 2_1, 2_2 характеризуют изменение относительных скоростей ударников m_1 и масс m_2. Кривые 3_1 и 3_2 показывают, как изменяются в процессе удара абсалютные скорости соударяющихся масс.

Ординаты точек V_{m1}, V_{m2} соответствуют значениям скоростей масс m_1 и m_2 в момент отрыва их от пружины.

Из графиков следует, что при $m_2 = 2m_1$ после удара массы будут двигаться в разные стороны со скоростями

$$V_{m1} = -\frac{V_1}{3}\,,$$
$$V_{m2} = \frac{2}{3} V_1\,.$$

При $m_2 = m_1$ за время $t = \frac{T}{2}$ произойдет полный обмен скоростей соударяющихся тел: масса m_2, неподвижная до удара, получит скорость $\frac{V_1}{2} + \frac{V_1}{2} = V_1$, в то время как ударник m_1 остановится. Наконец, при $m_2 = \frac{m_1}{2}$ после удара обе массы будут двигаться в направлении удара со скоростями

$$V_{m1} = \frac{V_1}{3}; \quad V_{m2} = \frac{4}{3} V_1\,.$$

Кривые 1 (рис. 2, *г*) выражают зависимость между отношениями неподвижных до удара масс m_2 к массам ударников m_1 и соответствующими отношениями их скоростей в момент времени $t=\frac{T}{2}$.

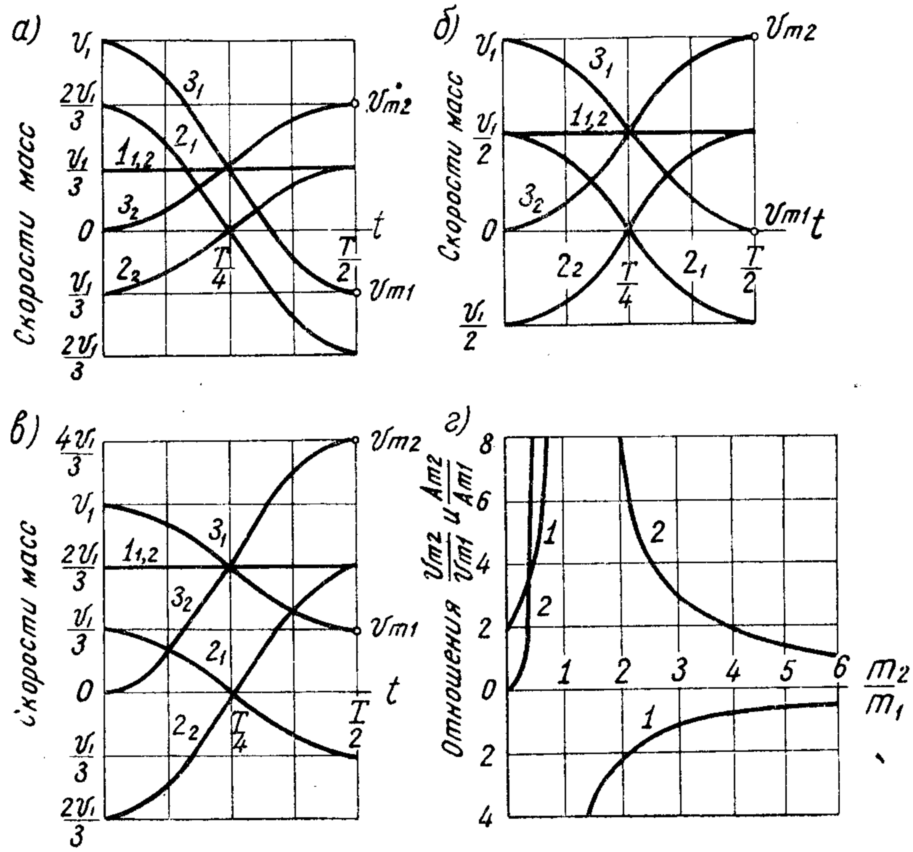

Рис. 2. Графики изменения скоростей масс в процессе удара (*а*, *б*, *в*) и диаграмма для определения количества переданной при ударе энергии.

Так при $\frac{m_2}{m_1}=3$ в момент отрыва грузов от пружины последние будут обладать равными по величине, но обратными по знаку скоростями $\frac{V_{m2}}{V_{m1}}=-1$.

Кривые 2 (рис. 2, *г*) служат для определения количества передаваемой при ударе энергии. Например, при $\frac{m_2}{m_1}=2$ отношение кинетической энергии A_{m2} массы m_2 к кинетической энергии A_{m1} массы m_1 после удара будет $\frac{A_{m2}}{A_{m1}}=8$. Очевидно, что $A_{m2}+A_{m1}=A$, где A — энергия ударника до удара. Учитывая, что после удара $A_{m2}=8A_{m1}$, найдем $8A_{m1}+A_{m1}=A$. Отсюда $A_{m1}=\frac{A}{9}$.

Следовательно, $\frac{1}{9}$ часть энергии остается за ударником, массе m_2 передается $\frac{8}{9}$ энергии ударника.

Это же количество энергии может быть передано массе m_2 при $\frac{m_2}{m_1}=\frac{1}{2}$. Однако качественные стороны совершенно различны: в первом случае массы после удара движутся в противоположные стороны, во втором случае после удара массы движутся в одну и ту же сторону. Аналогичные рассуждения справедливы для всех других соотношений $\frac{m_2}{m_1}>1$ и $\frac{m_2}{m_1}<1$.

Анализ зависимостей (10, 11) и графиков, приведенных на рис. 2, позволяет сделать следующие выводы:

1. Пружину можно рассматривать как связь, обладающую двумя характерными свойствами. Первое из них обусловлено ее способностью практически мгновенно довести скорости соударяющихся тел до скорости центра масс при неупругом ударе. Второе предполагает участие масс в свободных колебаниях, направленных в разные стороны, с амплитудами, обратно пропорциональными массам.

2. Скорость центра колебаний, относительная, абсолютная скорости масс и количество передаваемой при ударе энергии не зависят от жесткости упругого звена и определяются только соотношениями соударяющихся масс.

3. Одно и то же количество энергии ударник может передать как большей, так и меньшей массе. При $\frac{m_2}{m_1}>1$ после удара массы будут двигаться в противоположные стороны, а при $\frac{m_2}{m_1}<1$ массы будут двигаться в одну и ту же сторону.

$$4.\ \lim \frac{V_{m2}}{V_{m1}}\ _{\frac{m_2}{m_1}\to 0}=2,\ \text{т. е.}$$

как бы ни была мала масса m_2, ее скорость V_{m2} после удара не может стать равной или больше удвоенной первоначальной скорости ударника.

5. Время $t=\frac{T}{2}=\frac{\pi}{p_2}$, в течение которого массы находятся в соприкосновении с пружиной, а также максимальная величина ее деформации $\frac{\pm V_1 \pm V_2}{p_2}$ зависят от коэффициента жесткости пружины

$$t=f_1(k)\ ,\ B_{\max}=f_2(k)\ . \qquad (12)$$

6. Из (12) следует вывод, что подбором коэффициента жесткости k упругого звена при ударе можно развивать любые усилия F, независимо от кинетической энергии, запасенной ударником, так как $F=kB_{\max}=f_3(k)$.

7. Относительная скорость масс m_1 и m_2 после соударения равна их относительной скорости до соударения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. И., Федосьев В. Н., Малинин Н. Н., Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении. Машгиз, 1952.