ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С. М. КИРОВА

Том 296 1976

О ЛИНЕЙНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ПУАССОНОВСКОГО ПОТОКА ИМПУЛЬСОВ СЛУЧАЙНОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

Ф. М. ЗАВЬЯЛКИН, М. С. КВАСНИЦА

(Представлена научным семинаром научно-исследовательского института электронной интроскопии)

При контроле материалов и изделий с гетерогенной структурой или с шероховатой поверхностью возникает задача оценки вклада флуктуаций параметров объекта контроля в погрешность функционирования радиометрического изотопного прибора. Данная задача является, по существу, задачей определения дисперсии $D[Y(t)]$ и среднего $\overline{Y(t)}$ на выходе линейного фильтра при поступлении на его вход пуассоновского потока электрических импульсов, интенсивность которого описывается стационарной случайной функцией времени $\lambda(t)$. Предполагается, что среднее $\overline{\lambda(t)}=\lambda_0$ и корреляционная функция $B(\tau)=\sigma_\lambda^2 R(\tau)$ процесса $\lambda(t)$ известны.

В работе [1] данная задача решена при ограничениях неотрицательности $R(\tau)$ и малости флуктуаций процесса $\lambda(t)$. Данные ограничения позволили рассмотреть коррелированный поток импульсов на входе фильтра как суперпозицию независимых потоков более простой структуры и вычислить центральные моменты любого порядка процесса $Y(t)$.

Однако представляет практический интерес вычисление $\overline{Y(t)}$ и $D[Y(t)]$ как наиболее важных характеристик процесса $Y(t)$ при определении качества функционирования радиометрического прибора без наложения вышеуказанных ограничений. Процесс

$$Y(t) = \sum_{j=1}^{N} h(t - t_j) \, .$$

где $h(\tau)$ — реакция фильтра на отдельный импульс;

N — число импульсов, поступивших за интервал наблюдения $(0, T)$;

t_j — моменты появления импульсов.

Для решения данной задачи представим непрерывный процесс $\lambda(t)$ дискретным случайным процессом. На рис. 1 на примере произвольной выборочной функции процесса $\lambda(t)$ показаны данные представления и определены вводимые обозначения. При $n \to \infty$ и $\Delta \to 0$ погрешность данного представления в пределе равна нулю.

В этом случае

$$\overline{Y}(t) \simeq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} h\left[\Delta(n+1) - \Delta i - \tau_{ij}\right] , \qquad (1)$$

где m_i — число импульсов, поступивших на i временном интервале;

τ_{ij} — моменты появления импульсов на i интервале.

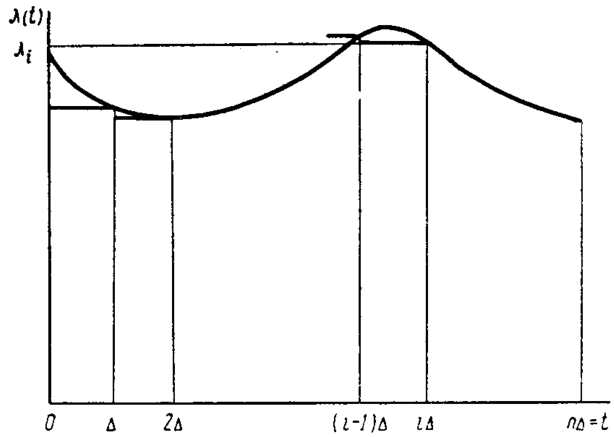

Рис. 1. Представление случайного процесса $\lambda(t)$.

$$\overline{Y(t)} \simeq \sum_{i=1}^{n} \ll \sum_{j=1}^{m_i} h\,[\Delta(n+1-i)-\tau_{ij}] >_{\tau_{ij}} >_{m_i} \cdot$$

где символ $<\cdot>_x$ означает усреднение по аргументу x.

Учитывая, что τ_{ij} — упорядоченные наблюдения из равномерного распределения на интервале Δ, а $\overline{m}_i = \lambda_i \Delta$,

$$\overline{Y(t)} \simeq < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int\limits_{\Delta(n-i)}^{\Delta(n-i+1)} h(\tau)\,d\tau >_\lambda . \tag{2}$$

Выражение (2) при $n \to \infty$, $\Delta \to 0$ имеет в качестве своего предела следующую зависимость:

$$\overline{Y(t)} = \overline{\int\limits_0^t \lambda(u)\,h(t-u)\,du}$$

или

$$\overline{Y(t)} = \lambda_0 \int\limits_0^t h(\tau)\,d\tau\ . \tag{3}$$

Следовательно, стационарные флуктуации интенсивности потока не приводят к смещению результатов измерения характеристики изделия

$$\overline{Y^2(t)} \simeq \sum_{i=1}^{n} \ll \sum_{j=1}^{m_i} h^2\,[\Delta(n+1-i)-\tau_{ij}] \rangle_{\tau_{ij}} \rangle_{m_i} +$$

$$+2 \sum_{i=1}^{n} \ll \sum_{\substack{k,\,j=1\\ k\neq j}}^{m_i} h\,[\Delta(n+1-i)-\tau_{ij}]\, h\,[\Delta(n+1-i)-\tau_{ik}] \rangle_\tau \rangle_{m_i} +$$

$$+2 \sum_{\substack{i,\,f=1\\ i\neq j}}^{n} \left\{ \ll \sum_{j=1}^{m_i} h\,[\Delta(n+1-i)-\tau_{ij}] \rangle_{\tau_{ij}} \rangle_{m_i} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \ll \sum_{j=1}^{m_f} h\,[\Delta(n+1-f)-\tau_{ij}] \rangle_{\tau_{fj}} \rangle_{m_{fj}} \right\} . \tag{4}$$

Обозначим через I_1, I_2, I_3 группы слагаемых выражения (4) соответственно.

$$I_1 = \overline{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int\limits_{\Delta(n-i)}^{\Delta(n-i+1)} h^2(\tau)\,d\tau}\ ,$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta\to 0}} I_1 = \overline{\int_0^t \lambda(u)\, h^2(t-u)\, du} = \lambda_0 \int_0^t h^2(\tau)\, d\tau \,. \tag{5}$$

$$I_2 = 2 \sum_{i=1}^{n} \left\langle \sum_{i=1}^{m_i} \frac{1}{\Delta^2} \left[\int_{\Delta(n-i)}^{\Delta(n-i+1)} h(\tau)\, d\tau \right]^2 \right\rangle_{m_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Delta^2 \{h[\Delta(n-i+1)]\}^2 ,$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta\to 0}} I_2 = \overline{\int_0^t \lambda^2(u)\, [h(t-u)]^2\, du} = \overline{Y(t)}^2 + \sigma^2{}_\lambda \left[\int_0^t h(\tau)\, d\tau \right]^2 . \tag{6}$$

$$I_3 = 2 \left\langle \sum_{\substack{f,i=1 \\ i\neq f}}^{n} \left[\lambda_i \int_{\Delta(n-i)}^{\Delta(n+1-i)} h(\tau)\, d\tau \right] \left[\lambda_f \int_{\Delta(n-f)}^{\Delta(n-f+1)} h(\tau)\, d\tau \right] \right\rangle , \tag{7}$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta\to 0}} I_3 = -\sigma^2{}_\lambda \left[\int_0^t h(\tau)\, d\tau \right]^2 + \sigma_\lambda{}^2 \int_0^t \int_0^t R(\tau-\theta)\, h(\theta) h(\tau)\, d\tau\, d\theta .$$

Окончательно получим

$$D[Y(t)] = \lambda_0 \int_0^t h^2(\tau)\, d\tau + \sigma_\lambda{}^2 \int_0^t \int_0^t R(\theta-\tau)\, h\tau h(\theta)\, d\tau\, d\theta . \tag{8}$$

Рассмотрим некоторые асимптотические выражения для вычисления $D[Y(t)]$.

1. Пусть скорость контроля сколь угодно мала. В этом случае

$$B(\tau) \simeq \sigma_\lambda{}^2 .$$

Тогда из выражений (5—7)

$$D[Y(t)] = \lambda_0 \int_0^t h^2(\tau)\, d\tau + \sigma_\lambda{}^2 \left[\int_0^t h(\tau)\, d\tau \right]^2 . \tag{9}$$

2. Пусть скорость контроля сколь угодно большая величина. В данном случае

$$R(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau = 0 \\ 0, & \tau \neq 0 \end{cases},$$

то есть λ_i и λ_f представляют собой некоррелированные случайные величины. Также из выражений (5÷7)

$$D[Y(t)] = \lambda_0 \int_0^t h^2(\tau)\, d\tau .$$

Выражение (8) можно обобщить на случай независимых флуктуаций амплитуд импульсов на входе фильтра, усреднив выражение (4) по амплитудам импульсов. Окончательно получим

$$D[Y(t)] = \lambda_0 (1 + \delta_0{}^2) \int_0^t h^2(\tau)\, d\tau + \sigma_\lambda{}^2 \int_0^t \int_0^t R(\tau-\theta)\, h(\theta)\, h(\tau)\, d\tau\, d\theta . \tag{10}$$

где $\delta_0{}^2$ — относительные флуктуации амплитуд A импульсов

$(\delta_0{}^2 = D[A]/\bar{A}^2)$;

$h(\tau)$ — реакция фильтра на импульс со средней амплитудой.

Полученные выражения (8÷10) могут быть использованы при разработке радиометрических приборов (дефектоскопов, плотномеров и др.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. М. Завьялкин, М. С. Квасница. Дефектоскопия, 1973, № 6, 17.