

К РАСЧЕТУ НЕЛИНЕЙНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПАЗУ СТАТОРА УДАРНОГО ГЕНЕРАТОРА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

В. С. БАКЛИН

(Представлена научным семинаром кафедр электрических машин и общей электротехники)

На протекание сверхпереходных режимов в ударном генераторе, вызванных внезапным коротким замыканием, существенное влияние оказывают индуктивности рассеяния контуров ротора и статора. Индуктивности рассеяния, рассчитанные без учета насыщения, существенно отличаются от экспериментальных, полученных из опыта внезапного короткого замыкания при больших кратностях тока [5]. Благодаря особой конструкции ударных генераторов, а именно, наличию немагнитных роторных бандажей, экранированию лобовых частей обмотки статора экранами из материала с большой электропроводимостью можно считать, что индуктивности рассеяния лобовых частей контуров ротора и статора не зависят от насыщения. Основное влияние оказывает насыщение на индуктивность пазового рассеяния, так как поперечно-пазовые потоки рассеяния встречают на своем пути стальные участки зубцов статора и ротора. Рассмотрим методику расчета нелинейного магнитного поля в пазу статора.

Активная длина железа ударного генератора предполагается достаточной для того, чтобы пренебречь концевыми эффектами и считать, что изменение параметров поля вдоль оси z (продольная ось машины) отсутствует. Это дает возможность рассматривать поле рассеяния в пазу в двухмерном пространстве, считая, что вектор плотности тока δ направлен вдоль оси машины.

На рис. 1 показано сечение симметричного открытого паза. Если не рассматривать потоки рассеяния на границах фазных зон, считая, что число пазов на полюс и фазу « q » достаточно велико, то картина поля будет периодически повторяться в направлении оси x в каждом зубцовом делении.

Так как рассматриваются открытые симметричные пазы, то в качестве линий, ограничивающих исследуемую область, принимаем: ось симметрии паза РЕ, ось симметрии зубца СД, середину воздушного зазора ЕС и линию РД, ограничивающую дно паза. Для задания граничных условий необходимо установить направление силовых линий магнитного поля вдоль границ. Силовые линии магнитного поля на границах РЕ и СД будут иметь только одну нормальную составляющую, так как РЕ и СД — линии симметрии. Магнитная проницаемость ярма, по сравнению с магнитной проницаемостью зубцов, принята равной бесконечности. Следовательно, силовые линии магнитного поля должны быть перпендикулярны к граничной линии РД.

При идеальном коротком замыкании потоком взаимной индукции меж-

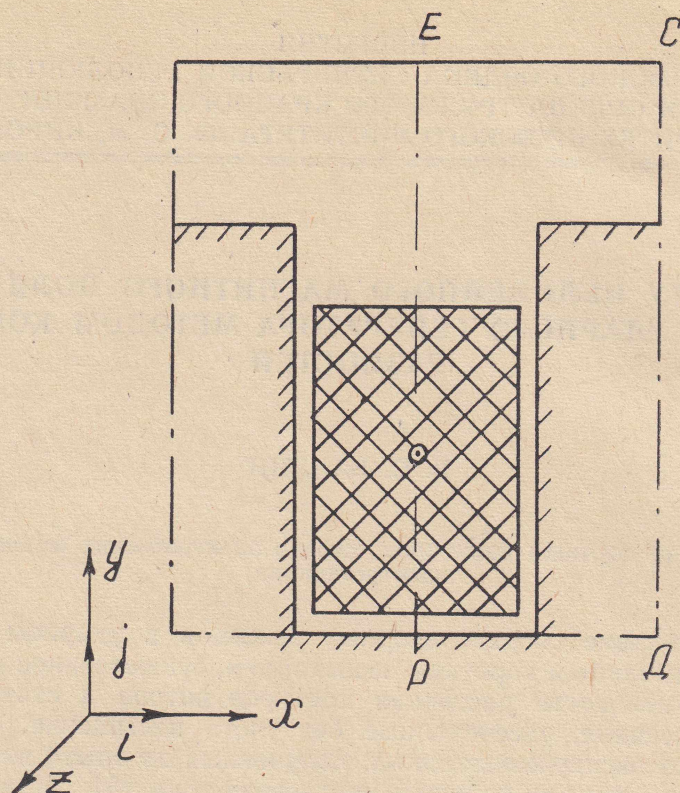


Рис. 1. К расчету магнитного поля в пазу

ду контурами ротора и статора можно пренебречь и считать поля рассеяния статора и ротора не связанными друг с другом. При равенстве м. д. с. контуров статора и ротора потоки рассеяния каждого из них доходят приблизительно до середины воздушного зазора (до линии ЕС и не пересекают ее). Считаем линию ЕС линией нулевого потенциала. Стержни в пазу статора ударного генератора, за редким исключением, состоят из элементарных проводников, транспонированных между собой, следовательно, влиянием вихревых токов можно пренебречь. Явлением гистерезиса в зубце пренебрегаем, считая, что кривая намагничивания стали определена однозначно.

Для расчета нелинейного магнитного поля в пазу воспользуемся методом конечных разностей, который относится к классу численных методов. Сущность этого метода заключается в аппроксимации уравнения поля системой конечно-разностных уравнений, а расчет магнитного поля сводится к решению этой системы. Общие вопросы метода конечных разностей изложены в [1, 2], а применительно к расчету нелинейных магнитных полей в электрических машинах в [4, 7, 8, 9].

Уравнения в конечных разностях можно получить, воспользовавшись законом полного тока в интегральной или дифференциальной форме [4]. Если в исследуемой области имеются границы раздела сред, где магнитная проницаемость μ и плотность тока δ меняются скачкообразно, то необходимо воспользоваться законом полного тока в интегральной форме, который удобно свести к виду, содержащему в качестве неизвестной функции векторный потенциал магнитного поля A .

$$\oint \frac{1}{\mu} \text{rot} \bar{A} \cdot d\bar{l} = \int_s \bar{\delta} \cdot d\bar{s}. \quad (1)$$

Расчетное уравнение для векторного потенциала, полученное на основе

выражения (1) в результате обхода по контуру 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1, рис. 2, для каждого внутреннего узла сетки i, k имеет вид

$$A_{i, k} = \frac{1}{M_{i, k}} (N_{i, k} \cdot A_{i, k+1} + S_{i, k} \cdot A_{i, k-1} + O_{i, k} \cdot A_{i+1, k} + \\ + W_{i, k} \cdot A_{i-1, k} + D_{i, k}); \quad (2)$$

$$M_{i, k} = N_{i, k} + S_{i, k} + O_{i, k} + W_{i, k}; \quad (3)$$

$$N_{i, k} = \frac{1}{2 \cdot q_k} \cdot \left(\frac{\rho_i}{\mu_{i, k}} + \frac{\rho_{i-1}}{\mu_{i-1, k}} \right), \quad S_{i, k} = N_{i, k-1}; \quad (4)$$

$$O_{i, k} = \frac{1}{2 \cdot \rho_i} \cdot \left(\frac{q_k}{\mu_{i, k}} + \frac{q_{k-1}}{\mu_{i, k-1}} \right), \quad W_{i, k} = O_{i-1, k}; \quad (5)$$

$$D_{i, k} = \int \bar{\delta} \cdot ds = \frac{1}{4} (\delta_{i, k} \cdot \rho_i \cdot q_k + \delta_{i-1, k} \cdot \rho_{i-1} \cdot q_k + \delta_{i-1, k-1} \times \\ \times \rho_{i-1} \cdot q_{k-1} + \delta_{i, k-1} \cdot \rho_i \cdot q_{k-1}), \quad (6)$$

где ρ_i, q_k — размеры ячеек сетки,

$\mu_{i, k}, \delta_{i, k}$ — магнитная проницаемость и плотность тока в ячейках сетки,

$A_{i, k}$ — значения векторного потенциала в узлах сетки.

Значение плотности тока δ и магнитной проницаемости μ в пределах каждой ячейки сетки предполагается неизменным. Для этого необходимо, чтобы линии сетки совпадали с границей раздела сред, где магнитная проницаемость и плотность тока меняется скачкообразно.

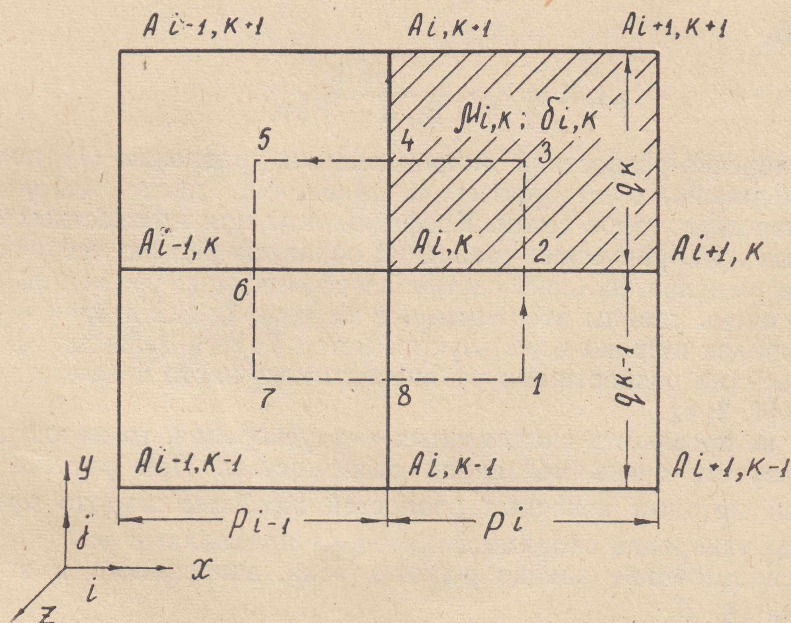


Рис. 2. Расположение расчетных величин и их обозначения на прямоугольной сетке

При расчете нелинейных магнитных полей необходимо знать модуль вектора магнитной индукции, который может быть найден следующим образом:

$$B_{x, i, k} = \frac{1}{2 \cdot q_k} \cdot (A_{i, k+1} + A_{i+1, k+1} - A_{i, k-1} - A_{i+1, k-1}); \quad (7)$$

$$B_{yi, k} = -\frac{1}{2 \cdot \rho_i} \cdot (A_{i, k+1} + A_{i, k} - A_{i+1, k+1} - A_{i+1, k}); \quad (8)$$

$$B_{i, k} = \sqrt{B_x^2 i, k + B_y^2 i, k}. \quad (9)$$

Модуль вектора магнитной индукции $B_{i, k}$ в центре ячейки используется для определения магнитной проницаемости $\mu_{i, k}$ по кривой намагничивания железа.

При расчете магнитных полей с учетом насыщения возникает необходимость в аппроксимации кривой намагничивания железа. В виду сложной зависимости $B=f(H)$ практически не представляется возможным аппроксимировать всю кривую намагничивания железа одним простым аналитическим выражением. Чаще всего применяют кусочную аппроксимацию, где каждый участок кривой намагничивания может быть аппроксимирован простыми алгебраическими или трансцендентными функциями. Если количество участков велико, то можно воспользоваться методом кусочно-линейной аппроксимации [10], который достаточно просто реализуется с помощью вычислительных машин. Вся кривая намагничивания до полного насыщения (до индукции B_s) разбивается на участки с шагом ΔB . Магнитная проницаемость железа при $B < B_s$ определяется по выражению

$$\mu_{i, k} = \frac{B_{i, k}}{(B_{i, k} - B_j) \cdot m_j + H_j}, \quad (10)$$

где $m_j = \frac{H_{j+1} - H_j}{\Delta B}$ — для каждого участка j ,

причем номер участка $j = \frac{B_{i, k}}{\Delta B} + 1$.

При $B \geq B_s$

$$\mu_{i, k} = \mu_0 \cdot \frac{B_{i, k}}{B_{i, k} - B_{kp}}. \quad (11)$$

При конечно-разностной аппроксимации уравнения (1) получается система нелинейных алгебраических уравнений, число которых равно числу внутренних узлов сетки. Коэффициенты при неизвестных системы нелинейных алгебраических уравнений образуют редкую ленточную матрицу. Для решения больших систем алгебраических уравнений с редкой матрицей очень удобны итерационные методы. Среди итерационных методов наиболее широко используется метод Гаусса-Зейделя. В связи с эллиптическими разностными уравнениями его часто называют методом Либмана [1, 2, 8].

Если не применять специальных мер ускорения, то метод итераций характеризуется очень медленной сходимостью. При расчете магнитных полей методом конечных разностей наиболее широко применяют два метода ускорения сходимости, которые предполагают:

1) использование закона полного тока, записанного в интегральной форме [8, 9];

2) использование неполной верхней релаксации [1, 2, 3].

В первом случае закон полного тока, записанный в интегральной форме.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int \vec{j} \cdot d\vec{s} \quad (12)$$

применяется как средство контроля и ускорения сходимости. После первых итераций уравнение (12) обычно выполняется неточно.

$$C = \frac{\int_s \bar{\delta} \cdot d\bar{s}}{\oint \bar{H} \cdot d\bar{l}} \neq 1. \quad (13)$$

Если контур интегрирования G положить таким образом, чтобы он совпадал с какой-либо линией поля, где $A_G = \text{const}$, то коэффициент «С» можно использовать для ускорения сходимости итерационного процесса. При расчете контурного интеграла $\oint \bar{H} \cdot d\bar{l}$ определяется величина минимального потенциала $A_{\min}$ вдоль контура интегрирования. Затем все потенциалы с $|A| > |A_{\min}|$ корректируются по следующему правилу:

$$A' = (A - A_{\min}) \cdot C + A_{\min}. \quad (14)$$

Если представляется возможным, то путь интегрирования выбирают таким образом, чтобы $A_{\min} = 0$, что зачастую определяется граничными условиями. В этом случае выражение (14) принимает вид

$$A' = A \cdot C, \quad (15)$$

где A' — исправленное значение векторного потенциала.

Кроме коэффициента «С», для ускорения сходимости используют также величину векторного потенциала ΔA , полученную из выражения

$$\Delta A = \frac{\int_s \bar{\delta} \cdot d\bar{s} - \oint \bar{H} \cdot d\bar{l}}{L}. \quad (16)$$

В случае прямоугольных ячеек сетки значения L , $\oint \bar{H} \cdot d\bar{l}$ и $\int_s \bar{\delta} \cdot d\bar{s}$ можно определить следующим образом:

$$L = \sum_{G_x} \frac{p_i}{q_k \cdot \mu_{i,k}} + \sum_{G_y} \frac{q_k}{p_i \cdot \mu_{i,k}}; \quad (17)$$

$$\int_s \bar{\delta} \cdot d\bar{s} = I = \sum \delta_{i,k} \cdot p_i \cdot q_k; \quad (18)$$

$$\oint \bar{H} \cdot d\bar{l} = \sum_{G_x} \left(\frac{A_{i,k+1} + A_{i+1,k+1} - A_{i,k} - A_{i+1,k}}{2 \cdot q_k \cdot \mu_{i,k}} \right) \cdot (\pm p_i) + \\ + \sum_{G_y} \left(\frac{A_{i,k} + A_{i,k+1} - A_{i+1,k} - A_{i+1,k+1}}{2 \cdot p_i \cdot \mu_{i,k}} \right) \cdot (\pm q_k). \quad (19)$$

В выражении (19) знак (+) ставится в том случае, если путь интегрирования совпадает с направлением единичных векторов i, j (рис. 1). Корректировка векторного потенциала в пределах пути интегрирования для выражения (16) производится по формуле

$$A' = A + \Delta A. \quad (20)$$

Сущность метода ускорения сходимости, использующего неполную верхнюю релаксацию, заключается в способе подавления ошибки «г» при неизвестных

$$r = A_{i,k}^n - A_{i,k}^{(n-1)}, \quad (21)$$

где n — порядковый номер итерации.

В зависимости от способа подавления ошибки «г», релаксация может быть полной и неполной. Вид релаксации определяется значением коэффициента ω в выражении

$$A_{i,k}^{(n+1)} = A_{i,k}^{(n-1)} \cdot (1 - \omega) + \omega A_{i,k}^n, \quad (22)$$

где $A_{i,k}^n$ — определяется по уравнению

$$A_{i,k}^n = \frac{1}{M_{i,k}} \cdot (N_{i,k} \cdot A_{i,k+1}^n + S_{i,k} \cdot A_{i,k-1}^{n+1} + W_{i,k} \cdot A_{i-1,k}^{(n+1)} + O_{i,k} \cdot A_{i+1,k}^n + D_{i,k}), \quad (23)$$

если используется метод Гаусса-Зейделя. Согласно [3], если $\omega = 1$, то имеет место полная минимизация функции ошибки «г» или полная верхняя релаксация. Неполная релаксация называется нижней, если $0 < \omega < 1$ и верхней — если $1 < \omega < 2$. Для решения системы конечно-разностных уравнений методом Гаусса-Зейделя выгодно применять неполную верхнюю релаксацию, что связано с тридиагональным представлением матрицы коэффициентов векторных потенциалов, обладающей свойством А [2]. Скорость сходимости процесса итераций в сильной степени зависит от близости значения коэффициента неполной верхней релаксации к оптимальному. Если исследуемая область имеет сложные конфигурации границ, то аналитических методов определения оптимального значения коэффициента неполной верхней релаксации не существует и его значение устанавливают опытным путем.

Иногда в ходе расчета применяют автоматическую оптимизацию коэффициента ω [4, 7]. Для этого, кроме проведения вспомогательных расчетов, необходимо хранить значения векторных потенциалов трех следующих друг за другом итераций, что существенно перегружает оперативную память ЭВМ.

Чтобы процесс итераций протекал устойчиво, в нелинейных задачах обычно производится корректировка магнитной проницаемости.

$$\mu_{i,k}^{(n+1)} = \mu_{i,k}^n \cdot (1 - \alpha) + \alpha \cdot \mu_{i,k}, \quad (24)$$

где $\mu_{i,k}$ — определяется по выражению (11) или (12).

В каждом конкретном случае значения коэффициента α устанавливаются экспериментально. Согласно [7, 8] процесс итераций протекает устойчиво, если $\alpha \leq 0,1$. В [9] коэффициент α изменяется в пределах $0,25 \div 0,0625$.

Для расчета магнитного поля исследуемая область покрывается сеткой, которая, в целях экономии оперативной памяти ЭВМ, выполняется часто неравномерной.

На рис. 3 показана область зубцового деления, покрытая сеткой. Сетка имеет 378 расчетных узлов. Размеры паза и зубца следующие:

- 1) ширина паза $b_n = 5$ см;
- 2) ширина зубца $b_z = 5$ см;
- 3) высота паза $h_n = 10$ см;
- 4) высота клина вместе с изоляцией $h_k = 2$ см;
- 5) величина воздушного зазора до линии ЕС — 1,5 см.

Статор выполнен из электротехнической стали Э41, для которой принято $B_{кр} = 1,914$ Тл; $\Delta B = 0,1$ Тл; $B_s = 2,1$ Тл. При индукциях $B \leq 0,1$ Тл магнитная проницаемость стали принята равной $0,157 \cdot 10^{-3}$ Гн/м.

По выражению (23) рассчитываются только величины векторных потенциалов внутренних ячеек сетки, но не на границе исследуемой области. Для расчета векторных потенциалов в узлах сетки, лежащих на границе исследуемой области, необходимо выполнить граничные условия на линиях РЕ, СД, ЕС, РД. Выполнение граничных условий на линиях РЕ, СД, РД обеспечивается введением искусственных границ, которыми согласно рис. 3 являются линии сетки o, k — для РЕ, $15, k$ — для СД и i, o — для РД. После каждой итерации векторные потенциалы на искусственных границах принимают значения

$$A_{0,k} = A_{2,k}; \quad A_{15,k} = A_{13,k}; \quad A_{i,0} = A_{i,2}.$$

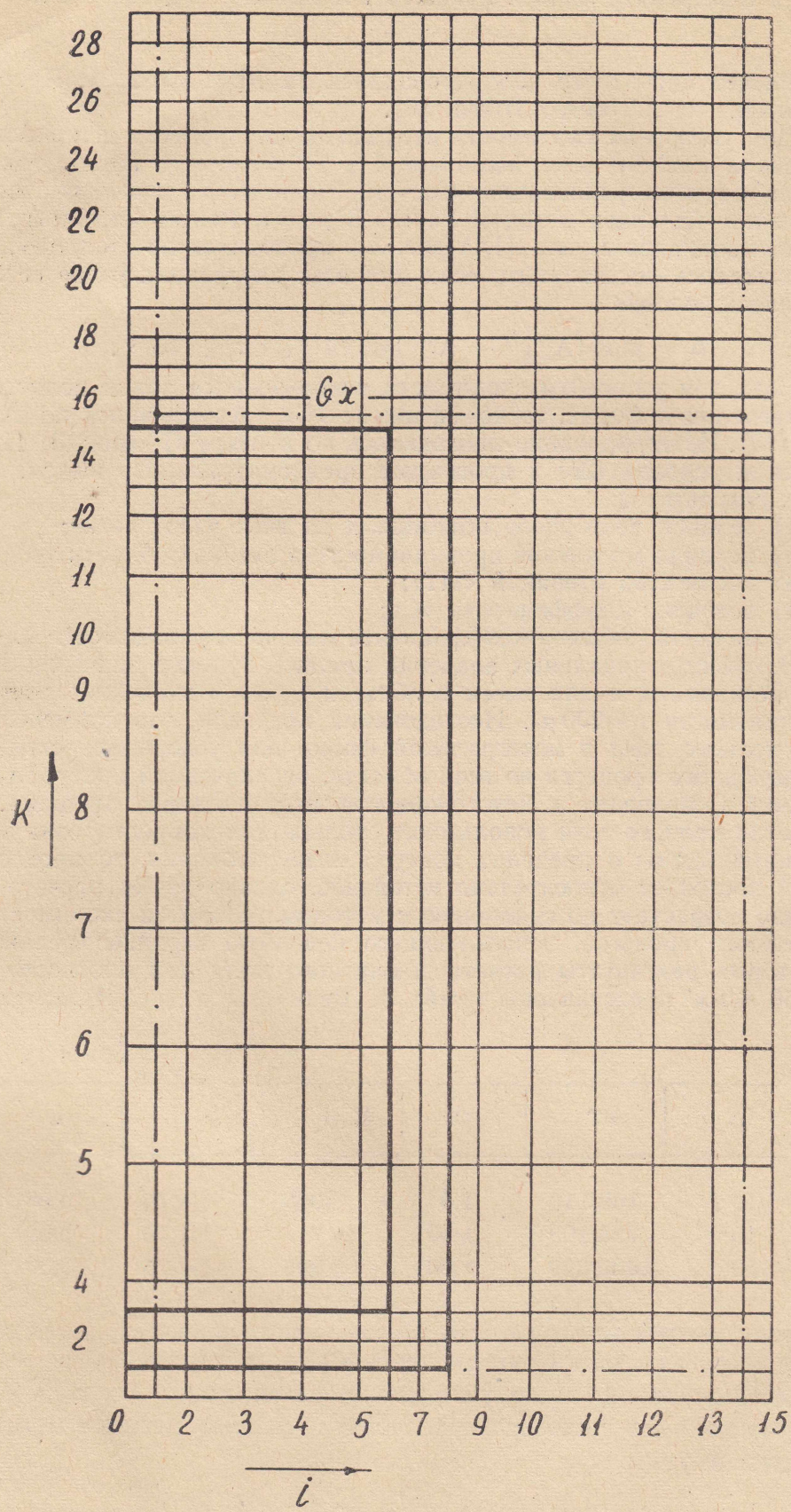


Рис. 3. Исследуемая область, разбитая на ячейки прямоугольной сеткой

Линия ЕС принята линией нулевого потенциала, следовательно

$$A_{ec} = A_{i, 29} = 0.$$

Расчет магнитного поля проводился на ЭВМ «М-222». Программа составлена на АЛЬФА-ЯЗЫКЕ [6].

Для ускорения сходимости итерационного процесса использовались как закон полного тока, записанный в интегральной форме, так и неполная верхняя релаксация. Система нелинейных конечноразностных уравнений решалась методом Гаусса-Зейделя. Расчет векторных потенциалов начинался с узла (1,1) рис. 3 и проводился по столбцам. Решение считалось достигнутым, если для всех внутренних узлов сетки выполнялось условие

$$\Delta = \text{mod} (A_{i, k}^{(n+1)} - A_{i, k}^n) \leq 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}. \quad (25)$$

Если для ускорения сходимости использовался закон полного тока в интегральной форме, то коэффициент «С» рассчитывался по выражению (13). Интегрирование проводилось по контуру G_x (рис. 3) При выполнении условия (25) в программе предусматривалась выдача следующих результатов:

- 1) величин векторного потенциала во всех узлах сетки;
- 2) величин магнитной проницаемости в ячейках области зубца;
- 3) количество итераций «ИТ»;
- 4) величина коэффициента «С»;
- 5) величина общего коэффициента плазовой проводимости $\lambda_{\text{общ}}$.

В качестве начальных значений брались нулевые значения векторного потенциала и для ячеек в области зубца — значения магнитной проницаемости $\mu = 200 \mu_0$. Исследования показали, что применение закона полного тока в интегральной форме для ускорения сходимости итерационного процесса во всей области, ограниченной контуром интегрирования, приводит к неустойчивости итерационного процесса. Если же закон полного тока использовать только для корректировки векторных потенциалов в пределах контура интегрирования, то процесс итераций протекает относительно устойчиво, однако время расчета существенно возрастает по сравнению с методом ускорения сходимости итерационного процесса, использующего неполную верхнюю релаксацию. Некоторые результаты расчета магнитного поля для плотности тока $\delta = 150 \text{ А/мм}^2$ представлены в табл. 1. Величины в числителе относятся

Таблица 1

Δ	ИТ	С	$\lambda_{\text{общ}}$	ω	α
10^{-3}	168/110	1,3	0,668	1/1,75	0,08
10^{-4}	734/160	1,03	0,7	1/1,75	0,08
10^{-5}	1400/329	1,001	0,705	1/1,75	0,08

к методу ускорения сходимости итерационного процесса, использующего закон полного тока в интегральной форме, а в знаменателе — к методу, использующему неполную верхнюю релаксацию. Согласно табл. 1, с приемлемой для инженерных расчетов точностью, решение можно считать достигнутым, если

$$\Delta = \text{mod} (A_{i, k}^{(n+1)} - A_{i, k}^n) \leq 10^{-5}$$

или

$$\text{mod}(1-C) \leq 10^{-3}.$$

При этом, около 50% машинного времени тратится для уменьшения модуля ошибки «г» от 10^{-4} до 10^{-5} . С точки зрения затрат машинного времени, наиболее выгодным в данном случае является использование неполной верхней релаксации. Медленную сходимость итерационного процесса, если используется закон полного тока в интегральной форме, можно объяснить тем, что коэффициент «С» быстро стремится к единице и на последних этапах, где модуль «г» уменьшается от 10^{-3} до 10^{-5} и тратится основное машинное время, не оказывает существенного влияния на скорость сходимости итерационного процесса. На решение данной задачи с использованием неполной верхней релаксации потребовалось 22 минуты машинного времени, причем из них около 10 минут приходится на трансляцию программы. Стремление уменьшить время расчета привело к выбору для этой же исследуемой области сетки со 198 внутренними узлами. Сравнение результатов расчета общего коэффициента лавовой проводимости $\lambda_{\text{общ}}$ для двух сеток представлено в табл. 2, где данные под номером 1 относятся к сетке с 378 узлами, а данные под номером 2 соответствуют сетке со 198 узлами. Для обеих сеток $\omega=1,75$; $\alpha=0,08$. Различие в результатах расчета $\lambda_{\text{общ}}$ не превышает 5%, в то время как затраты машинного времени составили для сетки с 378 узлами для всех плотностей тока δ , представленных в табл. 2, око-

Таблица 2

№ п.п.	δ А/мм ²	10	25	50	75	100	125	150
1	$\lambda_{\text{общ}}$	1,06	1,05	0,89	0,8	0,75	0,72	0,705
2	$\lambda_{\text{общ}}$	1,11	1,09	0,92	0,83	0,78	0,75	0,73

ло 90 минут, а для сетки со 198 узлами — 22 минуты. Для сетки со 198 внутренними узлами исследовалось влияние величины коэффициента неполной верхней релаксации на скорость сходимости итерационного процесса. Было замечено, что оптимальная величина коэффициента неполной верхней релаксации, при которой достигается максимальная скорость сходимости итерационного процесса, зависит от соотношения областей, занятых железом и свободных от железа, от степени насыщения железа, от корректировки коэффициента « α », от геометрических размеров ячеек сетки и т. д. Так, например, уменьшая область, занятую железом, можно несколько увеличить величину коэффициента неполной верхней релаксации. Это наглядно видно из табл. 3 и 4. Использование коэффициента неполной верхней релаксации $\omega=1,85$ вместо $\omega=1,75$ и корректировка коэффициента « α » в ходе итераций уменьшают затраты машинного времени на 30%. При этом ширина зубца $b_z=2,5$ см. Аналогичные исследования для $b_z=10$ см показали, что процесс инерции при $\omega=1,85$ расходится. Для сетки со 198 узлами исследовался также метод

Таблица 3

δ А/мм ²	Δ	α	ω	ИТ
10	10^{-4}	0,08	1,75	152
	10^{-5}			315
25	10^{-4}	0,08	1,75	174
	10^{-5}			312
50	10^{-4}	0,08	1,75	166
	10^{-5}			295

Таблица 4

$\delta A/\text{мм}^2$	Δ	α	ω	ИТ
10	10^{-4}	0,08	1,85	124
	10^{-5}	0,04		226
25	10^{-4}	0,08	1,85	134
	10^{-5}	0,04		220
50	10^{-4}	0,08	1,85	124
	10^{-5}	0,04		199

переменных направлений [2]. Явных преимуществ последнего метода по отношению к методу, использующему неполную верхнюю релаксацию, не наблюдалось, что, по-видимому, связано с относительно малым количеством узлов сетки, а также с нелинейностью задачи.

Выводы

Если нет необходимости в графическом построении картины магнитного поля, то вполне достаточно в исследуемой области, занимающей половину зубцового деления статора, ограничиться 198 внутренними узлами. При этом наиболее просто реализуется на ЭВМ метод итераций Гаусса-Зейделя с использованием неполной верхней релаксации.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Бинс, П. Лауренсон. Анализ и расчет электрических и магнитных полей. М., «Энергия», 1970.
2. В. Вазов, Дж. Форсайт. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., ИЛ., 1963.
3. Д. К. Фадеев, В. Н. Фадеева. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1963.
4. Я. А. Новик. Численные методы расчета магнитного поля электрических машин с учетом насыщения. В кн. «Бесконтактные электрические машины», 11, Рига, «Зинатне», 1972.
5. Л. Ф. Букреев, Н. В. Шилин. Влияние насыщения на индуктивные сопротивления ударных генераторов типа ТИ-100-2, «Электротехника», 1970, 11.
6. А. П. Ершов, Г. И. Кожухин, И. В. Поттосин. Руководство к пользованию системой АЛЬФА. Новосибирск, «Наука», Сибирское отделение, 1968.
7. K. Reichert. Ein numerisches Verfahren zur Berechnung magnetische Felder, insbesondere in Anordnungen mit Permanentmagneten. Arch. Elektrotech., 52, 1968, 3.
8. K. Reichert. Die Numerische Berechnung der Nutstreuung und der Wirbelströme Nutenleitern elektrischen Maschines. Arch. Elektrotech., 53, 1969, 2.
9. H. Braess, H. Weh, E. A. Erdelyi. Numerische Berechnung magnetischer Felder und Kräfte. Arch. Elektrotech., 52, 1969, 5.
10. Trederick C., Erdelyi E. A., Hopkins R. E. Representation of the Magnetization Characteristic of DC Machines for Computer Use. — IEE Trans. Power Apparatus and Systems, Pas-87, 1968, 3.