ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 131 1965

ВЫДЕЛЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ЧАСТИ ИНТЕГРАЛОВ ОТ БИНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена научным семинаром кафедр высшей математики и инженерно-вычислительной математики ТПИ)

В статье разбирается вопрос о выделении алгебраической части в интегралах от биномных дифференциалов. При этом используются некоторые соотношения для гипергеометрической функции $F(\alpha,\ 1;\gamma;\ z)$.

Известно, что функция

$$F(\alpha,\ 1;\ \gamma;\ z)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_\kappa}{(\gamma)_\kappa}z^\kappa,\quad \gamma\neq 0,-1,\dots;\ |z|<1, \tag{1}$$

где

$$(a)_\kappa=a(a+1)\dots(a+\kappa-1)=\frac{\Gamma(a+\kappa)}{\Gamma(a)},\ (a)_0=1, \tag{2}$$

выражается посредством интеграла ([1], стр. 308)

$$F(\alpha,\ 1;\ \gamma;\ z)=\frac{(\gamma-1)\,z^{1-\gamma}}{(1-z)^{\alpha-\gamma+1}}\int_0^z z^{\gamma-2}(1-z)^{\alpha-\gamma}dz,\ \gamma>1 \tag{3}$$

и удовлетворяет следующим соотношениям:

$$F(\alpha,\ 1;\ \gamma;\ z)=\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{(\alpha)_\kappa}{(\gamma)_\kappa}z^\kappa+\frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n}z^nF(\alpha+n,\ 1;\ \gamma+n;\ z), \tag{4}$$

$$F(\alpha,1;\ \gamma;\ z)=-(\gamma-1)\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{(\alpha)_\kappa}{(\alpha-\gamma+1)_{\kappa+1}}(1-z)^\kappa+$$

$$+\frac{(\alpha)_n}{(\alpha-\gamma+1)_n}(1-z)^n\ F(\alpha+n,\ 1;\ \gamma;\ z), \tag{5}$$

$$F(\alpha,1;\gamma;z)=\frac{1}{1-z}\sum_{\kappa=0}^{n-1}(-1)^\kappa\frac{(\gamma-\alpha)_\kappa}{(\gamma)_\kappa}\left(\frac{z}{1-z}\right)^\kappa+$$

$$+(-1)^n\frac{(\gamma-\alpha)_n}{(\gamma)_n}\left(\frac{z}{1-z}\right)^nF(\alpha,\ 1;\ \gamma+n;\ z). \tag{6}$$

Для доказательства равенств (5), (6) рассматриваются рекуррентные соотношения

$$F(\alpha,\ 1;\ \gamma;\ z) = -\frac{\gamma-1}{\alpha-\gamma+1} + \frac{\alpha}{\alpha-\gamma+1}(1-z)F(\alpha+1,\ 1;\ \gamma;\ z), \quad (7)$$

$$(1-z)F(\alpha,\ 1;\ \gamma;\ z) = 1 - \frac{\gamma-\alpha}{\gamma} z\ F(\alpha,\ 1;\ \gamma+1;\ z), \quad (8)$$

которые легко проверяются путем подстановки ряда (1) и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях z в левой и правой частях рассматриваемых равенств. Например, в равенстве (7) коэффициент при z^n следующий:

$$\frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} = \frac{\alpha}{\alpha-\gamma+1}\left[\frac{(\alpha+1)_n}{(\gamma)_n} - \frac{(\alpha+1)_{n-1}}{(\gamma)_{n-1}}\right] =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)_{n-1}\left[(\alpha+n)-(\gamma+n-1)\right]}{(\alpha-\gamma+1)\ (\gamma)_n} \equiv \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n}.$$

Равенства (4) и (8) доказываются аналогичным образом.

Равенство (5) при $n=1$ совпадает с соотношением (7). Предположим, что справедливо равенство (5), тогда, заменяя $F\ (\alpha+n,\ 1;\ \gamma;\ z)$ по формуле (7), получим:

$$F(\alpha,\ 1;\ \gamma;\ z) = -(\gamma-1)\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{(\alpha)_\kappa}{(\alpha-\gamma+1)_{\kappa-1}}(1-z)^\kappa +$$

$$+\frac{(\alpha)_n}{(\alpha-\gamma+1)_n}(1-z)^n\left[-\frac{\gamma-1}{\alpha-\gamma+n+1}+\right.$$

$$\left.\frac{\alpha+n}{\alpha-\gamma+n+1}(1-z)\ F(\alpha+n+1,\ 1;\ \gamma;\ z)\right] =$$

$$= -(\gamma-1)\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{(\alpha)_\kappa}{(\alpha-\gamma+1)_{\kappa+1}}(1-z)^\kappa +$$

$$+\frac{(\alpha)_{n+1}}{(\alpha-\gamma+1)_{n+1}}(1-z)^{n+1}\ F(\alpha+n+1,\ 1;\ \gamma;\ z),$$

чем подверждается равенство (5). Равенство (6) доказывается аналогично с помощью соотношения (8).

Если учесть то обстоятельство, что интеграл от биномного дифференциала (3) выражается посредством функции (1), которая к тому же удовлетворяет соотношениям (4) — (6), то последние применяются для выделения алгебраической части нижеследующих интегралов. Для формул (9) — (14) $n=0,\ 1,\ldots;\ m=0,\ 1,\ldots;\ r>0,\ \ 0\leqslant\theta<1$ $0\leqslant\varsigma<1$.

$$\int x^{r(1-\theta-\varsigma+n)-1}(a+bx^r)^{\varsigma-1+m}dx =$$

$$= \frac{1}{br}\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{(-1)^\kappa\ (1-\theta-\varsigma+n-\kappa)_\kappa}{(-\theta+n+m-\kappa)_{\kappa+1}}\cdot\frac{a^\kappa}{b^\kappa}\ \frac{x^{r(-\theta-\varsigma+n-\kappa)}}{(a+bx^r)^{-\varsigma-m}} +$$

$$+\frac{(-1)^n(1-\theta-\varsigma)_n}{ra^{-n}\ b^n}\sum_{\kappa=0}^{m-1}\frac{(\varsigma+m-\kappa)_\kappa}{(-\theta+m-\kappa)_{n+\kappa+1}}\cdot a^\kappa\cdot\frac{x^{r(1-\theta-\varsigma)}}{(a+b\ x^r)^{-\varsigma-m+\kappa+1}} +$$

$$+(-1)^n\frac{a^{n+m}}{b^n}\cdot\frac{(1-\theta-\varsigma)_n(\varsigma)_m}{(1-\theta)_{n+m}}\int x^{r(1-\theta-\varsigma)-1}\ (a+bx^r)^{\varsigma-1}d\ x. \quad (9)$$

$$\int x^{-r(-\theta+n+m)-1}(a+b\,x^r)^{\varsigma+m-1}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{ar}\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{(-1)^\kappa(1-\theta-\varsigma+n-\kappa)_\kappa}{(-\theta+n+m-\kappa)_{\kappa+1}}\cdot\frac{b^\kappa}{a^\kappa}\cdot\frac{(a+bx^r)^{\varsigma+m}}{x^{r(-\theta+m+n-\kappa)}}-$$

$$-\frac{(-1)^n(1-\theta-\varsigma)_n}{a^n b^{-n} r}\sum_{\kappa=0}^{m-1}\frac{(\varsigma+m-\kappa)_\kappa}{(-\theta+m-\kappa)_{n+\kappa+1}}\,b^\kappa\frac{(a+bx^r)^{\varsigma+m-\kappa-1}}{x^{r(-\theta+m-\kappa)}}+$$

$$+(-1)^n\frac{b^{n+m}}{a^n}\,\frac{(1-\theta-\varsigma)(\varsigma)_m}{(1-\theta)_{n+m}}\int x^{r\theta-1}(a+bx^r)^{\varsigma-1}dx. \qquad (10)$$

$$\int x^{r(\varsigma+m)-\kappa}(a+bx^r)^{\theta-n-m-1}\,dx=$$

$$=\frac{1}{ar}\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{(1-\theta-\varsigma+n-\kappa)_\kappa}{(-\theta+n+m-\kappa)_{\kappa+1}}\cdot\frac{1}{a^\kappa}\,\frac{x^{r(\varsigma+m)}}{(a+bx^r)^{-\theta+n+m-\kappa}}-$$

$$-\frac{(1-\theta-\varsigma)_n}{a^n br}\sum_{\kappa=0}^{m-1}\frac{(\varsigma+m-\kappa)_\kappa}{(-\theta+m-\kappa)_{n+\kappa+1}}\,\frac{1}{b^\kappa}\cdot\frac{x^{r(\varsigma+m-\kappa-1)}}{(a+b\,x^r)^{-\theta+m-\kappa}}+$$

$$+\frac{(1-\theta-\varsigma)_n(\varsigma)_m}{a^n b^m(1-\theta)_{n+m}}\int x^{r\varsigma-1}(a+bx^r)^{\theta-1}dx. \qquad (11)$$

$$\int x^{r(\theta-n)-1}(a+bx^r)^{\varsigma-m-1}dx=$$

$$=-\frac{1}{ar}\sum_{\kappa=0}^{n-1}(-1)^\kappa\frac{(1-\theta-\varsigma+n+m-\kappa)_\kappa}{(-\theta+n-\kappa)_{\kappa+1}}\cdot\frac{b^\kappa}{a^\kappa}\cdot\frac{x^{r(\theta-n+\kappa)}}{(a+bx^r)^{-\varsigma+m}}+$$

$$+\frac{(-1)^n a^{-n} b^n}{ar(1-\theta)_n}\sum_{\kappa=0}^{m-1}\frac{(1-\theta-\varsigma+m-\kappa)_{\kappa+n}}{(-\varsigma+m-\kappa)_{\kappa+1}}\cdot\frac{1}{a^\kappa}\cdot\frac{x^{r\theta}}{(a+bx^r)^{-\varsigma+m-\kappa}}+$$

$$+\frac{(-1)^n b^n}{a^{n+m}}\cdot\frac{(1-\theta-\varsigma)_{n+m}}{(1-\theta)_n(1-\varsigma)_m}\int x^{r\theta-1}(a+bx^r)^{\varsigma-1}\,dx. \qquad (12)$$

$$\int x^{r(1-\theta-\varsigma+n+m)-1}(a+bx^r)^{\varsigma-n-1}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{br}\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{(1-\theta-\varsigma+n+m-\kappa)_\kappa}{(-\varsigma+n-\kappa)_{\kappa+1}}\cdot\frac{1}{b^\kappa}\cdot\frac{x^{r(-\theta-\varsigma+n+m-\kappa)}}{(a+bx^r)^{-\varsigma+n-}}+$$

$$+\frac{b^{-n-1}}{r(1-\varsigma)_n}\sum_{\kappa=0}^{m-1}\frac{(-1)^\kappa(1-\theta-\varsigma+m-\kappa)_{n+\kappa}}{(-\theta+m-\kappa)_{\kappa+1}}\cdot\frac{a^\kappa}{b^\kappa}\cdot\frac{x^{r(-\theta-\varsigma+m-\kappa)}}{(a+bx^r)^{-\varsigma}}+$$

$$+\frac{(-1)^m a^m}{b^{n+m}}\cdot\frac{(1-\theta-\varsigma)_{n+m}}{(1-\varsigma)_n(1-\theta)_m}\int x^{r(1-\theta-\varsigma)-1}(a+bx^r)^{\varsigma-1}\,dx. \qquad (13)$$

$$\int x^{r(\theta-n)-1}(a+bx^r)^{-\theta-\varsigma+n+m}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{r}\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{(1-\theta-\varsigma+n+m-\kappa)_\kappa}{(-\theta+n-\kappa)_{\kappa+1}}\cdot b^\kappa\,\frac{(a+bx^r)^{-\theta-\varsigma+n+m-\kappa}}{x^{r(-\theta+n-\kappa)}}+$$

$$+\frac{b^n}{r(1-\theta)_n}\sum_{\kappa=0}^{m-1}\frac{(1-\theta-\varsigma+m-\kappa)_{n+\kappa}}{(-\varsigma+m-\kappa)_{\kappa+1}}\cdot a^\kappa\cdot\frac{x^{r\theta}}{(a+bx^r)^{\theta+\varsigma-m+\kappa}}+$$

$$+a^m b^n\,\frac{(1-\theta-\varsigma)_{n+m}}{(1-\theta)_n(1-\varsigma)_m}\int x^{r\theta-1}(a+bx^r)^{-\theta-\varsigma}\,dx. \qquad (14)$$

Теорема 1. Выражение интегралов от биномных дифференциалов в алгебраических функциях возможно для интегралов (9) — (11) в двух случаях: а) $\varsigma = 0$, б) $\theta + \varsigma = 1$, для интегралов (12) — (14) только в случае $\theta + \varsigma = 1$.

Доказательство. Интегралы, расположенные в правых частях равенств (9) — (14), содержат множитель, равный нулю как раз в перечисленных случаях, и в правых частях этих равенств остаются только алгебраические функции.

Теорема 2. Выражение интегралов, расположенных в правых частях равенств (9) — (14), в элементарных функциях возможно в следующих случаях:

1) для интегралов (9) — (14) при $\theta = 0$ и рациональных значениях ς, а для интеграла в правой части равенства (11) кроме того при рациональных значениях r;

2) для интегралов (12) — (14) при $\varsigma = 0$ и рациональных значениях θ и r.

Доказательство. После применения к каждому из перечисленных интегралов, расположенных в правых частях равенств (9)—(14), соответствующей подстановки Чебышева ([2], стр. 52) они преобразуются к интегралам вида

$$\int t^{m-1} (a_1 + b_1 t^n)^{-1} \, dt,$$

где $m = 1,2, \ldots$; $n = 1,2, \ldots$; $m \leqslant n$, представления которых в элементарных функциях даны в таблицах интегралов ([3], стр. 78 — 79).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. — Л. Гостехиздат, 1948.
2. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления Т. — II, М., Физматгиз. 1962.
3. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.