ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 125 1964

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ТЕЛЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ С ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

В. В. ИВАНОВ

(Представлена проф. докт. техн. наук Г. И. Фуксом)

В статье производится расчет температурного поля в теле эллиптического сечения с внутренним тепловыделением. Граничные условия заданы коэффициентом теплоотдачи h и температурой окружающей среды, равной нулю. Решение дано в эллиптических координатах.

Известно, что для лучшего охлаждения тепловыделяющих элементов (электрических проводников, стержней ядерных реакторов и т. п.) необходимо иметь большую поверхность теплоотдачи. Увеличение поверхности может быть достигнуто либо оребрением, либо заменой стержней круглого сечения, имеющих минимальную поверхность теплоотвода, стержнями других сечений, например, овальных или эллиптических.

Вопросам расчета температурных полей в телах эллиптического сечения при наличии внутренних источников тепла посвящены работы [1,2]. Однако полученные результаты нельзя считать окончательными из-за ряда допущений, принятых для упрощения исследования.

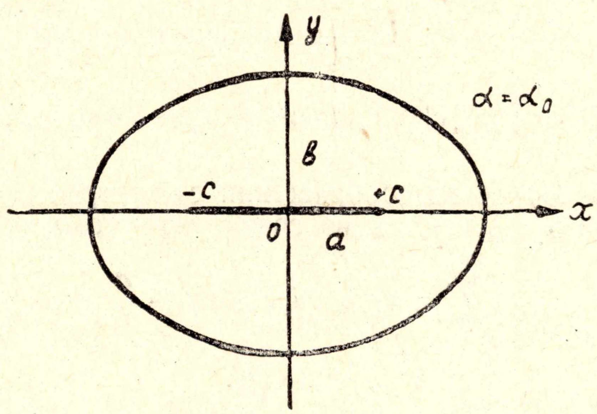

Рис. 1.

Будем искать распределение температуры в бесконечно длинном теле, сечение которого представляет собой эллипс с полуосями a и b (рис. 1). Рассматриваемое тело находится в среде с нулевой температурой. Внутри тела действует одинаковый по величине (на каждый $м^3$) источник тепла q_v, коэффициент теплопроводности (λ) и коэффициент теплоотдачи (h)—величины постоянные. Чтобы найти распределение температуры, необходимо решить уравнение Пуассона

$$\Delta T + \frac{q_v}{\lambda} = 0$$

с граничным условием—λ grad $T = hT$ на поверхности тела.

Для получения формулы, описывающей температурное поле, воспользуемся системой эллиптических координат α, β [3,4], $0 \leqslant \alpha < \infty$, $-\pi < \beta < \pi$. Если $\alpha = \alpha_0$—уравнение поверхности тела, то

$$a = c\,\mathrm{ch}\,\alpha_0, \quad b = c\,\mathrm{sh}\,\alpha_0, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Уравнение Пуассона в эллиптических координатах имеет вид

$$\frac{1}{c^2\,(\mathrm{ch}^2\alpha - \cos^2\beta)}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \beta^2}\right) + \frac{q_v}{\lambda} = 0, \tag{1}$$

а граничное условие дается зависимостью: при $\alpha = \alpha_0$

$$-\lambda\,\frac{1}{c\sqrt{\mathrm{ch}^2\,\alpha_0 - \cos^2\beta}} \cdot \frac{\partial T}{\partial \alpha} = hT. \tag{2}$$

Подстановка $\quad U\,(\alpha, \beta) = T(\alpha, \beta) + \dfrac{q_v c^2}{4\lambda}\,(\mathrm{sh}^2\alpha + \cos^2\beta)$

преобразует уравнение (1) в уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} = 0, \tag{3}$$

а граничное условие (2) примет вид при: $\alpha = \alpha_0$

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}^2\,\alpha_0 - \cos^2\beta}}\left(\frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{q_v}{4\lambda}c^2\,\mathrm{sh}\,2\alpha_0\right) = Bi\left[\frac{q_v}{4\lambda}c^2 \times \right.$$
$$\left. \times\,(\mathrm{sh}^2\,\alpha_0 + \cos^2\beta) - U\right], \quad Bi = \frac{hc}{\lambda}. \tag{4}$$

Решение уравнения (3) дается зависимостью [3]

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\,\mathrm{ch}\,n\,\alpha \cos n\,\beta + B_n\,\mathrm{sh}\,n\,\alpha \sin n\,\beta,$$

причем в нашем случае из соображений симметрии следует положить $B_n = 0$. Постоянные A_n найдем из граничного условия (4)

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}^2\alpha_0 - \cos^2\beta}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} nA_n\,\mathrm{sh}\,n\,\alpha_0 \cos n\,\beta - \frac{q_v}{4\lambda}c^2\,\mathrm{sh}\,2\alpha_0\right) =$$
$$= Bi\left[\frac{q_v}{4\lambda}c^2\,(\mathrm{sh}^2\alpha_0 + \cos^2\beta) - \sum_{n=0}^{\infty} A_n\,\mathrm{ch}\,n\,\alpha_0 \cos n\beta\right]. \tag{5}$$

Функция $f(\beta) = \sqrt{\mathrm{ch}^2\,\alpha_0 - \cos^2\beta}$ — четная относительно β, разлагаем ее в ряд по косинусам

$$\sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha_0-\cos^2\beta}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\beta,$$

где

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha_0-\cos^2\beta}\cos n\beta\,d\beta.$$

Так как $\cos n\beta=\cos^n\beta-C_n^2\cos^{n-2}\beta\sin^2\beta+C_n^4\cos^{n-4}\beta\sin^4\beta-\ldots$, то нетрудно показать, что все a_n с нечетным n обращаются в нуль.

Поэтому

$$\sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha_0-\cos^2\beta}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}\cos 2n\beta.$$

Переписывая (5) в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty}n A_n\operatorname{sh}n\alpha_0\cos n\beta-\frac{q_v}{4\lambda}c^2\operatorname{sh}2\alpha_0=Bi\frac{q_v}{4\lambda}c^2(\operatorname{sh}^2\alpha_0\sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha_0-\cos^2\beta}+$$

$$+\sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha_0-\cos^2\beta}\cos^2\beta)-Bi\frac{a_0}{2}\sum_{n=0}^{\infty}A_n\operatorname{ch}n\alpha_0\cos n\beta-$$

$$-Bi\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}\cos 2n\beta\sum_{n=0}^{\infty}A_n\operatorname{ch}n\alpha_0\cos n\beta$$

и интегрируя по β от 0 до π, получим

$$-\frac{q_v}{4\lambda}c^2\operatorname{sh}2\alpha_0\pi=Bi\frac{q_v}{4\lambda}c^2\left(\operatorname{sh}^2\alpha_0\int_0^{\pi}\sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha_0-\cos^2\beta}\,d\beta+\right.$$

$$\left.+\int_0^{\pi}\sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha_0-\cos^2\beta}\cos^2\beta\,d\beta\right)-Bi\frac{\pi}{2}(a_0A_0+\operatorname{ch}2n\alpha_0\,a_{2n}A_{2n}).$$

Откуда

$$A_{2n}=\left[\frac{q_v}{2\lambda}c^2\operatorname{sh}2\alpha_0\pi+Bi\frac{q_v}{2\lambda}c^2\left(\operatorname{sh}^2\alpha_0\int_0^{\pi}\sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha_0-\cos^2\beta}\,d\beta+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^{\pi}\sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha_0-\cos^2\beta}\cos^2\beta\,d\beta\right)\right]:Bi\,\pi\operatorname{ch}2n\alpha_0\,a_{2n},\quad n=0,\ 1,\ 2\ldots$$

Для вычисления интегралов в последней формуле используем подстановку $x=\pi/2-\beta$. Тогда

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha_0-\cos^2\beta}\,d\beta=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\operatorname{ch}\alpha_0\sqrt{1-\frac{\sin^2x}{\operatorname{ch}^2\alpha_0}}\,d(-x)=$$

$$=2\operatorname{ch}\alpha_0E\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha_0},\ \frac{\pi}{2}\right),$$

где E—полный эллиптический интеграл второго рода.

$$\int_0^{\pi}\sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha_0-\cos^2\beta}\cos^2\beta\, d\beta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{ch}\alpha_0\sqrt{1-\frac{\sin^2 x}{\operatorname{ch}^2\alpha_0}}\sin^2 x dx=$$

$$=2\operatorname{ch}\alpha_0\left[\frac{\operatorname{sh}^2\alpha_0}{3}F\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha_0},\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{2-\operatorname{ch}^2\alpha_0}{3}\right)E\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha_0},\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

где F—полный эллиптический интеграл первого рода [5].

Определим теперь a_{2n}

$$a_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha_0-\cos^2\beta}\left(\cos^{2n}\beta-C_{2n}^2\cos^{2n-2}\beta\sin^2\beta+\ldots\right)d\beta=\frac{4\operatorname{ch}\alpha_0}{\pi}\times$$

$$\times\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{\sin^2 x}{\operatorname{ch}^2\alpha_0}}\left(\sin^{2n}x-C_{2n}^2\sin^{2n-2}x\cos^2 x+\ldots\right)dx=$$

$$=\frac{2\operatorname{ch}\alpha_0}{\pi}\left[B\left(\frac{2n+1}{2},\frac{1}{2}\right)\times\right.$$

$$\times F_1\left(\frac{2n+1}{2},-\frac{1}{2},n+1;\frac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha_0}\right)-$$

$$\left.-C_{2n}^2 B\left(\frac{2n-1}{2},\frac{3}{2}\right)F_1\left(\frac{2n-1}{2},-\frac{1}{2},n+1,\frac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha_0}\right)+\ldots\right],$$

где $B(y,z)$—бэта-функция, $F_1(y,z,m;k)$—гипергеометрическая функция [5].

Окончательно искомое распределение температуры описывается уравнением

$$T(\alpha,\beta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n}\operatorname{ch}2n\alpha\cos 2n\beta-\frac{q_v}{4\lambda}c^2(\operatorname{sh}^2\alpha+\cos^2\beta),$$

в котором A_{2n} находится из соотношения

$$A_{2n}=\left\{\frac{q_v}{2\lambda}c^2\operatorname{sh}2\alpha_0\pi+Bi\frac{q_v}{\lambda}c^2\operatorname{ch}\alpha_0\left[\operatorname{sh}^2\alpha_0 E\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha_0},\frac{\pi}{2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\operatorname{sh}^2\alpha_0}{3}F\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha_0},\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{2-\operatorname{ch}^2\alpha_0}{3}\right)\mathrm{E}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha_0},\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}:$$

$$:Bi\,\pi\operatorname{ch}2n\alpha_0\, a_{2n}.$$

При $h\to\infty$ (это соответствует распределению температуры в стержне эллиптического сечения, когда его поверхность поддерживается при нулевой температуре) получаем решение, приведенное в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бойков Г. П. Температурные поля в телах конечных размеров при внутреннем тепловыделении. ИФЖ, № 5, 1959.

2. Бойков Г. П., Короленко Ю. А. Температурное поле в брусе эллиптического сечения при внутреннем тепловыделении. ИФЖ, № 12, 1960.

3. Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С. Сборник задач по математической физике. Гостехиздат, 1955.

4. Морс Ф. М. и Фешбах Г. Методы теоретической физики Т. II, ГИИЛ, 1960,

5. Градштейн И. С. и Рыжик. И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехиздат, 1962.