

ОБЩИЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ОСНОВНЫХ РАСЧЕТНЫХ ЗАДАЧ НА ЗЕМНОМ СФЕРОИДЕ

Б. Ф. КРУТОЙ

(Представлена маркшейдерско-геодезической секцией
Юбилейной конференции ТПИ в феврале 1961 г.)

Главной целью настоящей статьи является изложение общих, преимущественно новых способов решения в геодезических координатах основных расчетных задач на земном сфероиде: вычисление положений точек, кратчайших расстояний, направлений по кратчайшему пути, прямых лучевых засечек, площадей координатных трапеций и некоторых других задач.

Дел. 1. Постановка вопроса

1. Введем прежде всего новые, уточненные наименования для некоторых понятий, возникающих при изучении поверхностей.

Назовем *поверхностной нитью* непрерывное одномерное множество точек поверхности.

Среди поверхностных нитей выделим в силу их особых качеств те нити Γ , в каждой точке которых главная нормаль совпадает с нормалью к поверхности. Такие нити Γ принято называть *геодезическими*, так как они широко применяются при решении различных задач геодезии. Однако подобное наименование этих нитей является чисто случайным, ибо оно не отражает ряда их замечательных внутренних свойств:

а) Если дуга $\Delta\Gamma_{ij}$ геодезической нити Γ_{ij} на поверхности S , проведенная между некоторыми двумя точками i, j этой поверхности, не содержит вершин нити Γ_{ij} , то эта дуга $\Delta\Gamma_{ij}$ является кратчайшей на поверхности S между указанными точками i, j ;

б) Если на гладкой поверхности S один конец i гибкой вещественной нити закрепить, а другой конец пропустить через малое колечко во второй точке j поверхности S , то под действием натяжения, приложенного к ее свободному концу, гибкая вещественная нить между указанными точками i, j поверхности S расположится по геодезической кривой и в то же время будет наиболее *выравненной* нитью между этими точками;

в) Если в каждой точке геодезической нити Γ_{ij} на поверхности S провести касательную плоскость к поверхности S и затем построить огибающую поверхность D для этих плоскостей, то геодезическая нить Γ_{ij} поверхности S будет геодезической и для поверхности D . Поэтому при разворачивании поверхности D на плоскость геодезическая нить поверхности $S(D)$ перейдет в геодезическую нить плоскости, т. е. превратится в прямую.

Приведенные соображения говорят достаточно убедительно о том, что поверхностные нити с совпадающими главной и поверхностной нормалью более обосновано будет называть не геодезическими, а выравненными нитями поверхности. Такого наименования для поверхностных нитей подобного рода мы и будем придерживаться в дальнейшем.

2. Заметим также, что геодезические координаты B, L поверхностных точек земного сфероиды являются частным случаем поверхностных координат u, v , в качестве которых здесь взяты две угловые величины: широта B и долгота L . В указанной отсчетной опоре положения поверхностных точек i земного сфероиды определяются пересечением двух семейств координатных нитей: меридианов $L=L_i$ и параллелей $B=B_j$. Легко установить, что нити первого семейства $L=L_i$ являются выравненными на сфероиде, а нити второго семейства $B=B_j$ не будут выравненными, причем всякие две нити $L=L_i$ и $B=B_j$ этих семейств пересекаются под прямым углом. Поэтому геодезическая отсчетная опора B, L на сфероиде может быть отнесена к разряду прямоугольных полувывравненных отсчетных опор.

Отметим еще, что две пары координатных нитей $L=L_i, L=L_h$ и $B=B_j, B=B_k$ сфероиды, взятых парами из каждого семейства, образуют при своем пересечении сфероидическую координатную трапецию $ihkj$ с четырьмя прямыми углами. Определение площади S_{ij}^{hk} такой координатной трапеции входит в число основных расчетных задач на сфероиде.

3. Введем теперь для поверхности земного сфероиды ряд обозначений:

B_i, L_i — геодезическая широта и долгота точки i земного сфероиды;

A_{ij} — геодезический азимут в точке i выравненной нити Γ_{ij} , проведенной на сфероиде через точку i и соседнюю точку j ;

s_{ij} — длина дуги $\Delta\Gamma_{ij}$ выравненной нити Γ_{ij} между точками i, j сфероиды;

ΔL_{ij} — разность долгот L_i, L_j точек i, j сфероиды;

x_{ij} — длина дуги ΔX_{ij} меридиана X_{ij} между точками i, j сфероиды с широтами B_i, B_j ;

p_{ij} — длина дуги ΔP_{ij} параллели P_{ij} между точками i, j сфероиды с широтами B_i, B_j и разностью долгот ΔL_{ij} ;

S_{ij}^{hk} — площадь сфероидической трапеции, ограниченной двумя меридианами X_{ih}, X_{ik} с разностью долгот $\Delta L_{ij} = \Delta L_{hk}$ и двумя параллелями P_{ij}, P_{hk} с широтами $B_i = B_j, B_h = B_k$.

Приведенные здесь обозначения и связанные с ними понятия требуют некоторых уточнений и дополнений, которые вызваны в основном тем, что выравненные кривые Γ_{ij} сфероиды не являются вообще замкнутыми и касаются своими последовательными вершинами двух граничных параллелей: северной $P^{(ij)}$ и южной $\bar{P}^{(ij)}$, равноудаленных от плоскости экватора. На этих уточнениях и дополнениях мы сейчас и остановимся.

а) Так как между двумя точками i, j сфероиды можно провести две выравненные дуги: кратчайшую $\Delta\Gamma_{ij}$ и более длинную $\Delta\check{\Gamma}_{ij}$, то расстояние по дуге $\Delta\Gamma_{ij}$ обозначим через s_{ij} , а по дуге $\Delta\check{\Gamma}_{ij}$ — через $\check{s}_{ij}$, причем s_{ij} и $\check{s}_{ij}$ будем считать положительными. В соответствии с этим геодезические азимуты в точке i дуг $\Delta\Gamma_{ij}, \Delta\check{\Gamma}_{ij}$ обозначим через A_{ij} и $\check{A}_{ij}$; как правило, $A_{ij} \neq \check{A}_{ij} \pm 180^\circ$, что будет установлено ниже [Дел. 7].

б) Геодезические широты точек i сфероиды отсчитываем в обе стороны от плоскости экватора, от 0 до $\pm \frac{\pi}{2}$. Для северной половины сфероиды широты точек i обозначим через B_i и примем положительными; для южной половины широты точек i обозначим через $\bar{B}_i$ и примем отрицательными. Таким образом, широты $B_i, \bar{B}_i$ изменяются в следующих пределах:

$$1) 0 \leq B_i \leq +\frac{\pi}{2}; \quad 2) 0 \geq \bar{B}_i \geq -\frac{\pi}{2}.$$

в) Геодезические долготы точек i сфероиды отсчитываем двояко: к востоку и к западу от Гринича, от 0 до $\pm 2\pi$, и обозначим соответственно через L_i и $\bar{L}_i$, полагая при этом, что $L_i > 0$, а $\bar{L}_i < 0$. Отсюда будем иметь для точки i две разности долгот:

$$1) \Delta L_{ij} = L_j - L_i, \quad 2) \Delta \bar{L}_{ij} = \bar{L}_j - \bar{L}_i = \bar{L}_{ij}.$$

Такой двойной способ счета долгот и их разностей удобен при решении прямых засечек на сфероиде, а также в некоторых других случаях.

г) Северные и южные вершины выравненной кривой Γ_{ij} , т. е. точки на этой кривой с наименьшим абсолютным значением широты, обозначим: к востоку от начала i — через $O_{ij}^{(s)}, \bar{O}_{ij}^{(s)}$, к западу от начала — через $\bar{O}_{ij}^{(s)}, \bar{O}_{ij}^{(s)}$, где $s=1, 2, \dots$ есть порядок удаленности вершины данного вида относительно начальной точки i . Соответственно этому широту северных вершин $O_{ij}^{(s)}, \bar{O}_{ij}^{(s)}$ обозначим через $B_0^{(ij)}$, а широту южных вершин $\bar{O}_{ij}^{(s)}, \bar{O}_{ij}^{(s)}$ — через $\bar{B}_0^{(ij)}$, причем очевидно $B_0^{(ij)} = -\bar{B}_0^{(ij)}$. Долготы L точек $O_{ij}^{(s)}$ и $\bar{O}_{ij}^{(s)}$ будем обозначать $L_0^{(ij,s)}$ и $\bar{L}_0^{(ij,s)}$, долготы $\bar{L}$ точек $\bar{O}_{ij}^{(s)}, \bar{O}_{ij}^{(s)}$ обозначим через $\bar{L}_0^{(ij,s)}, \bar{L}_0^{(ij,s)}$.

д) Точки пересечения выравненной кривой Γ_{ij} с экватором обозначим: к востоку от начала i — через $\mathcal{E}_{ij}^{(s)}$, а к западу от i — через $\bar{\mathcal{E}}_{ij}^{(s)}$, где $s=1, 2, \dots$ есть порядок удаленности точки пересечения относительно начальной точки i . Соответственно этому долготы L восточных точек $\mathcal{E}_{ij}^{(s)}$ обозначим через $L_s^{(ij,s)}$, а долготы $\bar{L}$ западных точек $\bar{\mathcal{E}}_{ij}^{(s)}$ — через $\bar{L}_s^{(ij,s)}$. Постоянный же азимут выравненной кривой Γ_{ij} в точках $\mathcal{E}_{ij}^{(s)}, \bar{\mathcal{E}}_{ij}^{(s)}$ обозначим через $A_s^{(ij)}$.

е) Иногда для точек i, j северной и южной частей сфероиды мы будем вводить особые обозначения: точки северной части обозначим через i, j , точки южной части — через $\bar{i}, \bar{j}$. Эти и все приведенные выше обозначения различных точек на выравненной кривой Γ_{ij} показаны на рис. 1.

Используя указанные выше обозначения, запишем теперь кратко условия шести расчетных задач, которые можно считать основными для поверхности земного сфероиды:

1. Прямая задача для дуги $\Delta \Gamma_{ij}$ выравненной нити Γ_{ij} . Даны $B_1, L_1, A_{1,2}, s_{1,2}$; найти $B_2, L_2, s_{1,2}$.
2. Обратная задача для дуги $\Delta \Gamma_{ij}$ выравненной нити Γ_{ij} . Даны B_1, L_1 и B_2, L_2 ; найти $A_{1,2}, A_{2,1}$ и $s_{1,2}$.
3. Прямая выравненнолучевая засечка ($i=1, 2; j=3$). Даны $B_1, L_1, A_{1,3}$ и $B_2, L_2, A_{2,3}$; найти B_3, L_3 , а также $A_{3,1}, s_{1,3}$ и $A_{3,2}, s_{2,3}$.
4. Прямая задача для дуги $\Delta \Pi_{ij}$ параллели Π_{ij} ($i=1, j=2$). Даны $B_1 = B_2$ и $\Delta L_{1,2}$; найти $\Pi_{1,2}$.

б) Геодезические широты точек i сфероиды отсчитываем в обе стороны от плоскости экватора, от 0 до $\pm \frac{\pi}{2}$. Для северной половины сфероиды широты точек i обозначим через B_i и примем положительными; для южной половины широты точек i обозначим через $\bar{B}_i$ и примем отрицательными. Таким образом, широты $B_i, \bar{B}_i$ изменяются в следующих пределах:

$$1) 0 \leq B_i \leq +\frac{\pi}{2}; \quad 2) 0 \geq \bar{B}_i \geq -\frac{\pi}{2}.$$

в) Геодезические долготы точек i сфероиды отсчитываем двояко: к востоку и к западу от Гринича, от 0 до $\pm 2\pi$, и обозначим соответственно через L_i и $\bar{L}_i$, полагая при этом, что $L_i > 0$, а $\bar{L}_i < 0$. Отсюда будем иметь для точки i две разности долгот:

$$1) \Delta L_{ij} = L_j - L_i, \quad 2) \Delta \bar{L}_{ij} = \bar{L}_j - \bar{L}_i = \bar{L}_{ij}.$$

Такой двойной способ счета долгот и их разностей удобен при решении прямых засечек на сфероиде, а также в некоторых других случаях.

г) Северные и южные вершины выравненной кривой Γ_{ij} , т. е. точки на этой кривой с наименьшим абсолютным значением широты, обозначим: к востоку от начала i — через $O_{ij}^{(s)}, \bar{O}_{ij}^{(s)}$, к западу от начала — через $\bar{O}_{ij}^{(s)}, \bar{O}_{ij}^{(s)}$, где $s=1, 2, \dots$ есть порядок удаленности вершины данного вида относительно начальной точки i . Соответственно этому широту северных вершин $O_{ij}^{(s)}, \bar{O}_{ij}^{(s)}$ обозначим через $B_0^{(ij)}$, а широту южных вершин $\bar{O}_{ij}^{(s)}, \bar{O}_{ij}^{(s)}$ — через $\bar{B}_0^{(ij)}$, причем очевидно $B_0^{(ij)} = -\bar{B}_0^{(ij)}$. Долготы L точек $O_{ij}^{(s)}$ и $\bar{O}_{ij}^{(s)}$ будем обозначать $L_0^{(ij,s)}$ и $\bar{L}_0^{(ij,s)}$, долготы $\bar{L}$ точек $\bar{O}_{ij}^{(s)}, \bar{O}_{ij}^{(s)}$ обозначим через $\bar{L}_0^{(ij,s)}, \bar{L}_0^{(ij,s)}$.

д) Точки пересечения выравненной кривой Γ_{ij} с экватором обозначим: к востоку от начала i — через $\mathcal{E}_{ij}^{(s)}$, а к западу от i — через $\bar{\mathcal{E}}_{ij}^{(s)}$, где $s=1, 2, \dots$ есть порядок удаленности точки пересечения относительно начальной точки i . Соответственно этому долготы L восточных точек $\mathcal{E}_{ij}^{(s)}$ обозначим через $L_s^{(ij,s)}$, а долготы $\bar{L}$ западных точек $\bar{\mathcal{E}}_{ij}^{(s)}$ — через $\bar{L}_s^{(ij,s)}$. Постоянный же азимут выравненной кривой Γ_{ij} в точках $\mathcal{E}_{ij}^{(s)}, \bar{\mathcal{E}}_{ij}^{(s)}$ обозначим через $A_s^{(ij)}$.

е) Иногда для точек i, j северной и южной частей сфероиды мы будем вводить особые обозначения: точки северной части обозначим через i, j , точки южной части — через $\bar{i}, \bar{j}$. Эти и все приведенные выше обозначения различных точек на выравненной кривой Γ_{ij} показаны на рис. 1.

Используя указанные выше обозначения, запишем теперь кратко условия шести расчетных задач, которые можно считать основными для поверхности земного сфероиды:

1. Прямая задача для дуги $\Delta \Gamma_{ij}$ выравненной нити Γ_{ij} . Даны $B_1, L_1, A_{1,2}, s_{1,2}$; найти $B_2, L_2, s_{1,2}$.
2. Обратная задача для дуги $\Delta \Gamma_{ij}$ выравненной нити Γ_{ij} . Даны B_1, L_1 и B_2, L_2 ; найти $A_{1,2}, A_{2,1}$ и $s_{1,2}$.
3. Прямая выравненнолучевая засечка ($i=1, 2; j=3$). Даны $B_1, L_1, A_{1,3}$ и $B_2, L_2, A_{2,3}$; найти B_3, L_3 , а также $A_{3,1}, s_{1,3}$ и $A_{3,2}, s_{2,3}$.
4. Прямая задача для дуги $\Delta \Pi_{ij}$ параллели Π_{ij} ($i=1, j=2$). Даны $B_1 = B_2$ и $\Delta L_{1,2}$; найти $\Pi_{1,2}$.

а) конечное

$$S_{ij}^{hk} = b^2 \cdot \Delta L_{ij} \int_{B_i}^{B_h} \frac{\cos B dB}{(1 - e^2 \sin^2 B)^2} =$$

$$= \frac{b^2}{2} \cdot \Delta L_{ij} \left[\frac{\sin B}{1 - e^2 \sin^2 B} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1 + e \sin B}{1 - e \sin B} \right] \Big|_{B_i}^{B_h}. \quad (3)$$

б) в виде сходящегося ряда

$$S_{ij}^{hk} = b^2 \cdot \Delta L_{ij} \int_{B_i}^{B_h} \sum_{\lambda=0}^n \binom{-2}{\lambda} (-e^2 \sin^2 B)^\lambda \cos B dB =$$

$$= b^2 \cdot \Delta L_{ij} \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda \frac{\binom{-2}{\lambda}}{\lambda + 1} e^{2\lambda} \sin^{2\lambda+1} B \Big|_{B_i}^{B_h}, \quad (4)$$

где a и b — большая и малая полуоси земного сфероида, а

$$1) e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad 2) \binom{m}{\lambda} = \frac{m(m-1) \dots [m - (\lambda - 1)]}{1 \cdot 2 \dots \lambda},$$

$$\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1. \quad (5)$$

Отсюда видно, что основное внимание должно быть уделено первым трем задачам (1) — (3), над усовершенствованием и обобщением решения которых трудится немало геодезистов во всех странах.

Дел. 3. Получение общих выражений, лежащих в основе решения первых трех задач

1. Для решения первых двух задач (1), (2) было предложено более десятка частных способов, пригодных для расстояний $s_{1,2}$ не более 1000 — 3000 км, и один общий способ, принадлежащий Бесселю [1], — для любых расстояний $s_{1,2}$. Что касается третьей задачи (3), то пока не было найдено достаточно простых и одновременно совершенно общих способов ее решения.

Учитывая сказанное, мной открыт и разработан еще один общий способ решения первых двух задач (1), (2), в котором вопрос о возможных соотношениях между исходными и определяемыми величинами рассмотрен с предельной полнотой. На основе выведенных при решении этих задач рабочих выражений найдены два независимых способа решения последней задачи — прямой сфероидической засечки. Сущность предлагаемых способов рассматривается ниже, причем вначале мы получим свод исходных замкнутых выражений, из которого выведем затем соответствующие рабочие выражения для решения упомянутых трех основных задач (1) — (3).

2. В основу новых способов положен свод трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами, который определяет выравненную нить Γ земного сфероида, проведенную через точку $C(B, L)$ под азимутом A :

$$\begin{cases} M dB + 0 \cdot dL - \cos A ds + 0 \cdot dA = 0, \\ 0 \cdot dB + r dL - \sin A ds + 0 \cdot dA = 0, \\ 0 \cdot dB + \sin A dL + 0 \cdot ds - 1 \cdot dA = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Кроме того, используется вытекающее из этого свода известное уравнение Клеро

$$r \sin A = h = r_0 = \text{пост.} \quad (7)$$

Здесь M и r суть радиусы кривизны меридиана и параллели в переменной точке C заданной выравненной нити Γ сфероида, выходящей из C под азимутом A ; постоянная h есть, очевидно, радиус параллели r_0 в вершине O выравненной кривой Γ , т. е. в точке, где азимут $A = A_0 = 90^\circ$ или 270° .

3. Используя указанную совокупность равенств (6), (7), найдем сначала значения ds , dL и dA в функции широты B . Имеем прежде всего:

$$\begin{aligned} 1) \sin A &= \frac{h}{r}; & 2) \cos A &= \frac{\cos A}{|\cos A|} \frac{\sqrt{r^2 - h^2}}{r}; \\ 3) \beta &= \frac{\cos A}{|\cos A|} = \frac{dB}{|dB|} = \pm 1; \\ 4) \beta ds &= Mr \frac{dB}{\sqrt{r^2 - h^2}}; & 5) \beta dL &= h \frac{M}{r} \frac{dB}{\sqrt{r^2 - h^2}}; \\ 6) dA &= h \frac{M}{r} \frac{\sin B dB}{\sqrt{r^2 - h^2}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Множитель $\beta = \pm 1$ введен здесь потому, что ds принимаем всегда ≥ 0 , $\sqrt{r^2 - h^2}$ считаем здесь ≥ 0 , и, следовательно, при этих условиях имеем:

Т а б л и ц а 1

$0 \leq A < \frac{\pi}{2}$	$\sin A \geq 0$	$\cos A \geq 0$	$dB \geq 0$	$dL \geq 0$	$dA \geq 0$
$\frac{\pi}{2} \leq A < \pi$	$\sin A \geq 0$	$\cos A \leq 0$	$dB \leq 0$	$dL \geq 0$	$dA \geq 0$
$\pi \leq A < \frac{3}{2}\pi$	$\sin A \leq 0$	$\cos A \leq 0$	$dB \leq 0$	$dL \leq 0$	$dA \leq 0$
$\frac{3}{2}\pi \leq A < 2\pi$	$\sin A \leq 0$	$\cos A \geq 0$	$dB \geq 0$	$dL \leq 0$	$dA \leq 0$

Учитывая теперь, что

$$\begin{aligned} 1) M &= \frac{a(1 - e^2)}{W^3} = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}}; & 3) e^2 &= \frac{a^2 - b^2}{a^2}; \\ 2) r &= \frac{a \cos B}{W} = \frac{a \cos B}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{1/2}}; & 4) e'^2 &= \frac{a^2 - b^2}{b^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

подсчитаем отдельно величины

$$Mr, \quad \frac{M}{r}, \quad \sqrt{r^2 - h^2},$$

входящие в (8). Мы получим после простых преобразований

$$\begin{aligned} 1) \quad Mr &= a(1 - e^2) \frac{\cos B}{W^4}; \quad 2) \quad \frac{M}{r} = \frac{1 - e^2}{W^2 \cos B}; \\ 3) \quad \sqrt{r^2 - h^2} &= \frac{a}{W} \sqrt{\cos^2 B - \frac{h^2}{a^2} W^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

В (10.3) введем обозначение:

$$\frac{r^2}{a^2} \sin^2 A = \frac{h^2}{a^2} = \sin^2 A_s = v^2 \leq 1, \quad (11)$$

где A_s есть, очевидно, азимут выравненной кривой Γ в точке $\mathcal{A}$ ее пересечения с экватором. Тогда вместо (10.3) получим:

$$\sqrt{r^2 - h^2} = \frac{a \sqrt{1 - v^2}}{W} \sqrt{1 - \frac{1 - e^2 v^2}{1 - v^2} \sin^2 B}.$$

Если затем введем новое обозначение

$$\frac{1 - e^2 v^2}{1 - v^2} = \tau^2 \geq 1, \quad (12)$$

то для $\sqrt{r^2 - h^2}$ будем иметь окончательно:

$$\sqrt{r^2 - h^2} = \frac{a \sqrt{1 - v^2}}{W} \sqrt{1 - \tau^2 \sin^2 B}. \quad (13)$$

Вставим теперь найденные для Mr , $\frac{M}{r}$ и $\sqrt{r^2 - h^2}$ выражения (10.1), (10.2) и (13) в исходные равенства (8). Тогда с учетом обозначений (11), (12) получим:

$$\left\{ \begin{aligned} 1) \quad \beta ds &= \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{1 - v^2}} \cdot \frac{\cos B dB}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2} \sqrt{1 - \tau^2 \sin^2 B}}; \\ 2) \quad \beta dL &= \frac{v(1 - e^2)}{\sqrt{1 - v^2}} \cdot \frac{dB}{\cos B \sqrt{(1 - e^2 \sin^2 B)(1 - \tau^2 \sin^2 B)}}; \\ 3) \quad dA &= \frac{v(1 - e^2)}{1 - v^2} \cdot \frac{\operatorname{tg} B dB}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 B)(1 - \tau^2 \sin^2 B)}}. \end{aligned} \right. \quad (14)$$

Равенства (14) являются искомым развернутым представлением дифференциалов ds , dL и dA в функции широты B текущей точки C на выравненной нити Γ сфероид. Входящие в эти равенства величины v^2 и τ^2 определяются согласно (7), (11) и (12).

4. Выразим еще ds и dL в функции азимута A выравненной нити Γ в той же текущей точке C сфероид. Из (6.1) и (6.2) прежде всего найдем:

$$\begin{aligned} 1) \quad ds &= \frac{r dL}{\sin A} = a \frac{r}{a} \sin A \frac{dL}{\sin^2 A} = a v \operatorname{cosec}^2 A dL; \\ 2) \quad dL &= \frac{dA}{\sin B}. \end{aligned} \quad (15)$$

Но из того же равенства (11) получим более развернуто:

$$v^2 = \frac{r^2}{a^2} \sin^2 A = \frac{\sin^2 A \cos^2 B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}},$$

откуда обратно

$$\sin B = \sqrt{\frac{\sin^2 A - \nu^2}{\sin^2 A - e^2 \nu^2}}. \quad (16)$$

Таким образом, окончательно

$$\begin{cases} 1) ds = a \nu \sqrt{\frac{\sin^2 A - e^2 \nu^2}{\sin^2 A - \nu^2}} \operatorname{cosec}^2 A dA, \\ 2) dL = \sqrt{\frac{\sin^2 A - e^2 \nu^2}{\sin^2 A - \nu^2}} dA. \end{cases} \quad (17)$$

Равенства (17) являются искомыми.

5. Равенства (14), выражающие ds , dL и dA в функции широты B , имеют сложный вид и потому перед интегрированием должны быть упрощены путем введения новых переменных.

Упростим сначала равенства (14.1) и (14.2) для ds и dL . Введя вместо широты B новое переменное φ с помощью подстановки

$$\tau \sin B = \sin \varphi, \quad (18)$$

получим отсюда, имея в виду строение равенств (14.1) и (14.2):

$$\begin{aligned} 1) \cos B dB &= \frac{1}{\tau} \cos \varphi d\varphi; & 4) \frac{dB}{\cos B} &= \frac{\cos \varphi d\varphi}{\tau^2 \cos^2 B}; \\ 2) \sqrt{1 - \tau^2 \sin^2 B} &= \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \cos \varphi; & 5) \cos^2 B &= 1 - \sin^2 B = \\ 3) 1 - e^2 \sin^2 B &= 1 - \frac{e^2}{\tau^2} \sin^2 \varphi. & &= 1 - \frac{1}{\tau^2} \sin^2 \varphi. \end{aligned} \quad (19)$$

Вставляя теперь выражения (19) в равенства (14.1), (14.2) и учитывая (12), найдем:

$$\begin{aligned} 1) \beta ds &= \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \nu^2}} \cdot \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{e^2}{\tau^2} \sin^2 \varphi\right)^{3/2}}; \\ 2) \beta dL &= \frac{\nu(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \nu^2}} \cdot \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{1}{\tau^2} \sin^2 \varphi\right) \sqrt{1 - \frac{e^2}{\tau^2} \sin^2 \varphi}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Введем в (20) обозначения:

$$1) \frac{1 - e^2}{\sqrt{1 - e^2 \nu^2}} = \mu; \quad 2) \frac{e^2}{\tau^2} = \kappa^2 \leq e^2; \quad 3) \frac{1}{\tau^2} = m^2 \leq 1. \quad (21)$$

Тогда вместо (20) получим следующие окончательные выражения для ds и dL в функции нового переменного φ , определяемого соотношением (18):

$$\begin{cases} 1) \beta ds = a\mu \frac{d\varphi}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}; \\ 2) \beta dL = \nu\mu \frac{d\varphi}{(1 - m^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}}. \end{cases} \quad (22)$$

6. Упростим теперь найденное выше выражение (14.3) дифференциала dA через широту B . С этой целью введем подстановку

$$\sec^2 B = y. \quad (23)$$

Тогда после простых преобразований равенства (14.3) получим следующее окончательное выражение дифференциала dA в зависимости от нового переменного y :

$$dA = \frac{\nu(1-e^2)}{2\sqrt{1-\nu^2}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{\lambda_1 y^2 + 2\lambda_2 y + \lambda_3}}, \quad (24)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} 1) \lambda_1 &= (1-e^2)(1-\tau^2) = -\frac{\nu^2(1-\nu^2)^2}{1-\nu^2} \leq 0, \\ 2) 2\lambda_2 &= (1-e^2)\tau^2 + (1-\tau^2)e^2 = \frac{(1-e^2)(1-2e^2\nu^2)}{1-\nu^2}, \\ 3) \lambda_3 &= e^2\tau^2 = \frac{e^2(1-e^2\nu^2)}{1-\nu^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

7). Найдя окончательные выражения (14.1), (14.2) для ds и dL , а также получив выражение (24) с учетом (23), (25) для dA , перейдем от них, наконец, к соответствующим интегральным соотношениям. Такой же интегральный переход произведем с равенствами (17) для ds и dL . Осуществляя тогда попутное решение простого алгебраического интеграла, вытекающего из равенства (24), и используя также уравнение Клеро (7), получим следующую совокупность замкнутых выражений для дуги $\Delta\Gamma_{1.2}$ выравненной нити $\Gamma_{1.2}$ земного сфероида:

$$\begin{aligned} 1) \beta \cdot s_{1.2} &= a\nu \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{(1-\kappa^2 \sin^2 \varphi)^{3/4}}; \\ 2) s_{1.2} &= a\nu \int_{A_{1.2}}^{A'_{2.1}} \sqrt{\frac{\sin^2 A - e^2 \nu^2}{\sin^2 A - \nu^2}} \operatorname{cosec} A dA \\ 3) \beta \cdot \Delta L_{1.2} &= \nu\mu \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{(1-m^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{1-\kappa^2 \sin^2 \varphi}}; \\ 4) \Delta L_{1.2} &= \int_{A_{1.2}}^{A'_{2.1}} \sqrt{\frac{\sin^2 A - e^2 \nu^2}{\sin^2 A - \nu^2}} dA \\ 5) 2 \cdot \Delta A_{1.2} &= \arcsin [2\nu^2(1-\nu^2) \sec^2 B - (1-2e^2\nu^2)] \Big|_{B_1}^{B_2}; \\ 5a) 2 \cdot \Delta A_{1.2} &= \arcsin(1-2\sin^2 A_{1.2}) - \arcsin(1-2g^2 \sin^2 A_{1.2}); \\ 6) \operatorname{ctg} A_{1.2} &= \frac{V_2 \cos B_1 - V_1 \cos B_2 \cos \Delta A_{1.2}}{V_2 \cos B_1 \sin \Delta A_{1.2}} = \frac{g - \cos \Delta A_{1.2}}{\sin \Delta A_{1.2}}; \end{aligned} \quad (26)$$

$$7) -\operatorname{ctg} A'_{2.1} = \frac{V_1 \cos B_2 - V_2 \cos B_1 \cos \Delta A_{1.2}}{V_1 \cos B_2 \sin \Delta A_{1.2}} =$$

$$= \frac{(1:g) - \cos \Delta A_{1.2}}{\sin \Delta A_{1.2}};$$

$$8) \sin A_{1.2} = \frac{a^v}{r_1} = \sqrt{1-e^2} \frac{^v V_1}{\cos B_1};$$

$$9) \sin A'_{2.1} = \frac{a^v}{r_2} = \sqrt{1-e^2} \frac{^v V_2}{\cos B_2};$$

$$10) L_2 = L_1 + \Delta L_{1.2}; 11) A_{2.1} = A'_{2.1} \pm 180^\circ = (A_{1.2} + \Delta A_{1.2}) \pm 180^\circ.$$

В равенствах (26) введены обозначения:

$$1) V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B};$$

$$6) m^2 = 1 : \tau^2 = m_{1.2}^2;$$

$$2) ^v = \frac{r_1}{a} \sin A_{1.2} =$$

$$7) \sin \varphi = \tau \sin B;$$

$$= \sqrt{1+e'^2} \frac{\cos B_1 \sin A_{1.2}}{V_1} = ^v_{1.2};$$

$$3) \mu = \frac{1-e^2}{\sqrt{1-e^2 v^2}} = \mu_{1.2};$$

$$8) g = \frac{V_2 \cos B_1}{V_1 \cos B_2};$$

$$4) \tau^2 = \frac{1-e^2 v^2}{1-v^2} = \tau_{1.2}^2;$$

$$9) e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2};$$

$$5) \kappa^2 = e^2 : \tau^2 = \kappa_{1.2}^2;$$

$$10) e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2};$$

$$11) \beta = \frac{\cos A_{1.2}}{|\cos A_{1.2}|} = \frac{B_2 - B_1}{|B_2 - B_1|} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{|\varphi_2 - \varphi_1|} = \beta_{1.2} = \pm 1.$$

a и b — большая и малая полуоси земного сфероида.

Свод (26) обладает двумя примечательными особенностями:

а) равенство (26.1) имеет тот же вид, что и известное выражение для длины $x_{1.2}$ дуги меридиана $\Delta X_{1.2}$:

$$\beta x_{1.2} = a (1 - e^2) \int_{B_1}^{B_2} \frac{dB}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}}. \quad (28)$$

Легко видеть, что (28) получится из (26.1), если в (27.2) — (27.7) ввести азимут $A_{1.2}$ выравненной дуги $\Delta X_{1.2}$, равный 0;

б) величины $s_{1.2}$ и $\Delta L_{1.2}$ выражены не только через широту B в текущей точке C дуги $\Delta \Gamma_{1.2}$ выравненной нити $\Gamma_{1.2}$ сфероида, но и в зависимости от азимута A дуги $\Delta \Gamma_{1.2}$ в той же текущей точке C . Это дает возможность осуществить проверку искомых величин несколькими путями.

8. Свод (26) является единой основой для предложенных мной новых общих способов решения первых трех расчетных задач (1) — (3) на земном сфероиде. Не имея возможности по недостатку места дать подробное решение входящих в этот свод эллиптических интегралов

лов (26.1) — (26.4), я ограничусь в дальнейшем лишь применением в указанных выше задачах (1) — (3) соответствующих рабочих выражений для интегралов (26.1) — (26.4). Здесь же только очень кратко наметчу пути получения этих рабочих выражений.

Интегралы (26.1) и (26.3) являются частными случаями приведенного по Лежандру эллиптического интеграла 3 рода $\Pi(\varphi, \kappa, n)$:

$$\Pi(\varphi, \kappa, n) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}} \quad (n \geq 0, 0 \leq \kappa^2 \leq 1), \quad (29)$$

решение которого согласно [2] может быть представлено в следующем конечном виде через эллиптические функции Якоби и тэта-функции:

$$\Pi(\varphi, \kappa, n) = \int_0^u \frac{du}{1 + n \operatorname{sn}^2 u} = u + \frac{\operatorname{sn} \beta}{\operatorname{cn} \beta \operatorname{dn} \beta} \left[\frac{\vartheta'_1(\beta)}{\vartheta_4(\beta)} + \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta_4(u - \beta)}{\vartheta_4(u + \beta)} \right], \quad (30)$$

где

$$1) \ u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}} = F(\varphi, \kappa); \quad 2) \ \operatorname{sn}^2 \beta = -n : \kappa^2. \quad (31)$$

Однако применение выражений (30) и (31) к решению интегралов (26.1) и (26.3) при очень малом значении κ^2 ($\kappa^2 \leq e^2 = 0.0066934$ для сфероида Красовского) оказывается крайне невыгодным:

а) требуется предварительный подсчет некоторых вспомогательных величин;

б) для интеграла (26.1) равенство (30) приобретает неопределенный вид $\frac{0}{0}$, раскрытие которого еще более осложняет это равенство;

в) для интеграла (26.3) решение его согласно (30) будет неточным, так как при $n = m^2 \gg \kappa^2$ значение $\operatorname{sn} \beta$ определится из (31) весьма ненадежно ($\operatorname{sn} \beta$ становится в этом случае очень большим по модулю).

Учитывая сказанное, а также малость κ^2 для земного сфероид, целесообразнее будет интеграл (26.1) найти разложением в ряд по степеням κ^2 .

По тем же соображениям интеграл (26.3), после разложения в ряд по степеням κ^2 , решим по способу, предложенному в 1935 году проф. В. П. Ветчинкиным в [3].

Что касается остальных двух интегралов (26.2) и (26.4), то они являются эллиптическими интегралами общего вида, и их преобразование к выражению, содержащему только приведенные по Лежандру эллиптические интегралы 1 — 3 рода $F(\varphi, \kappa)$, $E(\varphi, \kappa)$ и $\Pi(\varphi, \kappa, n)$, потребует большой затраты вычислительного труда. Поэтому интегралы (26.2), (26.4) получим разложением числителя $(\sin^2 A - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}$ в ряд по степеням малой величины $e^2 \sin^2 \varphi$, или же найдем численным интегрированием по Гауссу.

Наконец, отметим то важное обстоятельство, что при заданном e^2 интегралы (26.1) и (26.3) содержат только два параметра: интеграл (26.1) — параметры φ и κ^2 , интеграл (26.3) — параметры φ и m^2 . Поэтому указанные интегралы могут быть представлены в виде таблиц с двумя входами, наподобие приведенного эллиптического интеграла 1 рода $F(\varphi, \kappa)$. Наличие таких таблиц существенно облегчает решение задач, в которых используются эти интегралы (см. дальше).

Дел. 4. Решение прямой задачи для выравненной дуги $\Delta\Gamma_{1,2}$ на сфероиде

Приведем лишь с очень краткими пояснениями совокупности расчетных выражений для решения предлагаемым способом прямой задачи (1) при различных условиях относительно значений величин, входящих в эту задачу.

Условие задачи: Даны B_1 , L_1 , $A_{1,2}$, $s_{1,2}$. Найти B_2 , $A_{2,1}$, L_2 .

1. Определение B ,

1) $V_1 = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B_1}$ — из геодезических таблиц;

$$2) \nu = \sqrt{1+e'^2} \frac{\cos B_1 \sin A_{1.2}}{V_1}; \quad 5) \kappa^2 = \frac{e^2}{\tau^2} \leq e^2;$$

$$3) \nu = \frac{1 - e^2}{\sqrt{1 - e^2 v^2}}; \quad 4) \tau^z = \frac{1 - e^2 v^2}{1 - v^2} > 1; \quad 6) \sin \varphi_1 = \tau \sin B_1;$$

$$7) \quad C_0 = 1 + \sum_{\lambda=1}^n (-1)^\lambda \frac{\binom{-3/2}{\lambda} \cdot \binom{2\lambda}{\lambda}}{2^{2\lambda}} \quad \kappa^{2\lambda} = 1 + \sum_{\lambda=1}^n c_{0,2\lambda} \kappa^{2\lambda};$$

$$8) \quad C_{2u} = \sum_{\lambda \vdash u} (-1)^{\lambda-u} \frac{\binom{-3/2}{\lambda} \cdot \binom{2\lambda}{\lambda-u}}{2^{2\lambda} \cdot u} \kappa^{2\lambda} = \sum_{\lambda \geq u} c_{2u, 2\lambda} \kappa^{2\lambda};$$

$$9) \frac{C_{2u}}{C_0} = D_{2u}; \quad (u=1, 2, \dots, n);$$

$$10) \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi_{1,2} = \frac{\beta \cdot s_{1,2}}{C_0 a^u} - \sum_{u=1}^n D_{2u} (\sin 2u\varphi_2 - \sin 2u\varphi_1); \quad \frac{\beta \cdot s_{1,2}}{C_0 a^v} = Q;$$

$$11) \varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi_{1:2}; \quad 12) \sin B_2 = \frac{1}{\tau} \sin \varphi_2.$$

Расчет $\Delta\varphi_{1,2}$ согласно (10) мы производим из-за незнания φ_2 путем последовательных приближений, а еще быстрее — следующим образом:

$$a) \quad \varphi_2^{(0)} = \varphi_1 + \frac{\beta s_{1.2}}{C_0 a_y}; \quad b) \quad \Delta \varphi_{1.2}^{(0)} = \frac{\beta s_{1.2}}{C_0 a_y} - \sum_{u=1}^n D_{2u} (\sin 2u \varphi_2^{(0)} - \sin 2u \varphi_1);$$

$$b) \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \Delta \varphi_2^{(0)} = x = \sum_{u=1}^n 2u D_{2u} \cos 2u \varphi_2^{(0)}; \quad 2) \Delta \varphi_{1,2} = \frac{\Delta \varphi_{1,2}^{(0)}}{1-x}.$$

Если $\Delta\varphi_{1,2}$ мало, то от $\Delta\varphi_{1,2}$ переходим сначала к $\Delta B_{1,2}$, затем — к B_2 .

$$\begin{aligned} 11a) \quad \Delta B_{1.2}'' = & (\operatorname{tg} B_1 \operatorname{ctg} \varphi_1) \Delta \varphi_{1.2}'' - \frac{\operatorname{tg} B_1}{2 \rho} (\Delta \varphi_{1.2}^2 - \Delta B_{1.2}^2)'' - \\ & - \frac{1}{6 \rho^2} [(\operatorname{tg} B_1 \operatorname{ctg} \varphi_1) \Delta \varphi_{1.2}^3 - \Delta B_{1.2}^3]''; \end{aligned}$$

$$12a) \quad B_0 = B_1 + \Delta B_{1,2}; \quad \rho = 206264.8.$$

При $\Delta\varphi_{1.2}$ малом можно вычислять $\Delta\varphi_{1.2}$ иначе:

$$10a) \Delta\varphi_{1.2}'' = \beta\rho'' \frac{s_{1.2} W_1^3}{a^3} - \frac{3\kappa^2}{4 W_1^2} \left[\sin 2\varphi_1 + \frac{2}{3} \left(\cos 2\varphi_1 + \frac{5\kappa^2 \sin^2 \varphi_1}{4 W_1^2} \right) \cdot \frac{\Delta\varphi_{1.2}''}{\rho} \right] \frac{(\Delta\varphi_{1.2}'')^2}{\rho},$$

где

$$13) W_1 = \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi_1} = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1} = \frac{V_1}{\sqrt{1 + e'^2}} \text{ — из геодезических таблиц.}$$

2. Определение $A_{2.1}$

$$1) \sin A_{2.1}' = \sqrt{1 - e^2} \frac{v V_2}{\cos B_2};$$

$$2) A_{2.1} = A_{2.1}' \pm 180^\circ = (A_{1.2} + \Delta A_{1.2}) \pm 180^\circ.$$

а) Если $A_{2.1}'$ близко к 90° или 270° , но $B_2 - B_1 = \Delta B_{1.2}$ велико, то вместо $A_{2.1}'$ вычисляют $\Delta A_{1.2}$:

$$3) g = \frac{V_2 \cos B_1}{V_1 \cos B_2};$$

$$4) 2 \cdot \Delta A_{1.2} = \arcsin(1 - 2 \sin^2 A_{1.2}) - \arcsin(1 - 2g^2 \sin^2 A_{1.2}).$$

б) Если $B_2 - B_1 = \Delta B_{1.2}$ мало, то вместо $A_{2.1}'$ можно также вычислить $\Delta A_{1.2}$:

$$4a) 2 \cdot \Delta A_{1.2}'' = \rho'' \frac{\varepsilon}{\sin 2A_{1.2}} \left[1 + \frac{\cos 2A_{1.2}}{2 \sin^2 2A_{1.2}} \varepsilon + \frac{1 + 2 \cos^2 2A_{1.2}}{6 \sin^4 2A_{1.2}} \varepsilon^2 \right],$$

где

$$5) \varepsilon = 2(g^2 - 1) \sin^2 A_{1.2}.$$

3. Проверка вычисления B_2 и $A_{2.1}$

Так как согласно (26.1) и (26.9) обратный азимут $A_{2.1} = A_{2.1}' \pm 180^\circ = F(s_{1.2}, v, B_2)$, то вычисленные B_2 и $A_{2.1}$ проверяются совместно равенством (26.2) — вторым выражением для $s_{1.2}$:

$$s_{1.2} = a v \int_{A_{1.2}}^{A_{2.1}'} \sqrt{\frac{\sin^2 A - e^2 v^2}{\sin^2 A - v^2}} \operatorname{cosec}^2 A dA.$$

Подсчитывая этот интеграл тремя различными путями:

а) разложением числителя $(\sin^2 A - e^2 v^2)^{1/2}$ в ряд по степеням малой величины $e^2 v^2$,

б) численным интегрированием по Гауссу,

в) разложением интеграла вблизи среднего значения

$$\bar{A}_{1.2} = \frac{1}{2} (A_{1.2} + A_{2.1}') \text{ в ряд по степеням разности } \Delta A_{1.2} = A_{2.1}' - A_{1.2}$$

получим три соответствующих способа проверки B_2 и $A_{2.1}$.

4. Определение L_2

$$1) \sqrt{1 - m^2} = p; \quad 2) \varphi_{1.2} = \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2); \quad 3) \Delta\varphi_{1.2} = \varphi_2 - \varphi_1;$$

$$\begin{aligned}
4) \quad \operatorname{tg} \varphi &= t; & 5) \quad \beta &= \frac{\Delta \varphi_{1.2}}{|\Delta \varphi_{1.2}|}; & 6) \quad \operatorname{arc} \operatorname{tg}(pt) &= \vartheta; \\
7) \quad v_p &= \frac{v}{|v|} p \sqrt{1-e^2}; & 8) \quad \frac{v}{|v|} p &= \frac{v \sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2 v^2}}; & 9) \quad v &= \frac{v}{|v|} \frac{p}{\sqrt{(1-e^2)-p^2}}; \\
10) \quad g(\lambda) &= (-1)^\lambda \binom{-1/2}{\lambda} \kappa^{2\lambda}; & 11) \quad \Phi(\lambda) &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sin^{2\lambda} \varphi \, d\varphi}{1-m^2 \sin^2 \varphi}; \\
12) \quad F(\lambda) &= g(\lambda) \Phi(\lambda); \\
&(\lambda = 0, 1, 2, \dots, n).
\end{aligned}$$

Из (10) — (12) найдем последовательно:

$$13) \quad F(0) = \Phi(0) = \frac{1}{p} [\operatorname{arc} \operatorname{tg}(pt_2) - \operatorname{arc} \operatorname{tg}(pt_1)] = p [\vartheta_2 - \vartheta_1].$$

$$14) \quad F(\lambda) = E(\lambda) [S(\lambda-1) - \Phi(\lambda-1)], \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n),$$

где обозначено:

$$15) \quad E(\lambda) = -\frac{g(\lambda)}{m^2} = (-1)^{\lambda+1} \binom{-1/2}{\lambda} \frac{\kappa^{2\lambda}}{m^2};$$

$$16) \quad S(\lambda-1) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin^{2(\lambda-1)} \varphi \, d\varphi.$$

Интегрируя (16), получим для функции $S(\lambda-1)$, входящей в (14):

$$17) \quad S(0) = \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta \varphi_{1.2}, \quad (\lambda = 1);$$

$$\begin{aligned}
18) \quad S(\lambda-1) &= S(\omega) = \frac{1}{2^{2\omega}} \left\{ \binom{2\omega}{\omega} (\varphi_2 - \varphi_1) + (-1)^\omega \sum_{x=0}^{\omega-1} (-1)^x \frac{\binom{2\omega}{\omega-x}}{\omega-x} \times \right. \\
&\times \left[\sin 2(\lambda-x) \varphi_2 - \sin 2(\lambda-x) \varphi_1 \right] \Big\}, \quad (\lambda-1 = \omega = 1, 2, \dots, n).
\end{aligned}$$

После определения функций $F(\lambda)$ искомые значения $\Delta L_{1.2}$ и L_2 подсчитаем так:

$$19) \quad \beta \cdot \Delta L_{1.2} = v_p \sum_{\lambda=0}^n F(\lambda) = \sum_{\lambda=0}^n v_p F(\lambda) = \sum_{\lambda=0}^n R(\lambda); \quad 20) \quad L_2 = L_1 + \Delta L_{1.2}.$$

Ниже даются рабочие выражения для первых пяти членов $v_p F(\lambda) = R(\lambda)$ в равенстве (19):

$$\begin{aligned}
20) \quad v_p F(0) &= \frac{v}{|v|} \sqrt{1-e^2} [\operatorname{arc} \operatorname{tg}(pt_2) - \operatorname{arc} \operatorname{tg}(pt_1)] = \\
&= \frac{v}{|v|} \sqrt{1-e^2} [\vartheta_2 - \vartheta_1] = \frac{v}{|v|} \sqrt{1-e^2} \Delta \vartheta_{1.2} = R(0);
\end{aligned}$$

но если $\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta \varphi_{1.2}$ невелико или если одна из величин φ_1, φ_2 близка к $\frac{\pi}{2}$, то лучше

$$20a) \quad v_p F(0) = \frac{v}{|v|} \sqrt{1-e^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{p \sin \Delta \varphi_{1.2}}{\cos \Delta \varphi_{1.2} - m^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2}.$$

$$21) \nu_{\varphi} F(1) = -\frac{e^2}{2} \nu_{\varphi} (\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1}{2} e^2 R(0) =$$

$$= \frac{\nu}{|\nu|} \frac{e^2}{2} \sqrt{1-e^2} [(\vartheta_2 - \vartheta_1) - p(\varphi_2 - \varphi_1)] = R(1);$$

$$22) \nu_{\varphi} F(2) = -\frac{3}{16} e^2 \kappa^2 \nu_{\varphi} \left[(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) \right] + \\ + \frac{3}{4} e^2 R(1) = R(2);$$

$$23) \nu_{\varphi} F(3) = -\frac{5}{16} e^2 \kappa^4 \nu_{\varphi} \left[\frac{3}{8} (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{1}{4} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) + \right. \\ \left. + \frac{1}{32} (\sin 4\varphi_2 - \sin 4\varphi_1) \right] + \frac{5}{6} e^2 R(2) = R(3);$$

$$24) \nu_{\varphi} F(4) = -\frac{35}{128} e^2 \kappa^6 \nu_{\varphi} \left[\frac{5}{16} (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{15}{64} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) + \right. \\ \left. + \frac{3}{64} (\sin 4\varphi_2 - \sin 4\varphi_1) - \frac{1}{192} (\sin 6\varphi_2 - \sin 6\varphi_1) \right] + \frac{7}{8} e^2 R(3) = R(4).$$

5. Заключительная проверка

Заключительную проверку найденных B_2 , $A_{1,2}$ и $\Delta L_{1,2}$ производим, используя равенство [Дел. 3; (26.4)]:

$$\Delta L_{1,2} = \int_{A_{1,2}}^{A'_{2,1}} \sqrt{\frac{\sin^2 A - e^2 \nu^2}{\sin^2 A - \nu^2}} dA.$$

Здесь так же, как и выше в разд. 3 для $s_{1,2}$, возможны три способа проверки.

Дел. 5. Решение обратной задачи для выравненной дуги $\Delta L_{1,2}$ на сфероиде

Как и в прямой задаче, здесь будут даны в основном только последовательности рабочих выражений, вытекающие из начального свода [Дел. 3; (26)] и определяющие совокупность искомых величин в обратной задаче; будут также указаны пределы годности этих последовательностей в различных случаях.

Условие задачи: даны B_1 , L_1 и B_2 , L_2 ; найти $A_{1,2}$, $A_{2,1}$ и $s_{1,2}$.

1. Первый способ определения $A_{1,2}$ и $A_{2,1}$ (при $s_{1,2} > 1000$ км)
Прежде всего решаем 2 приближениями уравнение [Дел. 4, 4; (19)]

$$1) \beta \cdot \Delta L_{1,2} = \nu_{\varphi} \sum_{\lambda=0}^n F(\lambda) = \sum_{\lambda=0}^n R(\lambda) = R(0) + \sum_{\lambda=1}^n R(\lambda),$$

где

$$R(0) = \frac{\nu}{|\nu|} \sqrt{1-e^2} [\arctg(p \operatorname{tg} \varphi_2) - \arctg(p \operatorname{tg} \varphi_1)] = \\ = \frac{\nu}{|\nu|} \sqrt{1-e^2} [\vartheta_2 - \vartheta_1] = \frac{\nu}{|\nu|} \sqrt{1-e^2} \Delta \vartheta_{1,2};$$

$$R(1) = \frac{e^2}{2} R(0) - \frac{e^2}{2} \nu_\mu (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{e^2}{2} R(0) - \frac{e^2}{2} \nu_\mu \Delta\varphi_{1,2} =$$

$$= \frac{\nu}{|\nu|} \frac{e^2}{2} \sqrt{1-e^2} [\Delta\vartheta_{1,2} - p \cdot \Delta\varphi_{1,2}];$$

$$R(2) = \frac{3}{4} e^2 R(1) - \frac{3}{16} e^2 \kappa^2 \nu_\mu \left[\Delta\varphi_{1,2} - \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) \right];$$

$$R(3) = \frac{5}{6} e^2 R(2) - \frac{5}{16} e^2 \kappa^4 \nu_\mu \left[\frac{3}{8} \Delta\varphi_{1,2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) + \frac{1}{32} (\sin 4\varphi_2 - \sin 4\varphi_1) \right]$$

и т. д.

относительно неизвестного p , причем сумма $\sum_{\lambda=1}^n R(\lambda)$ есть малость порядка e^2 .

Начальное достаточно точное значение $A_{1,2}^{(0)}$ азимута $A_{1,2}$, входящего в вычисление p , находим из соотношения

$$2) \frac{\cos B_2 \operatorname{tg} B_1 - \cos \Delta L_{1,2} \sin B_1}{\sin \Delta L_{1,2}} = \frac{\pi_2 - \pi_1}{\sin \Delta L_{1,2}} = \operatorname{ctg} \alpha_{1,2} = \operatorname{ctg} A_{1,2}^{(0)}.$$

Соответствующее приближенное значение $p^{(0)}$ неизвестного p и начальное значение $R^{(0)}$ для $R(0)$, а также последовательные значения величин ν_μ , m , τ , κ^2 , φ , входящих в $R(\lambda)$, определим тогда из соотношений:

$$3) p = \cos B_0 \approx \sin A_{1,2}^{(0)} \cos B_1 = p^{(0)};$$

$$4) R(0) = \frac{\nu}{|\nu|} \sqrt{1-e^2} \Delta\vartheta_{1,2} \approx \frac{\nu}{|\nu|} \sqrt{1-e^2} \Delta L_{1,2} = R^{(0)}(0);$$

$$5) \nu_\mu = \frac{\nu}{|\nu|} p \sqrt{1-e^2}; \quad 6) \sin B_0 = m; \quad 7) \csc B_0 = \tau;$$

$$8) \kappa^2 = e^2 (1 - p^2) = e^2 \sin^2 B_0; \quad 9) \sin \varphi = \tau \sin B$$

при $A_{1,2} = A_{1,2}^{(0)}$ и $p = p^{(0)}$, $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, ..., причем B_0 есть широта вершины $O_{1,2}$ выравненной кривой $\Gamma_{1,2}$.

Улучшенное значение $p^{(s)}$ неизвестного p в итоге s -го приближения найдем так:

$$10) w^{(s-1)} = \beta \sum_{\lambda=0}^n R^{(s-1)}(\lambda) - \Delta L_{1,2} = \Delta L_{1,2}^{(s-1)} - \Delta L_{1,2},$$

$$11) \frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial p} = \sqrt{1-e^2} \tau^2 [\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1] = \chi^{(s-1)};$$

$$12) p^{(s)} = p^{(s-1)} - \frac{w^{(s-1)}}{\chi^{(s-1)}} = p^{(s-1)} + \Delta p^{(s-1)}.$$

Решив уравнение (1) двумя-тремя приближениями, вычисляем затем окончательные значения азимутов $A_{1,2}$, $A_{2,1}$:

$$13) \sin A_{1,2} = \frac{\nu}{|\nu|} \frac{\cos B_0}{\cos B_1} \sqrt{\frac{1 - e^2 \sin^2 B_1}{1 - e^2 \sin^2 B_0}} = \frac{\nu}{|\nu|} \frac{p}{\cos B_1} \frac{V_1}{V_0};$$

$$14) \sin A'_{2.1} = \frac{v}{|v|} \frac{\cos B_0}{\cos B_2} \sqrt{\frac{1 - e^2 \sin^2 B_2}{1 - e^2 \sin^2 B_0}} = \frac{v}{|v|} \frac{p}{\cos B_2} \frac{V_2}{V_0};$$

$$15) A_{2.1} = A'_{2.1} \pm 180^\circ.$$

Необходимая в дальнейшем при вычислении расстояния $s_{1.2}$ вспомогательная величина p может быть выражена следующим образом через найденную выше величину $\kappa^2 = e^2 (1 - p^2) = e^2 \sin^2 B_0$:

$$16) p = \sqrt{(1 - e^2)(1 - \kappa^2)} = \sqrt{(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 B_0)} = \\ = \sqrt{1 - e^2} W_0 = (1 - e^2) V_0.$$

Что касается величины v , то она связана с величинами p и κ соотношением

$$17) v = \frac{v}{|v|} \frac{p}{\sqrt{1 - \kappa^2}} = \frac{v}{|v|} \frac{\cos B_0}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_0}} = \frac{v}{|v|} \frac{\cos B_0}{W_0} = \\ = \frac{v}{|v|} \frac{\cos B_0}{\sqrt{1 - e^2} V_0}.$$

2. Второй способ определения $A_{1.2}$ и $A_{2.1}$ (при $s_{1.2} \leq 1000$ км)

$$1) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha'_{2.1} + \alpha_{1.2}) = \frac{\cos \frac{1}{2} (B_2 + B_1)}{\sin \frac{1}{2} (B_2 - B_1)} \operatorname{tg} \frac{\Delta L_{1.2}}{2} = \operatorname{tg} \bar{\alpha}_{1.2};$$

$$2) \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha'_{2.1} - \alpha_{1.2}) = \frac{\sin \frac{1}{2} (B_2 + B_1)}{\cos \frac{1}{2} (B_2 - B_1)} \operatorname{tg} \frac{\Delta L_{1.2}}{2} = \operatorname{tg} \frac{\Delta \alpha_{1.2}}{2},$$

отсюда найти $\alpha_{1.2}$ и $\alpha'_{2.1}$ в отдельности.

$$3) Q = \frac{e^2}{\sin \Delta L_{1.2}} (V_1 \sin B_2 - V_2 \sin B_1);$$

$$4) \alpha_{2.1} = \alpha'_{2.1} \pm 180^\circ = (\alpha_{1.2} + \Delta \alpha_{1.2}) \pm 180^\circ;$$

$$5) \sin \sigma_{1.2} = \frac{\cos B_2}{\sin \alpha_{1.2}} \sin \Delta L_{1.2} = - \frac{\cos B_1}{\sin \alpha_{2.1}} \sin \Delta L_{1.2};$$

$$6) \operatorname{ctg} \tilde{A}_{1.2} = \operatorname{ctg} \alpha_{1.2} - Q \frac{\cos B_1}{V_1 \cos B_2};$$

$$7) \operatorname{ctg} \tilde{A}_{2.1} = \operatorname{ctg} \alpha_{2.1} - Q \frac{\cos B_2}{V_2 \cos B_1}; \quad (\text{см. [4]}).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 8) \eta''_{1.2} = \frac{e^2}{6\rho''} (\sigma''_{1.2})^2 \sin \tilde{A}_{1.2} \cos^2 B_1 \left(\cos \tilde{A}_{1.2} - \frac{\sigma''_{1.2}}{4\rho''} \operatorname{tg} B_1 \right); \\ 9) \eta''_{2.1} = \frac{e^2}{6\rho''} (\sigma''_{1.2})^2 \sin \tilde{A}_{2.1} \cos^2 B_2 \left(\cos \tilde{A}_{2.1} - \frac{\sigma''_{1.2}}{4\rho''} \operatorname{tg} B_2 \right) \end{array} \right. \quad (\text{см. [5]}).$$

$$10) A_{1.2} = \tilde{A}_{1.2} - \eta''_{1.2};$$

$$11) A_{2.1} = \tilde{A}_{2.1} - \eta''_{2.1}.$$

3. Поверка вычисления $A_{1,2}$ и $A_{2,1}$

Поверка вычисленных азимутов $A_{1,2}$ и $A_{2,1}$ производится их подстановкой в одно из следующих равенств:

$$1) \frac{\sin A_{1,2}}{\sin A_{2,1}} = \frac{\cos B_2}{\cos B_1} \sqrt{\frac{1 - e^2 \sin^2 B_1}{1 - e^2 \sin^2 B_2}} = \frac{V_2 \cos B_1}{V_1 \cos B_2} = g;$$

$$2) \Delta L_{1,2} = \int_{A_{1,2}}^{A'_{2,1}} \sqrt{\frac{\sin^2 A - e^2 v^2}{\sin^2 A - v^2}} dA.$$

Действительное решение интеграла (2) производим одним из трех способов, примененных выше в заключительной части прямой задачи.

4. Вычисление $s_{1,2}$ четырьмя способами

Расстояние $s_{1,2}$ может быть вычислено четырьмя путями из двойного равенства

$$s_{1,2} = \beta a v \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} = a v \int_{A_{1,2}}^{A'_{2,1}} \sqrt{\frac{\sin^2 A - e^2 v^2}{\sin^2 A - v^2}} dA.$$

Из первой части этого двойного равенства имеем

$$\beta s_{1,2} = C_0 a v^p (\varphi_2 - \varphi_1) + a v \sum_{u=1}^n C_{2u} (\sin 2u\varphi_2 - \sin 2u\varphi_1),$$

где φ_1 , φ_2 и κ^2 найдены выше при определении $p = \cos B_0$, величина p дана в [Дел. 5, 4; (14)], а коэффициенты C_0 , C_{2u} указаны в [Дел. 3, 1; (7), (8)].

Вторую часть того же двойного равенства решаем одним из трех способов, упомянутых выше в прямой задаче.

Дел. 6. Решение прямой выравненнолучевой засечки на сфероиде

Прямой выравненнолучевой засечкой на сфероиде назовем задачу определения геодезических координат B_3 , L_3 точки 3, если даны геодезические координаты B_1 , L_1 и B_2 , L_2 исходных точек 1, 2, а также даны геодезические азимуты $A_{1,3}$, $A_{2,3}$ засекающих точку 3 лучей $\mathcal{J}L_{1,3}$, $\mathcal{J}L_{2,3}$ с вершинами в исходных точках 1, 2.

При этом может быть поставлено дополнительное требование найти также длины $s_{1,3}$, $s_{2,3}$ засекающих сторон 1,3, 2,3 и обратные азимуты $A_{3,1}$, $A_{3,2}$ этих сторон в определяемой точке 3. Из сказанного вытекает следующее краткое:

Условие задачи: Даны B_1 , L_1 , $A_{1,3}$ и B_2 , L_2 , $A_{2,3}$. Найти B_3 , L_3 , а также $A_{3,1}$, $s_{1,3}$ и $A_{3,2}$, $s_{2,3}$.

В указанной постановке данная задача может быть решена двумя общими способами, в основе которых лежит очевидное соотношение

$$\Delta L_{1,2} = \Delta L_{1,3} - \Delta L_{2,3}. \quad (1)$$

Рассмотрим каждый из этих способов в отдельности.

А. Первый способ решения прямой засечки на сфероиде

Этот способ целесообразно применять, когда нам нужны только геодезические координаты B_3, L_3 определяемой точки 3. Сущность способа заключается в следующем.

Прежде всего из решения прямой засечки на шаре находим приближенные значения $\tilde{B}_3^{(0)}, \tilde{L}_3^{(0)}$ геодезических координат B_3, L_3 определяемой точки 3. Для указанного решения, которое выполняется с поворкой, применяются следующие рабочие выражения:

$$1) \operatorname{tg} \Delta \tilde{L}_{1.3}^{(0)} =$$

$$= \frac{\cos(90^\circ - B_2) \cos \Delta L_{1.2} - \operatorname{ctg} A_{2.3} \sin \Delta L_{1.2} - \operatorname{ctg}(90^\circ - B_1) \sin(90^\circ - B_2)}{\operatorname{ctg} A_{1.3} \frac{\sin(90^\circ - B_2)}{\sin(90^\circ - B_1)} - \operatorname{ctg} A_{2.3} \cos \Delta L_{1.2} - \cos(90^\circ - B_2) \sin \Delta L_{1.2}};$$

$$2) \tilde{L}_3^{(0)} = L_1 + \Delta \tilde{L}_{1.3}^{(0)}; \quad 3) \Delta \tilde{L}_{2.3}^{(0)} = \tilde{L}_3^{(0)} - L_2;$$

$$4) \operatorname{tg} \tilde{B}_3^{(0)} = [\operatorname{ctg} A_{1.3} \sin \Delta \tilde{L}_{1.3}^{(0)} + \cos(90^\circ - B_1) \cos \Delta \tilde{L}_{1.3}^{(0)}] : \sin(90^\circ - B_1) = \\ = [\operatorname{ctg} A_{2.3} \sin \Delta \tilde{L}_{2.3}^{(0)} + \cos(90^\circ - B_2) \cos \Delta \tilde{L}_{2.3}^{(0)}] : \sin(90^\circ - B_2).$$

Вычисления производятся с точностью до 0,00001 для чисел и с точностью до 1" или до 0,0001 для углов.

Далее вычисляем с окончательной точностью (например, с точностью до 10^{-8}) величины $\nu_{i3}, \kappa_{i3}^2, \tau_{i3}, p_{i3}, (\nu\rho)_{i3}, \varphi_i^3$ и ϑ_i^3 для обеих засекающих сторон $i3 = 1.3, 2.3$. Соответствующие расчетные выражения даны в дел. 4 ($\sin \varphi_i^3 = \tau_{i3} \sin B_i$; $\operatorname{tg} \vartheta_i^3 = p_{i3} \operatorname{tg} \varphi_i^3$).

Теперь приступаем к вычислению на сфероиде последовательных приближений $B_3^{(s)}, L_3^{(s)}$, ($s = 1, 2, \dots$), для геодезических координат B_3, L_3 определяемой точки 3.

Начиная первое приближение, берем в качестве исходного значение $\tilde{B}_3^{(0)} = B_3^{(0)}$ широты точки 3, полученное из решения засечки на шаре. Затем решением обратных задач по сторонам $i3 = 1.3, 2.3$ при известных азимутах $A_{1.3}, A_{2.3}$ лучей $\sigma J_{1.3}, \sigma J_{2.3}$, вычисляем согласно [Дел. 5, 1] соответствующие приближенные значения $\Delta L_{1.3}^{(0)}, \Delta L_{2.3}^{(0)}$ на сфероиде разностей долгот $\Delta L_{1.3}, \Delta L_{2.3}$. При этом расчет ведем следующим образом:

$$\begin{aligned} 1) \tilde{B}_3^{(0)} = B_3^{(0)} \approx B_3, \quad 2) \tau_{i3} \sin B_3 = \sin \varphi_3^i, \quad 3) \varphi_3^i - \varphi_i^3 = \Delta \varphi_{i3}, \\ 4) p_{i3} \operatorname{tg} \varphi_3^i = \operatorname{tg} \vartheta_3^i, \quad 5) \vartheta_3^i - \vartheta_i^3 = \Delta \vartheta_{i3}, \quad 6) \frac{\nu_{i3}}{|\nu_{i3}|} = \omega_{i3}, \\ 7) \omega_{i3} \sqrt{1 - e^2} \Delta \vartheta_{i3} = R_{i3}(0), \quad 8) (\nu\rho)_{i3} \Delta \varphi_{i3} = \Delta R_{i3}(0), \\ 9) \frac{e^2}{2} [R_{i3}(0) - \Delta R_{i3}(0)] = R_{i3}(1), \\ 10) \frac{1}{4} (\kappa^2 \nu\rho)_{i3} [\Delta \varphi_{i3} - (\sin 2\varphi_3^i - \sin 2\varphi_i^3)] = \Delta R_{i3}(1), \\ 11) \frac{3}{4} e^2 [R_{i3}(1) - \Delta R_{i3}(1)] = R_{i3}(2), \quad 12) \sum_{\lambda=0}^2 R_{i3}(\lambda) = \vartheta_{i3} \Delta L_{i3}^{(0)}. \end{aligned} \quad 3.1$$

Эти расчеты производим, удерживая 6—7 знаков после запятой.

Подсчитав $\Delta L_{i3}^{(0)} = \Delta L_{1,3}^{(0)}, \Delta L_{2,3}^{(0)}$, вычисляем соответствующие приближенные значения $L_3^{(0)}, L_3^{(0)}$ долготы L_3 точки 3 сфероида, а также вычисляем возникающую при этом невязку $w_L^{(0)}$ по долготе:

$$1) L_3^{(0)} = L_1 + \Delta L_{1,3}^{(0)}, \quad 2) L_3^{(0)} = L_2 + \Delta L_{2,3}^{(0)}, \quad 3) w_L^{(0)} = L_1^{(0)} - L_2^{(0)}, \quad (4.1)$$

т. е. производим расчеты, вытекающие из основного соотношения (1): $\Delta L_{1,2} = \Delta L_{1,3} - \Delta L_{2,3}$, если вместо точного значения B_3 широты точки 3 взять приближенное значение $\tilde{B}_3^{(0)} = B_3^{(0)}$.

Найдя невязку $w_L^{(0)}$, вычисляем соответствующие поправки $\delta B_3^{(0)}$ и $\delta L_3^{(0)}, \delta L_3^{(0)}$, прибавляя которые к $B_3^{(0)}, L_3^{(0)}, L_3^{(0)}$, получим улучшенные в первом приближении значения $B_3^{(1)}, L_3^{(1)}$ широты и долготы точки 3. Выполняется это так:

$$1) \sin A'_{i3} = \frac{\sqrt{1-e^2} \nu_{i3} V_3}{\cos B_3}; \quad 2) \frac{\partial L_3^i}{\partial B_3} = a_{i3} = \frac{\operatorname{tg} A'_{3i}}{V_3^2 \cos B_3};$$

$$3) \delta B_3^{(0)} = -\frac{w_L^{(0)}}{(a_{1,3} - a_{2,3})}; \quad (5.1)$$

$$4) a_{i3} \delta B_3^{(0)} = \delta L_i^{(0)}; \quad 5) B_3^{(1)} = B_3^{(0)} + \delta B_3^{(0)};$$

$$6) L_3^{(1)} = L_1^{(0)} + \delta L_1^{(0)} = L_2^{(0)} + \delta L_2^{(0)}.$$

На этом первое приближение заканчивается.

Переходя ко второму приближению, в качестве исходного берем значение $B_3^{(1)}$ широты точки 3, полученное в итоге первого приближения. При этом вычисления производим с полным числом знаков и определение $\Delta L_{i3}^{(1)}$ выполняем с учетом поправочного члена R_{i3} (3). Таким образом, во изменение и в дополнение к (3.1) будем иметь для второго приближения:

$$B_3^{(1)} \approx B_3; \quad 12) \frac{3}{8} (\kappa^2 \nu \psi)_{i3} \left[\frac{3}{8} \Delta \varphi_{i3} - \frac{1}{4} (\sin 2\varphi_3^i - \sin 2\varphi_3^j) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{32} (\sin 4\varphi_3^i - \sin 4\varphi_3^j) \right] = \Delta R_{i3}(2); \quad (2.2)$$

$$13) \frac{5}{6} e^2 [R_{i3}(2) - \Delta R_{i3}(2)] = R_{i3}(3); \quad 14) \sum_{\lambda=0}^3 R_{i3}(\lambda) = \beta_{i3} \cdot \Delta L_i^{(1)}.$$

Подсчитав $\Delta L_i^{(1)} = \Delta L_1^{(1)}, \Delta L_2^{(1)}$ в соответствии с (2.1) и (2.2), находим согласно (4.1) (с заменой $^{(0)}$ на $^{(1)}$) значения $L_3^{(1)}, L_3^{(1)}$ долготы точки 3 и невязку $w_L^{(1)}$, после чего вычисляем согласно (5.1) (с заменой $^{(x)}$ на $^{(x+1)}$) широту $B_3^{(2)}$ и долготу $L_3^{(2)}$ точки 3 в итоге второго приближения. При этих подсчетах значения $\operatorname{tg} A'_{3i}$ и $\frac{\partial L_3^i}{\partial B_3} = a_{i3}$ можно взять из первого приближения.

По окончании второго приближения производим поверочное третье приближение, в котором ограничиваемся вычислением лишь величин $R_{i3}(0)$ и $R_{i3}(1)$ при $B_3 = B_3^{(2)}$. Остальные же члены $R_{i3}(2)$ и $R_{i3}(3)$ берем из второго приближения. Подсчитав затем соответ-

вующие разности долгот $\Delta L_i^{(2)}$, находим невязку $w_L^{(2)}$ третьего приближения. Если расчеты второго и третьего приближений выполнены правильно, то эта невязка $w_L^{(2)} \approx 0$ в пределах точности вычислений. Тогда в качестве окончательных координат B_3, L_3 определяемой точки 3 принимаем их значения $B_3^{(2)}, L_3^{(2)}$, полученные во втором приближении.

Найдя координаты B_3, L_3 точки 3, вычисляем в случае надобности также обратные азимуты A_{3i} и длины s_{i3} , что может быть выполнено согласно [Дел. 5].

Б. Второй способ решения прямой засечки на сфероиде

Применение этого способа целесообразно в том случае, когда кроме геодезических координат B_3, L_3 определяемой точки 3 нужно знать одновременно расстояния $s_{1,3}, s_{2,3}$ и, может быть, также обратные азимуты $A_{3,1}, A_{3,2}$. Решение прямой засечки по этому способу производится в следующем порядке.

Прежде всего по известным координатам B_1, L_1 и B_2, L_2 исходных точек 1, 2 и по известным азимутам $A_{1,3}, A_{2,3}$ засекающих лучей $\delta L_{1,3}, \delta L_{2,3}$ на этих точках решаем на шаре соответствующую прямую засечку, определяя из этого решения сферические расстояния $\sigma_{1,2}, \sigma_{1,3}, \sigma_{2,3}$ дуг $1^\circ 2^\circ, 1^\circ 3^\circ, 2^\circ 3^\circ$ и сферические углы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ в вершинах $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ сферического треугольника $1^\circ 2^\circ 3^\circ$, отображающего данный сфероидический треугольник 123. Эти вычисления выполняются так:

$$\begin{aligned}
 & 1) 90^\circ - B_1 = \Theta_1, & 2) 90^\circ - B_2 = \Theta_2; \\
 & 3) \frac{1}{2} (\Theta_1 + \Theta_2) = \Theta_{1,2}; & 4) \frac{1}{2} (\Theta_2 - \Theta_1) = \delta\Theta_{1,2}; \\
 & 5) \frac{1}{2} \Delta L_{1,2} = \delta L_{1,2}; & 6) \frac{\sin \delta\Theta_{1,2} \operatorname{ctg} \delta L_{1,2}}{\sin \Theta_{1,2}} = \operatorname{tg} \delta\alpha_{1,2}; \\
 & 7) \frac{\cos \Theta_{1,2} \operatorname{ctg} \delta L_{1,2}}{\cos \Theta_{1,2}} = \operatorname{tg} \alpha_{1,2}; & 8) \alpha_{1,2} + \delta\alpha_{1,2} = \beta_1; \\
 & 9) \alpha_{1,2} - \delta\alpha_{1,2} = \beta_2; & 10) \beta_2 + A_{2,3} = \gamma_1; \\
 & 11) \beta_1 - A_{1,3} = \gamma_2; & 12) \frac{1}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) = \gamma_{1,2}; \\
 & & 13) \frac{1}{2} (\gamma_2 - \gamma_1) = \delta\gamma_{1,2}; \\
 & 14) \frac{\sin \Theta_1}{\sin \beta_2} \sin \Delta L_{1,2} = \frac{\sin \Theta_2}{\sin \beta_1} \sin \Delta L_{1,2} = \sin \sigma_{1,2}; \\
 & 15) \frac{1}{2} \sigma_{1,2} = \delta\sigma_{1,2}; & 16) \frac{\sin \delta\gamma_{1,2}}{\sin \gamma_{1,2}} \operatorname{tg} \delta\sigma_{1,2} = \operatorname{tg} \delta\sigma_0; \\
 & 17) \frac{\cos \delta\gamma_{1,2}}{\cos \gamma_{1,2}} \operatorname{tg} \delta\sigma_{1,2} = \operatorname{tg} \sigma_0; & 18) \sigma_0 + \delta\sigma_0 = \sigma_{1,3}; \\
 & 19) \sigma_0 - \delta\sigma_0 = \sigma_{2,3}; & 20) \frac{\sin \gamma_1}{\sin \sigma_{2,3}} \sin \sigma_{1,2} = \frac{\sin \gamma_2}{\sin \sigma_{1,3}} \sin \sigma_{1,2} = \sin \gamma_3; \\
 & & 21) \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + 180^\circ = \epsilon.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Вычисления на шаре производятся с точностью до 0.00001 для чисел и с точностью до $1''$ или до 0'.0001 для углов.

Далее мы вычисляем с полной точностью вспомогательные величины ν_{i3} , κ_{i3}^2 , p_{i3} , C_0^i , C_{2u}^i , D_{2u}^i , Q_{i3} , φ_{i3} , ϑ_{i3} , $(\nu\mu)_{i3}$ для обеих засекающих сторон $i3 = 1.3, 2.3$, необходимые для решения соответствующих прямых задач согласно [Дел. 4.].

Чтобы начать затем решение указанных прямых задач по стороне 1.3 и по стороне 2.3, нам нужно каким-то образом найти приближенные длины $s_{1.3}^{(0)}$, $s_{2.3}^{(0)}$ этих сторон. Проще всего и, пожалуй, достаточно надежно это можно сделать следующим образом. Исходя из выполненного выше решения прямой засечки на шаре, произведем построение соответствующего сферического треугольника $1^\circ 2^\circ 3^\circ$ на глобусе или построим равноугольное изображение $1' 2' 3'$ этого треугольника на карте. Разбив затем длины засекающих сторон $1^\circ 3^\circ$, $2^\circ 3^\circ$ или $1' 3'$, $2' 3'$ на равное число частей $(ek)_{i3}$, например — на 5, определим для каждой такой части $(ek)_{i3}$ среднюю широту $B_{ek}^{(i3)}$. Для каждой широты $B_{ek}^{(i3)}$ вычислим средний радиус кривизны $R_{ek}^{(i3)}$ и затем подсчитаем их среднее значение $R^{(i3)}$ по каждой засекающей стороне $i3$. Тогда можно принять, что

$$1) s_{1.3}^{(0)} = \sigma_{1.3} R^{(1.3)}, \quad 2) s_{2.3}^{(0)} = \sigma_{2.3} R^{(2.3)}, \quad (2)$$

где $\sigma_{1.3}$, $\sigma_{2.3}$ — найденные выше сферические расстояния.

Теперь переходим к последовательным приближениям, в которых вычисляются совместно улучшенные значения расстояний $s_{1.3}$, $s_{2.3}$ и координат B_3 , L_3 определяемой точки 3. В качестве исходных для этих приближений берутся значения $s_{1.3}^{(0)}$, $s_{2.3}^{(0)}$ расстояний s_{i3} , полученные согласно (2). Каждое x -ое приближение распадается при этом на три ступени:

а) нахождение невязки $w_B^{(x-1)}$ в двух вычисленных значениях $B_3^{(x-1)}$, $B_3^{(x-1)}$ широты точки 3, которая была вызвана ошибочностью полученных в $(x-1)$ -ом приближении значений $s_{1.3}^{(x-1)}$, $s_{2.3}^{(x-1)}$ для расстояний $s_{1.3}$, $s_{2.3}$;

б) нахождение невязки $w_L^{(x-1)}$ в двух вычисленных значениях $L_3^{(x-1)}$, $L_3^{(x-1)}$ долготы точки 3, которая была вызвана той же причиной, что и в (а);

в) составление свода двух плоскостных уравнений с поправками $\delta s_{1.3}^{(x-1)}$, $\delta s_{2.3}^{(x-1)}$ приближенных значений $s_{1.3}^{(x-1)}$, $s_{2.3}^{(x-1)}$ для расстояний s_{i3} и решение этого свода; вычисление соответствующих поправок $\delta B_3^{(x-1)}$, $\delta B_3^{(x-1)}$ и $\delta L_3^{(x-1)}$, $\delta L_3^{(x-1)}$; вычисление улучшенных в x -ом приближении значений $s_{1.3}^{(x)}$, $s_{2.3}^{(x)}$ для сторон s_{i3} и улучшенных значений $B_3^{(x)}$, $L_3^{(x)}$ для координат B_3 , L_3 определяемой точки 3.

Рассмотрим более подробно каждое из этих основных действий, выполняемых в x -ом приближении.

Нахождение невязки $w_B^{(x-1)}$. Взяв в качестве исходных значения $s_{1.3}^{(x-1)}$, $s_{2.3}^{(x-1)}$ расстояний s_{i3} , полученные в предшествующем $(x-1)$ -ом приближении, вычисляем согласно [Дел. 4.1] широту B_3 точки 3 дважды — по стороне 1.3 и по стороне 2.3. При этом мы используем указанный там прием резкого усиления сходимости при вычислении $\Delta\varphi_{i3}^{(x-1)}$. В итоге решения этих двух задач мы получаем два соответствующих значения $B_3^{(x-1)}$, $B_3^{(x-1)}$ для широты B_3 точки 3, и тогда

$$w_B^{(x-1)} = B_3^{(x-1)} - B_3^{(x-1)}. \quad (3)$$

Нахождение невязки $w_L^{(x-1)}$. Взяв в качестве исходных значения $\varphi_3^{(x-1)}$, $\varphi_3^{(x-1)}$ преобразованной широты φ_3 точки 3, которые были получены при вычислении двух значений $B_3^{(x-1)}$, $B_3^{(x-1)}$ широты B_3 этой точки, мы определяем затем согласно [Дел. 4.4] долготу L_3 точки 3 дважды — по стороне 1.3 и по стороне 2.3. В итоге решения этих двух частных задач мы получаем два значения $L_3^{(x-1)}$, $L_3^{(x-1)}$ для долготы L_3 точки 3, и тогда:

$$w_L^{(x-1)} = L_3^{(x-1)} - L_3^{(x-1)}. \quad (4)$$

Вычисление $s_{13}^{(x)}$, $B_3^{(x)}$, $L_3^{(x)}$. Найдя невязки $w_B^{(x-1)}$, $w_L^{(x-1)}$, составляем свод двух плоскостных уравнений с искомыми поправками $\delta s_{1.3}^{(x-1)}$, $\delta s_{2.3}^{(x-1)}$ расстояний $s_{1.3}^{(x-1)}$, $s_{2.3}^{(x-1)}$ и свободными членами $w_B^{(x-1)}$, $w_L^{(x-1)}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial B_3^1}{\partial s_{1.3}} \delta s_{1.3}^{(x-1)} - \frac{\partial B_3^2}{\partial s_{2.3}} \delta s_{2.3}^{(x-1)} + w_B^{(x-1)} = 0; \\ \frac{\partial L_3^1}{\partial s_{1.3}} \delta s_{1.3}^{(x-1)} - \frac{\partial L_3^2}{\partial s_{2.3}} \delta s_{2.3}^{(x-1)} + w_L^{(x-1)} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Входящие сюда коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} 1) \sin A'_{3i} &= \frac{\sqrt{1-e^2} \nu_{i3} V_3^i}{\cos B_3^i}; & 2) \frac{\partial B_3^i}{\partial s_{i3}} &= \frac{\rho''}{M_3} \cos A'_{3i}; \\ 3) \frac{\partial L_3^i}{\partial s_{i3}} &= \frac{\rho''}{N_3} \sin A'_{3i}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} 1) M &= \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 B)^{3/2}}; & 2) N &= \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 B)^{1/2}}; \\ 3) \rho'' &= 206264.8. \end{aligned} \quad (7)$$

Определив из решения свода (5) поправки $\delta s_{i3}^{(x-1)}$, вычисляем соответствующие поправки $\delta B_i^{(x-1)}$, $\delta L_i^{(x-1)}$:

$$1) \delta B_i^{(x-1)} = \frac{\partial B_3^i}{\partial s_{i3}} \delta s_{i3}^{(x-1)}; \quad 2) \delta L_i^{(x-1)} = \frac{\partial L_3^i}{\partial s_{i3}} \delta s_{i3}^{(x-1)} \quad (8)$$

Теперь улучшенные в итоге x -го приближения значения $s_{i3}^{(x)}$, $B_3^{(x)}$, $L_3^{(x)}$ расстояний s_{i3} и координат B_3 , L_3 найдутся так:

$$\begin{aligned} 1) s_{i3}^{(x)} &= s_{i3}^{(x-1)} + \delta s_{i3}^{(x-1)}; \\ 2) B_3^{(x)} &= B_3^{(x-1)} + \delta B_3^{(x-1)} = B_3^{(x-1)} + \delta B_3^{(x-1)}; \\ 3) L_3^{(x)} &= L_3^{(x-1)} + \delta L_3^{(x-1)} = L_3^{(x-1)} + \delta L_3^{(x-1)}, \end{aligned} \quad (9)$$

На этих трех основных действиях x -ое приближение заканчивается. Опыт показывает, что при длинах s_{i3} засекающих сторон до 10000 км достаточно двух приближений; в третьем же приближении путем сокращенного расчета нужно только убедиться, что новые значения $s_{i3}^{(2)}$, $B_3^{(2)}$, $L_3^{(2)}$ расстояний и координат дают невязки $w_B^{(2)} \approx 0$, $w_L^{(2)} \approx 0$ в пределах точности вычислений.

В случае надобности, после определения s_{iz} , B_z , L_z могут быть найдены согласно [Дел. 4.2] также обратные азимуты A_{zi} лучей $\mathcal{L}_{zi}$ на засекаемой точке 3.

Дел. 7. Некоторые обобщения и дополнения

Рассмотрим некоторые обобщения и дополнения, относящиеся к решению первых трех задач на земном сфероиде.

Дополнение 1. Прежде всего найдем значение преобразованной широты $\varphi_0 = -\bar{\varphi}_0$ для северных $O^{(s)}$ и южных $\bar{O}^{(s)}$ вершин выравненной кривой Γ , исходя из введенных в делянке 3 обозначений ν , τ и подстановки,

$$\sin \varphi = \tau \sin B.$$

Заметив, что в вершинах $O^{(s)}$, $\bar{O}^{(s)}$ выравненной кривой Γ соответствующий азимут $A_0 = A_{\bar{0}} \pm \pi = \frac{\pi}{2}$, найдем:

$$1) \nu^2 = \frac{r^2}{a^2} \sin^2 A = \frac{r_0^2}{a^2} \sin^2 A_0 = \frac{\cos^2 B_0}{1 - e^2 \sin^2 B_0};$$

$$2) 1 - e^2 \nu^2 = \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \sin^2 B_0};$$

$$3) 1 - \nu^2 = \frac{(1 - e^2) \sin^2 B_0}{1 - e^2 \sin^2 B_0}; \quad 4) \tau^2 = \frac{1 - e^2 \nu^2}{1 - \nu^2} = \operatorname{cosec}^2 B_0; \quad 5) \sin \varphi_0 = 1.$$

Отсюда следует, что независимо от значения геодезической широты $B_0 = -\bar{B}_0$ для вершин $O^{(s)}$, $\bar{O}^{(s)}$ выравненной кривой Γ получим всегда

$$\varphi_0 = -\bar{\varphi}_0 = \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

Обобщенные разложения. Используем равенство (1) для получения некоторых соотношений, имеющих более общий вид, чем в делянках 4—6.

Дело в том, что разложения, которые мы применяли при решении прямой и обратной задач для дуги $\Delta\Gamma_{1,2}$ выравненной кривой $\Gamma_{1,2}$ на земном сфероиде, а также для решения прямой сфероидической засечки, были получены из замкнутых выражений (26) делянки 3 в предположении, что вершины $O_{ij}^{(s)}$, $\bar{O}_{ij}^{(s)}$, $\hat{O}_{ij}^{(s)}$, $\bar{\hat{O}}_{ij}^{(s)}$ выравненной кривой Γ_{ij} расположены вне соответствующей дуги $\Delta\Gamma_{ij}$. В том же случае, когда на выравненной дуге $\Delta\Gamma_{ij}$ между концевыми ее точками i, j лежит одна из вершин $O_{ij}^{(s)}$, $\bar{O}_{ij}^{(s)}$, $\hat{O}_{ij}^{(s)}$, $\bar{\hat{O}}_{ij}^{(s)}$ или даже несколько таких вершин (рис. 1), то предшествующие разложения для решения указанных выше задач должны быть надлежащим образом обобщены.

Для получения соответствующих обобщений будем исходить из ранее найденных разложений для вычисления расстояния s_{ij} и разности долгот ΔL_{ij} между концевыми точками i, j выравненной дуги $\Delta\Gamma_{ij}$. Но только теперь мы разобьем всю дугу $\Delta\Gamma_{ij}$ на ряд частных дуг $\Delta\Gamma_{x, x+1}$, выбрав при этом в качестве промежуточных наиболее подходящие точки $x, x+1$, что будет сделано несколько позже. В таком случае разложения, приведенные в делянках 4, 5 и используемые также в делянке 6, при решении прямой сфероидической засечки, могут быть представлены в следующем обобщенном виде:

$$\begin{aligned}
1) \frac{s_{ij}}{a} &= \mu_{ij} \sum_{x=i}^{x+1=j} \beta_{x,x+1} \int_{\varphi_x}^{\varphi_{x+1}} \frac{d\varphi}{(1-k_{ij}^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} = \\
&= \mu_{ij} \sum_{x=i}^{x+1=j} \beta_{x,x+1} \int_{\varphi_x}^{\varphi_{x+1}} \left[\sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda \binom{-3/2}{\lambda} k_{ij}^{2\lambda} \sin^{2\lambda} \varphi d\varphi \right] = \\
&= (\mu C_0)_{ij} \sum_{x=i}^{x+1=j} \beta_{x,x+1} (\varphi_{x+1} - \varphi_x) + \\
&+ \mu_{ij} \sum_{x=i}^{x+1=j} \beta_{x,x+1} \left[\sum_{u=0}^n C_{2u} (\sin 2u\varphi_{x+1} - \sin 2u\varphi_x) \right]_{ij} = \\
&= \mu_{ij} C_0^{(ij)} \sum_{x=i}^{x+1=j} \beta_{x,x+1} (\varphi_{x+1} - \varphi_x) + \\
&+ \mu_{ij} \sum_{u=1}^n C_{2u}^{(ij)} \left[\sum_{x=i}^{x+1=j} \beta_{x,x+1} (\sin 2u\varphi_{x+1} - \sin 2u\varphi_x) \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \sum_{x=i}^{x+1=j} \beta_{x,x+1} (\varphi_{x+1} - \varphi_x) &= \frac{s_{ij}}{a (\mu C_0)_{ij}} - \\
- \sum_{x=i}^{x+1=j} \beta_{x,x+1} \left[\sum_{u=1}^n D_{2u}^{(ij)} (\sin 2u\varphi_{x+1} - \sin 2u\varphi_x) \right] &= \\
= \frac{s_{ij}}{a (\mu_{ij} C_0^{(ij)})} - \sum_{u=1}^n D_{2u}^{(ij)} \left[\sum_{x=i}^{x+1=j} \beta_{x,x+1} (\sin 2u\varphi_{x+1} - \sin 2u\varphi_x) \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \Delta L_{ij} &= (\nu\mu)_{ij} \sum_{x=i}^{x+1=j} \beta_{x,x+1} \int_{\varphi_x}^{\varphi_{x+1}} \frac{d\varphi}{(1-m_{ij}^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{1-k_{ij}^2 \sin^2 \varphi}} = \\
&= \sum_{x=i}^{x+1=j} \beta_{x,x+1} \left[\sum_{\lambda=0}^n \nu_{ij} \mu_{ij} F_{x,x+1}(\lambda) \right] = \sum_{x=i}^{x+1=j} \beta_{x,x+1} \left[\sum_{\lambda=0}^n R_{x,x+1}(\lambda) \right] = \\
&= \sum_{\lambda=0}^n \left[\sum_{x=i}^{x+1=j} \beta_{x,x+1} R_{x,x+1}(\lambda) \right] = \sum_{\lambda=0}^n R_{ij}(\lambda),
\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$a) R_{ij}(0) = \frac{\nu_{ij}}{|\nu_{ij}|} \sqrt{1-e^2} \sum_{x=i}^{x+1=j} \beta_{x,x+1} [\arctg(p_{ij} \operatorname{tg} \varphi_{x+1}) - \arctg(p_{ij} \operatorname{tg} \varphi_x)] =$$

$$= \frac{\nu_{ij}}{|\nu_{ij}|} \sqrt{1-e^2} \sum_{x=i}^{x+1=j} \beta_{x,x+1} [\vartheta_{x+1} - \vartheta_x];$$

$$b) R_{ij}(1) = \frac{1}{2} e^2 R_{ij}(0) - \frac{e^2}{2} (\nu\mu)_{ij} \sum_{x=i}^{x+1=j} \beta_{x,x+1} (\varphi_{x+1} - \varphi_x);$$

$$\begin{aligned} \theta) R_{ij}(2) = \frac{3}{4} e^2 R_{ij}(1) - \frac{3}{16} e^2 (k^2 \nu \nu)_{ij} \sum_{x=i}^{x+1-j} \left[\beta_{x,x+1} (\varphi_{x+1} - \varphi_x) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \beta_{x,x+1} (\sin 2\varphi_{x+1} - \sin 2\varphi_x) \right], \end{aligned}$$

и т. д. (см. Дел. 4.4). Здесь

$$\beta_{x,x+1} = \frac{\cos A_{x,x+1}}{|\cos A_{x,x+1}|} = \frac{\varphi_{x+1} - \varphi_x}{|\varphi_{x+1} - \varphi_x|} = \pm 1.$$

Допустим теперь, что в разложениях (2) точки $x, x+1$ располагаются в зависимости от границ изменения азимута A_{ij} в одной из следующих последовательностей (см. Дел. 1.3 и рис. 1):

- а) $x = i, O_{ij}^{(1)}, \mathcal{O}_{ij}^{(1)}, \bar{O}_{ij}^{(1)}, \mathcal{O}_{ij}^{(2)}, \dots, x+1 = j$ при $0 \leq A_{ij} < \frac{\pi}{2}$ (рис. 1, а);
б) $x = i, \mathcal{O}_{ij}^{(1)}, \bar{O}_{ij}^{(1)}, \mathcal{O}_{ij}^{(2)}, \dots, x+1 = j$ при $\frac{\pi}{2} \leq A_{ij} < \pi$ (рис. 1, б);
в) $x = i, \hat{\mathcal{O}}_{ij}^{(1)}, \hat{\bar{O}}_{ij}^{(2)}, \dots, x+1 = j$ при $\pi \leq A_{ij} < \frac{3}{2}\pi$ (рис. 1, в);
г) $x = i, \hat{O}_{ij}^{(1)}, \hat{\mathcal{O}}_{ij}^{(1)}, \hat{\bar{O}}_{ij}^{(1)}, \hat{\mathcal{O}}_{ij}^{(2)}, \dots, x+1 = j$ при $\frac{3}{2}\pi \leq A_{ij} < 2\pi$ (рис. 1, г).

Тогда не трудно прежде всего подсчитать, что при таком расположении точек $x, x+1$ будем иметь всегда:

$$1) \sum_{x=i}^{x+1-j} \beta_{x,x+1} (\sin 2u\varphi_{x+1} - \sin 2u\varphi_x) = \beta'_{ji} \sin 2u\varphi_j - \beta_{ij} \sin 2u\varphi_i, \quad (4)$$

где

$$2) \beta_{ij} = \frac{\cos A_{ij}}{|\cos A_{ij}|}, \quad 3) \beta'_{ji} = \frac{\cos A'_{ji}}{|\cos A'_{ji}|}, \quad 4) A'_{ji} = A_{ji} \pm 180^\circ.$$

Сказанное вытекает из того, что если $x, x+1 = \mathcal{O}_{ij}^{(s)}, \hat{\mathcal{O}}_{ij}^{(s)}$, то $\varphi_x = \varphi_{x+1} = 0$; если же $x, x+1 = O_{ij}^{(s)}, \hat{O}_{ij}^{(s)}, \bar{O}_{ij}^{(s)}, \hat{\bar{O}}_{ij}^{(s)}$, то $\varphi_x, \varphi_{x+1} = \pm \frac{\pi}{2}$.

Значит, во всех этих случаях

$$\sin 2u\varphi_{x+1} - \sin 2u\varphi_x = 0, \quad (x \neq i, x+1 \neq j).$$

Что касается сумм

$$1) \sum_{x=i}^{x+1-j} \beta_{x,x+1} (\varphi_{x+1} - \varphi_x) = \Delta\varphi_{ij}, \quad 2) \sum_{x=i}^{x+1-j} \beta_{x,x+1} (\vartheta_{x+1} - \vartheta_x) = \Delta\vartheta_{ij}, \quad (5)$$

то на основании (1) и смысла множителя $\beta_{x,x+1}$ имеем всегда:

$$1) \Delta\varphi_{ij} = q\pi + (\beta'_{ji} \varphi_j - \beta_{ij} \varphi_i); \quad 2) \Delta\vartheta_{ij} = q\pi + (\beta'_{ji} \vartheta_j - \beta_{ij} \vartheta_i), \quad (6)$$

где q есть число вершин $O_{ij}^{(s)}, \bar{O}_{ij}^{(s)}$ или $\hat{O}_{ij}^{(s)}, \hat{\bar{O}}_{ij}^{(s)}$, содержащихся между концевыми точками i, j дуги $\Delta\Gamma_{ij}$, причем в (6) преобразованные широты φ_i, φ_j и дуги ϑ_i, ϑ_j берутся с их знаками $\pm$. Таким образом, например, для дуг $\Delta\Gamma_{ij}$, изображенных на рис. 1а, 1б, имеем:

Рис. 1, а: 1) $\Delta\varphi_{ij} = 3\pi - (\varphi_j + \varphi_i)$, 2) $\Delta\vartheta_{ij} = 3\pi - (\vartheta_j + \vartheta_i)$,
 $(\varphi_i, \vartheta_i > 0, \varphi_j, \vartheta_j < 0)$;

Рис. 1, б: 1) $\Delta\varphi_{ij} = 2\pi - (\bar{\varphi}_j - \varphi_i)$, 2) $\Delta\vartheta_{ij} = 2\pi - (\bar{\vartheta}_j - \vartheta_i)$,
 $(\varphi_i, \vartheta_i > 0, \bar{\varphi}_j, \bar{\vartheta}_j < 0)$.

Равенства (4) — (6) являются обобщением соответствующих частных равенств в деланке 4, которые там были записаны без множителя $\beta_{ij} = \beta'_{ji}$, перенесенного в левую часть. Вставляя равенства (4) — (6) в разложения общего вида (2), получим следующие окончательные выражения для этих разложений при любой длине s_{ij} выравненной дуги $\Delta\Gamma_{ij}$:

$$\begin{aligned} 1) \frac{s_{ij}}{a} &= \nu_{ij} C_0^{(ij)} \Delta\varphi_{ij} + \nu_{ij} \sum_{u=1}^n C_{2u}^{(ij)} (\beta'_{ji} \sin 2u\varphi_j - \beta_{ij} \sin 2u\varphi_i); \\ 2) \Delta\varphi_{ij} &= \frac{s_{ij}}{a\nu_{ij} C_0^{(ij)}} - \sum_{u=1}^n D_{2u}^{(ij)} (\beta'_{ji} \sin 2u\varphi_j - \beta_{ij} \sin 2u\varphi_i); \\ 3) \Delta L_{ij} &= \sum_{\lambda=0}^n R_{ij}(\lambda), \end{aligned} \quad (2a)$$

где

$$a) R_{ij}(0) = \frac{\nu_{ij}}{|\nu_{ij}|} \sqrt{1 - e^2} \Delta\vartheta_{ij}; \quad б) R_{ij}(1) = \frac{e^2}{2} R_{ij}(0) - \frac{e^2}{2} (\nu_\mu)_{ij} \Delta\varphi_{ij};$$

$$в) R_{ij}(2) = \frac{3}{4} e^2 R_{ij}(1) - \frac{3}{16} e^2 (k^2 \nu_\mu)_{ij} \left[\Delta\varphi_{ij} - \frac{1}{2} (\beta'_{ji} \sin 2\varphi_j - \beta_{ij} \sin 2\varphi_i) \right];$$

$$г) R_{ij}(3) = \frac{5}{6} e^2 R_{ij}(2) - \frac{5}{16} e^2 (k^4 \nu_\mu)_{ij} \left[\frac{3}{8} \Delta\varphi_{ij} - \frac{1}{4} (\beta'_{ji} \sin 2\varphi_j - \beta_{ij} \sin 2\varphi_i) + \frac{1}{32} (\beta'_{ji} \sin 4\varphi_j - \beta_{ij} \sin 4\varphi_i) \right],$$

и т. д.

Дополнение 2. Исходя из общих разложений (2а), покажем, что азимут $A_{1,2}$ выравненной дуги $\Delta\Gamma_{1,2}$, идущей от точки 1 к точке 2 по кратчайшему пути, не равен азимуту $\check{A}_{1,2}$ выравненной дуги $\check{\Delta}\Gamma_{1,2}$, соединяющей те же точки 1, 2, но проведенной в противоположном направлении и потому вообще не являющейся кратчайшей на сфероиде между указанными точками.

Предположим ради определенности, что $0 < A_{1,2} < \frac{\pi}{2}$ и что между концевыми точками 1, 2 дуги $\Delta\Gamma_{1,2}$ не содержится вершин выравненной кривой $\Gamma_{1,2}$. Тогда азимут $\check{A}_{1,2}$ противоположной дуги $\check{\Delta}\Gamma_{1,2}$ будет удовлетворять условию $\pi < \check{A}_{1,2} < \frac{3}{2}\pi$, и между концевыми точками 1, 2 этой дуги будет содержаться две вершины кривой $\check{\Gamma}_{1,2}$: южная $\check{O}_{1,2}$ и северная $\check{O}_{1,2}$. Учитывая указанные особенности расположения выравненных дуг $\Delta\Gamma_{1,2}$ и $\check{\Delta}\Gamma_{1,2}$ на сфероиде, напомним для них,

ограничиваясь 2 членами, общие выражения разностей долгот $\Delta L_{1,2}$, $\Delta \overset{\vee}{L}_{1,2}$ согласно (2а.3), (6) и [Дел. 5; (5)]:

$$\begin{aligned}\Delta L_{1,2} &= \sqrt{1-e^2} (\vartheta_2 - \vartheta_1) + \frac{e^2}{2} \sqrt{1-e^2} (\vartheta_2 - \vartheta_1) - \frac{e^2}{2} p_{1,2} \sqrt{1-e^2} (\varphi_2 - \varphi_1); \\ \Delta \overset{\vee}{L}_{1,2} &= -\sqrt{1-e^2} \left[2\pi - (\overset{\vee}{\vartheta}_2 - \overset{\vee}{\vartheta}_1) \right] - \frac{e^2}{2} \sqrt{1-e^2} [2\pi - (\overset{\vee}{\vartheta}_2 - \overset{\vee}{\vartheta}_1)] + \\ &\quad + \frac{e^2}{2} p_{1,2} \sqrt{1-e^2} [2\pi - (\overset{\vee}{\varphi}_2 - \overset{\vee}{\varphi}_1)],\end{aligned}$$

причем эти разложения будут точны до малостей порядка e^4 [см. (2а)]. Так как $\Delta L_{1,2} > 0$, а $\Delta \overset{\vee}{L}_{1,2} < 0$, и концы дуг $\Delta \Gamma_{1,2}$, $\Delta \overset{\vee}{\Gamma}_{1,2}$ — одни и те же, то $\Delta L_{1,2} - \Delta \overset{\vee}{L}_{1,2} = 2\pi$, и мы будем иметь после деления обеих частей на $\sqrt{1-e^2}$:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta L_{1,2} - \Delta \overset{\vee}{L}_{1,2}}{\sqrt{1-e^2}} &= 2\pi \left(1 + \frac{e^2}{2} + \frac{3}{8} e^4 \right) = 2\pi \left(1 + \frac{e^2}{2} \right) + \\ &\quad + (1 + \frac{e^2}{2}) [(\vartheta_2 - \vartheta_1) - (\overset{\vee}{\vartheta}_2 - \overset{\vee}{\vartheta}_1)] - 2\pi \frac{e^2}{2} p_{1,2} - \\ &\quad - \frac{e^2}{2} [p_{1,2} (\varphi_2 - \varphi_1) - \overset{\vee}{p}_{1,2} (\overset{\vee}{\varphi}_2 - \overset{\vee}{\varphi}_1)].\end{aligned}$$

Разделив затем последнее равенство на 2π , получим далее опять с точностью до e^4 :

$$\begin{aligned}\frac{3}{8} e^4 \approx 0 &\approx \frac{1}{2\pi} [(\vartheta_2 - \vartheta_1) - (\overset{\vee}{\vartheta}_2 - \overset{\vee}{\vartheta}_1)] - \frac{e^2}{2} p_{1,2} - \\ &\quad - \frac{e^2}{4\pi} p_{1,2} [(\varphi_2 - \varphi_1) - (\overset{\vee}{\varphi}_2 - \overset{\vee}{\varphi}_1)].\end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{1}{2\pi} [(\vartheta_2 - \vartheta_1) - (\overset{\vee}{\vartheta}_2 - \overset{\vee}{\vartheta}_1)] = \frac{e^2}{2} p_{1,2} + \text{ост.}(e^4) = \frac{e^2}{2} \cos \overset{\vee}{B}_0 + \text{ост.}(e^4), \quad (7)$$

и, значит, в данном случае

$$\overset{\vee}{\vartheta}_2 - \overset{\vee}{\vartheta}_1 \neq \vartheta_2 - \vartheta_1. \quad (8)$$

Но, согласно деланке 5:

$$\begin{aligned}1) \quad \vartheta_x &= \arctg(p \operatorname{tg} \varphi_x) = \arctg \frac{p \sin B_x}{\sqrt{\cos^2 B_x - p^2}} = \\ &= \arctg \frac{\cos B_0 \sin B_x}{\sqrt{\cos^2 B_x - \cos^2 B_0}} = f(B_0, B_x); \\ 2) \quad \sin A_{1,2} &= \frac{\nu_{1,2}}{|\nu_{1,2}|} \frac{\cos B_0}{\cos B_1} \sqrt{\frac{1 - e^2 \sin^2 B_1}{1 - e^2 \sin^2 B_0}} = \Psi(B_0, B_1).\end{aligned}$$

Поэтому из неравенства (8) следует, что

$$f(\overset{\vee}{B}_0, B_2) - f(\overset{\vee}{B}_0, B_1) \neq f(B_0, B_2) - f(B_0, B_1), \quad (9)$$

т. е.

$$\overset{\vee}{B}_0 \neq B_0.$$

Отсюда заключаем, что

$$\sin A_{1.2} = \Psi(B_0, B_1) \neq \Psi(\overset{\vee}{B}_0, B_1) = \sin \overset{\vee}{A}_{1.2}. \quad (10)$$

Наше утверждение доказано.

Из рассмотрения преобразований, выполненных при выводе неравенств (9), (10), вытекает, что эти неравенства будут сохраняться и в том случае, когда на дуге $\Delta\Gamma_{1.2}$ находится, например, северная вершина $O_{1.2}$ выравненной кривой $\Gamma_{1.2}$, а на противоположной дуге $\overset{\vee}{\Delta}\Gamma_{1.2}$ лежит южная вершина $\overset{\vee}{O}_{1.2}$ соответствующей выравненной кривой $\Gamma_{1.2}$. Неравенства (9) и (10) еще более усилятся, если на дуге $\overset{\vee}{\Delta}\Gamma_{1.2}$ содержится $q > 2$ вершин $\overset{\vee}{O}_{1.2}$, $\overset{\vee}{O}_{1.2}$ выравненной кривой $\Gamma_{1.2}$.

Дополнение 3. Подсчитаем разность долгот $\Delta L_{1.2}$ для того случая, когда начало 1 дуги $\Delta\Gamma_{1.2}$ есть южная вершина $\overset{\vee}{O}_{1.2}$ выравненной кривой $\Gamma_{1.2}$, а конец 2 дуги $\Delta\Gamma_{1.2}$ есть северная вершина $O_{1.2}$ кривой $\Gamma_{1.2}$, причем дуга $\Delta\Gamma_{1.2}$ пересекает экватор под азимутом $A_9^{(1.2)}$, который удовлетворяет условию: $0 < A_9^{(1.2)} < \frac{\pi}{2}$.

При такой постановке задачи будем иметь прежде всего:

$$\begin{aligned} 1) \frac{\varphi_{1.2}}{|\varphi_{1.2}|} &= +1; & 2) \varphi'_1 = \bar{\varphi}_0 = -\frac{\pi}{2}, & \varphi_2 = \varphi_0 = +\frac{\pi}{2}; \\ 3) \vartheta_1 &= -\frac{\pi}{2}, & \vartheta_2 &= +\frac{\pi}{2}; & 4) A_{1.2} &= A'_{2.1} = \frac{\pi}{2}; \\ 5) \beta_{1.2} &= \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{|\varphi_2 - \varphi_1|} = +1 = \beta'_{2.1}; & 6) \beta'_{2.1}\varphi_2 - \beta_{1.2}\varphi_1 &= \Delta\varphi_{1.2} = \pi; \\ 7) \beta'_{2.1}\vartheta_2 - \beta_{1.2}\vartheta_1 &= \Delta\vartheta_{1.2} = \pi; & 8) \beta'_{2.1}\sin 2u\varphi_2 - \beta_{1.2}\sin 2u\varphi_1 &= 0. \end{aligned}$$

Вставляя найденные значения вспомогательных величин в разложение общего вида (2а.3) и используя также равенства (3) — (8) делаянки 5, выразим искомую разность долгот $\Delta L_{1.2}$ для дуги $\Delta\Gamma_{1.2}$ через вершинную широту B_0 :

$$\begin{aligned} \Delta L_{1.2} &= \sqrt{1-e^2} \pi + \frac{e^2}{2} \sqrt{1-e^2} \pi (1 - \cos B_0) + \\ &+ \left[\frac{3}{8} e^4 \sqrt{1-e^2} \pi (1 - \cos B_0) - \frac{3}{16} e^4 \sqrt{1-e^2} \pi \sin B_0 \cos B_0 \right] = \\ &= \sqrt{1-e^2} \pi \left[1 - e^2 \sin^2 \frac{B_0}{2} + \frac{3}{16} e^4 \sin^2 \frac{B_0}{2} - \frac{3}{32} e^4 \sin 2B_0 \right] = \\ &= \sqrt{1-e^2} \pi \left[1 - e^2 \sin^2 B_0 \left(1 - \frac{3}{16} e^2 \right) - \frac{3}{32} e^4 \sin 2B_0 \right] < \pi. \end{aligned}$$

Таким образом, если $0 < A_9^{(1,2)} < \frac{\pi}{2}$, то для данной выравненной дуги $\Delta\Gamma_{1,2}$ разность долгот $\Delta L_{1,2} < \pi$. Отсюда следует, что для противоположной дуги $\Delta\check{\Gamma}_{1,2}$ соответствующая разность долгот

$$\Delta\check{L}_{1,2} = 2\pi - \Delta L_{1,2} > \pi.$$

Из найденных соотношений

$$\Delta L_{1,2} < 0, \quad \Delta\check{L}_{1,2} > 0 \text{ при } A_{1,2} = A'_{2,1} = \frac{\pi}{2}, \quad B_1 = \bar{B}_2 = -B_2,$$

заключаем далее, что длины $s_{1,2}$, $\check{s}_{1,2}$ дуг $\Delta\Gamma_{1,2}$, $\Delta\check{\Gamma}_{1,2}$ также не равны друг другу, а именно $s_{1,2} < \check{s}_{1,2}$.

Наконец, так как для экваториальных азимутов $A_9^{(1,2)}$, $\check{A}_9^{(1,2)}$ дуг $\Delta\Gamma_{1,2}$, $\Delta\check{\Gamma}_{1,2}$ имеем

$$1) A_9^{(1,2)} = F(B_1, B_2, \Delta L_{1,2}), \quad 2) \check{A}_9^{(1,2)} = F(B_1, B_2, \Delta\check{L}_{1,2})$$

и по доказанному выше $\Delta L_{1,2} \neq \Delta\check{L}_{1,2}$, то, следовательно, $A_9^{(1,2)} \neq \check{A}_9^{(1,2)}$.

Дел. 8. Примеры решения новыми способами первых трех основных задач на земном сфероиде

В заключение рассмотрим примеры решения предлагаемыми новыми способами первых трех основных задач на земном сфероиде.

Пример 1. (прилож. 1, рис. 2а). Дается решение прямой задачи для выравненной дуги $\Delta\Gamma_{1,2}$ при расстоянии $s_{1,2} = 25649$ км и азимуте $A_{1,2} = 229^\circ 03'$, причем $B_1 > 0$, $B_2 = \bar{B}_2 < 0$. Проложив дугу $\Delta\Gamma_{1,2}$

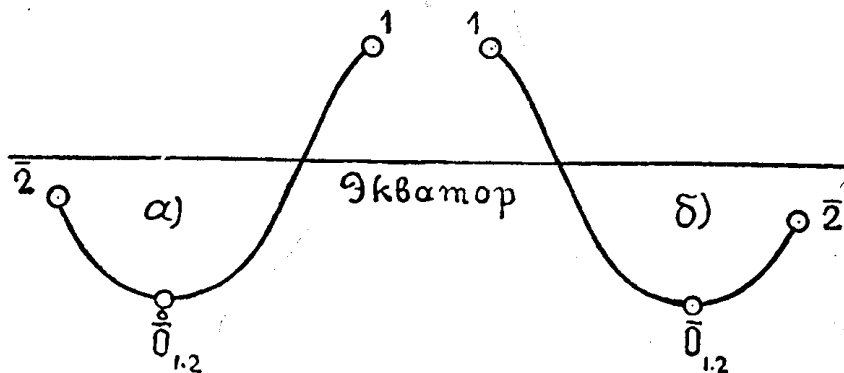


Рис. 2.

длины $s_{1,2}$ и под азимутом $A_{1,2}$ на глобусе, найдем, что между концевыми точками 1 и $2 = \bar{2}$ этой дуги лежит южная вершина $\check{O}_{1,2}$ кривой $\Gamma_{1,2}$, а азимут $A'_{2,1}$ в точке $2 = \bar{2}$ лежит в пределах $\frac{3}{2}\pi < A'_{2,1} < 2\pi$.

Применяя поэтому для решения данной задачи разложения общего вида [Дел. 7; (2а)], будем иметь следующие рабочие выражения для вспомогательных величин $\beta_{1,2}$, $\beta'_{2,1}$,

$\Delta\varphi_{1,2}$, $\Delta\vartheta_{1,2}$ и $(\beta'_{2,1} \sin 2u\varphi_2 - \beta_{1,2} \sin 2u\varphi_1)$:

- 1) $\beta_{1,2} = \frac{\cos A_{1,2}}{|\cos A_{1,2}|} = -1$, $\beta'_{2,1} = \frac{\cos A'_{2,1}}{|\cos A'_{2,1}|} = +1$;
- 2) $\Delta\varphi_{1,2} = \pi + \beta'_{2,1} \bar{\varphi}_2 - \beta_{1,2} \varphi_1 = \pi + \varphi_1 - |\bar{\varphi}_2|$;
- 3) $\Delta\vartheta_{1,2} = \pi + \beta'_{2,1} \bar{\vartheta}_2 - \beta_{1,2} \vartheta_1 = \pi + \vartheta_1 - |\bar{\vartheta}_2|$;
- 4) $\beta'_{2,1} \sin 2u\bar{\varphi}_2 - \beta_{1,2} \sin 2u\varphi_1 = \sin 2u\varphi_1 - \sin 2u|\bar{\varphi}_2|$.

Решение задачи разбиваем на четыре части: 1) вычисление величин ν , k^2 , τ^2 , φ_1 , C_0 , D_{2u} ; 2) вычисление B_2 ; 3) вычисление L_2 ; 4) вычисление $A_{2,1}$. При нахождении чисел C_0 , D_{2u} используем готовые значения вспомогательных коэффициентов $c_{2u,2\lambda}$, помещенные в приложении 3. При вычислении преобразованной широты φ_2 применяем ускоренный способ расчета поправки $\Delta\varphi_{1,2}$, указанный в примечании к [Дел. 4; (10)].

Пример 2. (прилож. 2, рис. 2, б). Дается решение обратной задачи для выравненной дуги $\Delta\Gamma_{1,2}$, длина которой $s_{1,2} = 24447$ км, а азимут $A_{1,2} = 147^\circ 27'$, причем $B_1 > 0$, $B_2 = \bar{B}_2 < 0$. После проложения дуги $\Delta\Gamma_{1,2}$ на глобусе выяснилось, что между концами 1, 2 этой дуги находится южная вершина $\bar{O}_{1,2}$ кривой $\Gamma_{1,2}$, а азимут $A'_{2,1}$ лежит в пределах $0 < A'_{2,1} < \frac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что

- 1) $\beta_{1,2} = -1$, $\beta'_{2,1} = +1$;
- 2) $\Delta\varphi_{1,2} = \pi + \varphi_1 - |\bar{\varphi}_2|$;
- 3) $\Delta\vartheta_{1,2} = \pi + \vartheta_1 - |\bar{\vartheta}_2|$;
- 4) $\beta'_{2,1} \sin 2u\bar{\varphi}_2 - \beta_{1,2} \sin 2u\varphi_1 =$
 $= \sin 2u\varphi_1 - \sin 2u|\bar{\varphi}_2|$.

Все существенные вопросы решения данной задачи изложены достаточно подробно в деланке 5. Здесь же только отметим, что если в прямой задаче основной рабочей величиной является $\nu_{1,2} = \sin A^{(1,2)}_9$, то здесь такой величиной будет $p_{1,2} = \cos B^{(1,2)}_0$, которая находится последовательным приближением из уравнения $\Delta L_{1,2} = \sum_{\lambda=0}^n R_{1,2}(\lambda)$. Для определения величины $p_{1,2}$ с точностью до 8—9 знаков достаточно 2 полных приближений и одного неполного, поверочного приближения даже при $s_{1,2} \approx 25000$ км.

После вычисления основной величины $p_{1,2}$, а попутно — и разности $\Delta\varphi_{1,2}$, находим азимуты $A_{1,2}$, $A_{2,1}$ и расстояние $s_{1,2}$ из равенств, в которых $\nu_{1,2}$ и $\mu_{1,2}$ выражены через $p_{1,2} = \cos B^{(1,2)}_0$.

Примеры 3 и 4. (приложения 4, 5; рис. 3). В этих примерах дано решение прямой сфероидической засечки двумя путями: а) с вычислением только координат B_3 , L_3 определяемой точки 3, б) с одновременным вычислением расстояний $s_{1,3}$, $s_{2,3}$ и координат B_3 , L_3 .

В обоих примерах решается одна и та же прямая засечка, опорные точки которой 1, 2 взяты вблизи Мурманска и Хабаровска, а определяемая точка 3 находится вблизи Сан-Франциско в США, так что расстояния $s_{1,3}$, $s_{2,3}$ от опорных точек до определяемой оказались почти равными: $s_{1,3} = 8073$ км, $s_{2,3} = 7947$ км. Азимуты засекающих лучей равны соответственно: $A_{1,3} = 341^\circ 13'$, $A_{2,3} = 53^\circ 06'$, причем северный полюс P сфероида попал внутрь треугольника 123 (рис. 3).

Последовательность вычисления прямой сфероидической засечки обоими указанными способами достаточно подробно изложена в де-

лянке 6, но только в данных примерах вместо частных разложений были взяты разложения общего вида [Дел. 7; (2a)], так как на дугах $\Delta\Gamma_{1.3}$ и $\Delta\Gamma_{2.3}$ лежат северные вершины $O_{1.3}$ и $O_{2.3}$ выравненных кривых $\Gamma_{1.3}$, $\Gamma_{2.3}$. Здесь же мы ограничимся лишь отдельными замечаниями.

1. При вычислении прямой засечки по первому способу начальное значение $B_3^{(0)}$ широты определяемой точки 3 было получено ре-

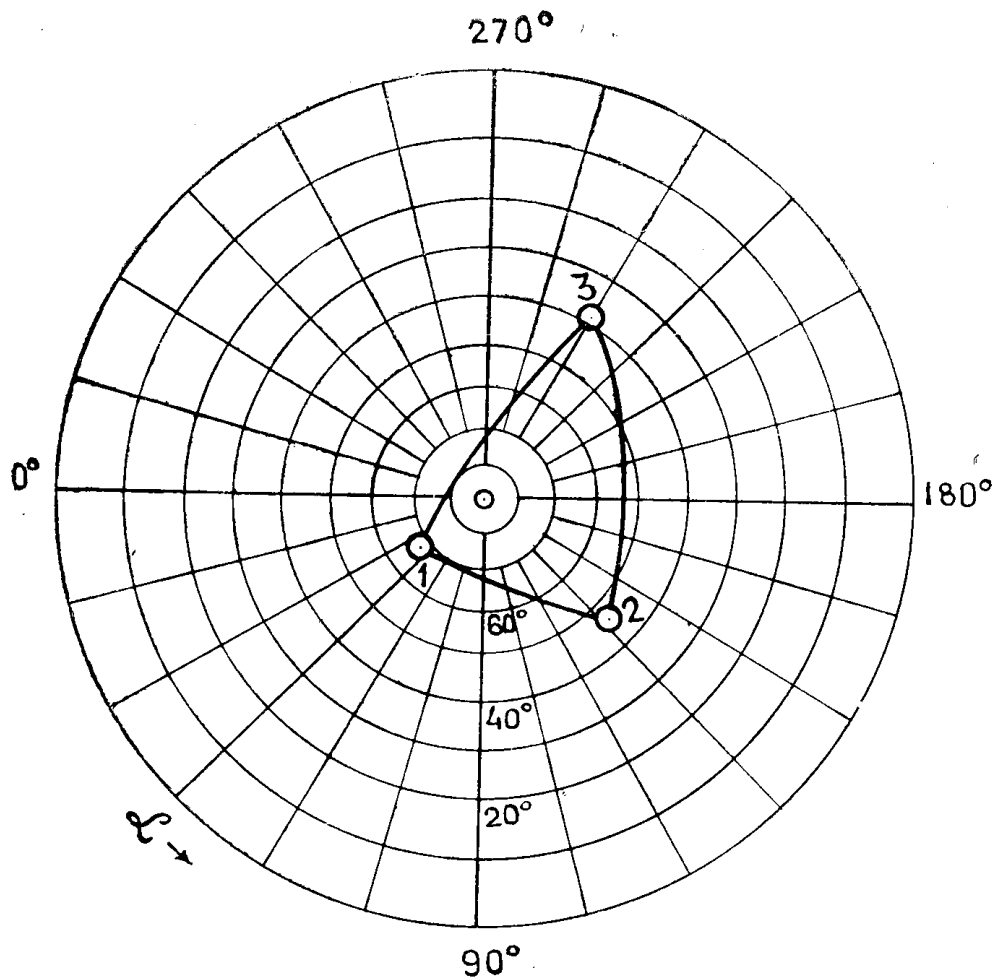


Рис. 3.

шением засечки на шаре с 5 десятичными знаками. Для вычисления координат B_3 , L_3 точки 3 на сфероиде с 8—9 знаками потребовалось два полных приближения (одно — с 6 знаками, другое — с 8—9 знаками) и одно поверочное неполное приближение.

2. При вычислении прямой засечки по второму способу начальные значения $\sigma_{1.3}^{(0)}$, $\sigma_{2.3}^{(0)}$ засекающих сторон 1.3, 2.3 в дуговой мере были получены 5-значным решением засечки на шаре. Но дальше требовалось найти соответствующие начальные значения $s_{1.3}^{(0)}$, $s_{2.3}^{(0)}$ длин этих сторон на сфероиде. С этой целью была вычерчена мелкая картографическая сетка северного полушария в полярной стереографической проекции (рис. 3), на которой затем было построено равноугольное изображение $1'2'3'$ соответствующего сферического треугольника $1^{\circ}2'3'$. Разбив каждую засекающую сторону $i'3' = 1'3'$, $2'3'$ треугольника $1'2'3'$ на четыре части, определили по картографической сетке с точностью

Решение прямой задачи для выравненной дуги $\Delta \Gamma_{1.2}$

1. Исходные данные.		κ^6	0.000 000236	3. Вычисление B_2 .	
		κ^8	0.000 000001 ₅		
B_1	68°34'15''.739			$\lg s_{1.2}$	7.4090 69146
L_1	29°42'16''.347	$\lg \sin B_1$	9.968 88962	$\lg \sqrt{1-e^2\gamma^2}$	9.9998 88636
$A_{1.2}$	229°03'15''.460	$\lg \tau$	0.017 19304	$-\lg(1-e^2)\alpha^2$	6.8017 84509
$s_{1.2}$	25 648 923.7	$\lg \sin \varphi_1$	9.986 08266	$-\lg C_0$	0.0020 21260
		φ_1	75°34'19''.741	$\lg Q$	0.6051 52013
2. Вычисление величин:				Q	4.028 58019
$\gamma, \kappa^2, \tau^2, \varphi, C_0, D_{2u}$				$-(\pi+\varphi_1)$	4.460 57550
		1	1.000 000000	$\varphi_2^{(0)}$	-0.431 99531
		*) $c_{02} \kappa^2$	0.004 637921	=	-24°45'05''.4
$\lg \sin A_{1.2}$	9.878 13727n	$c_{04} \kappa^4$	0.000 026888		
$\lg \cos B_1$	9.562 70597	$c_{06} \kappa^6$	161	$\sin 2\varphi_2^{(0)}$	-0.760 440
$-\lg V_1$	-0.000 19522	$c_{08} \kappa^8$	1	$+\sin 2\varphi_1$	+0.482 605
$-\lg \sqrt{1-e^2}$	-9.998 54166	C_0	+1.004 664971	$\sin 4\varphi_2^{(0)}$	-0.9877
$\lg \gamma$	9.442 10636n			$+\sin 4\varphi_1$	-0.8454
$\lg \gamma^2$	8.884 21272	$c_{22} \kappa^2$	-0.002 318961	$\sin 6\varphi_2^{(0)}$	-0.52
$\lg e^2$	7.825 64818	$c_{24} \kappa^4$	-0.000 017925	$+\sin 6\varphi_1$	+1.00
$\lg e^2\gamma^2$	6.709 86090	$c_{26} \kappa^6$	— 121	$\varepsilon_2^{(0)}$	-0.277 835
		$c_{28} \kappa^8$	— 1	$\varepsilon_4^{(0)}$	-1.8331
e^2	0.006 693422	C_2	-0.002 337008	$\varepsilon_6^{(0)}$	+0.48
$e^2\gamma^2$	0.000 512697			$-D_2\varepsilon_2^{(0)}$	-0.000 646289
γ^2	0.076 59717	$c_{44} \kappa^4$	+0.000 002242	$-D_4\varepsilon_4^{(0)}$	+0.000 004134
$e^2-e^2\gamma^2$	0.006 180725	$c_{46} \kappa^6$	+ 24	$-D_6\varepsilon_6^{(0)}$	+ 13
$1-e^2\gamma^2$	0.999 48730	C_4	+0.000 002266	$\delta\varphi_2^{(0)}$	-0.000 642142
$1-\gamma^2$	0.923 40283			$\cos 2\varphi_2^{(0)}$	+0.649 408
$\lg(e^2-e^2\gamma^2)$	7.791 03942	$C_6=c_{66}\kappa^6$	-0.000 000027	$\cos 4\varphi_2^{(0)}$	-0.156 54
$\lg(1-e^2\gamma^2)$	9.999 77728			$\cos 6\varphi_2^{(0)}$	-0.060
$\lg(1-\gamma^2)$	9.965 39120	$C_2:C_0=D_2$	-0.002 326156	$-2D_2\cos 2\varphi_2^{(0)}$	+0.003 02125
$\lg \kappa^2$	7.791 26214	$C_4:C_0=D_4$	+0.000 002255	$-4D_4\cos 4\varphi_2^{(0)}$	+0.000 00141
$\lg \tau^2$	0.034 38608	$C_6:C_0=D_6$	-0.000 000027	$-6D_6\cos 6\varphi_2^{(0)}$	+ 1
κ^2	0.006 183895			z	+0.003 02267
κ^4	0.000 038241				

) Значения чисел $c_{2u-2\lambda}$ даны в приложении 3.

$1-x=x_1$	+0.996 97733	p	0.275 90490		
$\delta\varphi_2^{(0)}; x_1=\Delta\varphi_2^{(0)}$	-0.000 644089	$\times \omega\sqrt{1-e^2}$	-0.996 6477		
$\varphi_2^{(0)}$	-0.431 99531	$\nu\mu$	-0.274 9800	$\varepsilon_2=\varepsilon_2^{(1)}$	-0.2787
$\varphi_2^{(1)}$	-0.432 63940			$-1/2\varepsilon_2$	+0.1394
$=$	-24°47'18'',282	$\pi+\varphi_1$	4.460 576	$+\Delta\varphi_{1,2}$	+4.0279
		φ_2	-0.432 639	σ_2	+4.1673
$\sin 2\varphi_2^{(1)}$	-0.761 276	$\Delta\varphi_{1,2}$	+4.027 937	$\times 3/16e^2\kappa^2\nu\mu$	-0.00000 21341
$\sin 4\varphi_2^{(1)}$	-0.9873	$\nu\mu$	-0.274 9800	$\Delta R(1)$	-0.00000 8893
$\sin 6\varphi_2^{(1)}$	-0.52	δ	-1,107 602		
$\varepsilon_2^{(1)}$	-0.278 671			$3/4e^2$	0.005 0201
$\varepsilon_4^{(1)}$	-1.8327	$\lg\lg\varphi_2$	9.664 47223n	$\times R(1)$	-0.009 0854
$\varepsilon_6^{(1)}$	+0.48	$\lg p$	9.440 75941	$3/4e^2R(1)$	-0.000 045610
$-D_2\varepsilon_2^{(1)}$	-0.000 648232	$\lg\lg\varphi_1$	0.589 60696	$-\Delta R(1)$	+0.000 008893
$-D_4\varepsilon_4^{(1)}$	+0.000 004133	$\lg\lg(pt_{\frac{1}{2}})$	9.105 23164n	$\nu\mu F(2)=R(2)$	-0.000 037717
$-D_6\varepsilon_6^{(1)}$	+13	$\lg\lg(pt_1)$	0.030 36637		
$\Delta\varphi_2^{(0)}$	-0.000 644086	$pt_2=\vartheta_2$	-7°15'41'',038	$\varepsilon_4=\varepsilon_4^{(1)}$	-1.8327
$\varphi_2^{(0)}$	-0.431 99531	$pt_1=\vartheta_1$	+47°00'05'',268	$3/8\Delta\varphi_{1,2}$	+1.5105
$\varphi_2^{(1)}=\varphi_2$	-0.432 63940	$180^\circ+(\vartheta_1+\vartheta_2)$	219°44'24'',230	$-1/4\varepsilon_2$	+0.0697
$=$	-24°47'18'',282	$\Delta\vartheta_{1,2}$	3.835 18761	$+1/32\varepsilon_1$	-0.0573
		$\times \omega\sqrt{1-e^2}$	-0.996 64767	σ_1	+1.5229
$\lg\sin\varphi_2$	9.622 49221n	$\nu\mu F(0)=R(0)$	-3.822 33080	$\times 5/16e^2\kappa^1\nu\mu$	-0.00000 00220
$-\lg\tau$	0.017 19304	$-\delta$	+1.107 602	$\Delta R(2)$	-0.000 000034
$\lg\sin B_2$	9.605 23917n	σ_0	-2.714 729		
$\overline{B}_2$	-23°45'55'',858	$\times e^2/2$	0.003 346711	$5/6e^2$	0.005 578
3. Вычисление L_2		$\nu\mu F(1)=R(1)$	-0.009 085413	$\times R(2)$	-0.000 037717
		$3/16e^2$	0.031 2550	$5/6e^2R(2)$	-0.000 000210
		$5/16e^2$	0.002 2092	$-\Delta R(2)$	+34
		$3/16e^2\kappa^2$	0.00000 77608	$\nu\mu F(3)=R(3)$	-0.000 000176
		$\nu\mu$	-0.27 498	$R(2)$	-0.000 037717
$\lg\frac{\omega}{\tau}=$		$5/16e^2\kappa^1$	0.00000 00800	$R(1)$	-0.009 085413
$=\lg\sin B_0$	9.982 80696n	$3/16e^2\kappa^2\nu\mu$	-0.00000 21341	$R(0)$	-3.822 33080
B_0	-73°59'02'',590	$5/16e^2\kappa^4\nu\mu$	-0.00000 00220	$\Delta L_{1,2}$	-3.831 45411
$\lg\cos B_0=\lg p$	9.440 75941				

$\Delta L_{1,2}$	-219°31'34".139
$+ L_1$	29°42'16''.347
L_2	170°10'42''.208

4. Вычисление $A_{2,1}$

$\lg \sqrt{1-e^2}$	9.998 54166
$\lg v$	9.442 10636n
$\lg V_2$	0.001 22217
$-\lg \cos B_2$	-9.961 51714
$\lg \sin A'_{2,1}$	9.480 35305n
$A'_{2,1}$	342°24'27''.940
$A_{2,1}$	162°24'27''.940

Приложение 2

Решение обратной задачи для выравненной дуги $\Delta \Gamma_{1,2}$

Исходные данные		$\pi_1 - \pi_2$	+0.63 169	e^2	0.00 6693
B_2	-31°13'27''.653	$\sin \Delta L_{1,2}$	-0.39 998	τ^2	1.03 973
B_1	+68°34'15''.739	$\operatorname{ctg} \alpha_{1,2}$	-1.57 930	$e^2 : \tau^2 = \kappa^2$	0.00 6438
L_2	233°16'53''.814	$\alpha_{1,2} = A_{1,2}^{(0)}$	147°39'30''	$\sin B_2$	-0.51 839
L_1	29°42'16''.347	3. Вычисление $p = \cos B_0$		$\times \tau$	+1.01 967
$\Delta L_{1,2}$	203°34'37''.467	а) Приближение 1		$\times \sin B_1$	+0.93 087
$=$	3.553 09023	$\sin A_{1,2}^{(0)}$	+0.53 496	$\sin \varphi_2$	-0.52 859
2. Вычисление $A_{1,2}^{(0)}$		$\cos B_1$	+0.36 535	$\sin \varphi_1$	+0.94 918
$\operatorname{tg} B_2$	-0.60 621	$\cos B_0^{(0)} = p^{(0)}$	+0.19 545	φ_2	-31°54'36''
$\times \cos B_1$	+0.36 535	$\times \sqrt{v} \sqrt{1-e^2}$	+0.99 665	φ_1	+71°39'18''
$\cos \Delta L_{1,2}$	-0.91 653	$v \mu$	+0.19 480	$180^\circ + (\varphi_1 + \varphi_2)$	219°45' 42''
$\times \sin B_1$	+0.93 087	B_0	+78°43'44''	$= \Delta \varphi_{1,2}$	+3.83 527
π_1	-0.22 148	$\operatorname{csc} B_0 = \tau$	1.01 967	$\times v \mu$	+0.19 480
π_2	-0.85317			δ	+0.74 171

$\Delta L_{1,2}$	+3.553 090	$\lg \varphi_2 = t_2$	-0.62 269	$\lg \lg \varphi_2$	9.794 39292n
$\times \sqrt{1-e^2}$	+0.996 648	$\lg \varphi_1 = t_1$	+3.01 58	$\lg p$	9.293 28519
$\nu_\mu F(0)=R(0)$	+3.541 180	(t_2+t_1)	+2.3931	$\lg \lg \varphi_1$	0.480 30178
$- \delta$	-0.747 11	$\times \frac{\nu}{ \nu } \tau^2 \sqrt{1-e^2}$	+1.03 623	$\lg \lg (pt_2)$	9.08767811n
τ_0	+2.794 07	$\frac{dw^{(0)}}{dp} = \chi^{(0)}$	+2.4798	$\lg \lg (pt_1)$	9.773 58697
$\times e^2/2$	0.003 3467	$p^{(0)}$	+0.195 450	$pt_2 = \vartheta_2$	-6°58'35''.936
$\nu_\mu F(1)=R(1)$	+0.009 351	$-w^{(0)} : \chi =$ $= \Delta p^{(0)}$	+ 1 015	$pt_1 = \vartheta_1$	+30°41'55''.529
$\sin 2\varphi_2$	-0.8974	$p^{(1)}$	+0.196 465	$180^\circ + (\vartheta_1 + \vartheta_2)$	203°43'19''.593
$+$				$= \Delta \vartheta_{1,2}$	+3.555 62156
$\sin 2\varphi_1$	+0.59 75	б) Приближение 2			$\times \frac{\nu}{ \nu } \sqrt{1-e^2}$
ε_2	-0.2999	$p^{(1)} = \cos B_0$	+0.196 46500	$\nu_\mu F(0)=R(0)$	+3.543 70194
$-\frac{1}{2} \varepsilon_2$	+0.1500	$\lg p^{(1)} = \lg p$	9.293 28519	$- \delta$	-0.751 066
$+$		B_0	+78°40'10''.857	$\times \tau_0$	+2.792 636
$\Delta \varphi_{1,2}$	+3.8353	$\lg \csc B_0 = \lg \tau$	0.008 54760	$\times e^2/2$	0.003 34671
τ_2	+3.9853	$\frac{\nu}{ \nu } \sqrt{1-e^2}$	+0.996 648	$\nu_\mu F(1)=R(1)$	+0.009 34614
$3/16 e^2$	0.001 255	$\times p$	+0.196 465	$e^2 : \tau^2 = \kappa^2$	0.056 435
$3/16 e^2 \kappa^2$	0.0000 08079	ν_μ	+0.195 806	κ^4	0.0000 4141
$3/16 e^2 \kappa^2 \nu_\mu$	+0 0000 01574	$\lg \sin B_2$	9.714 65700n	$3/16 e^2$	0.001 255
$\times \tau_2$	+3.9853	$\lg \tau$	0.008 54760	$5/16 e^2$	0,002 092
$\Delta R(1)$	0.0000 0627	$\lg \sin B_1$	9.968 88962	$3/16 e^2 \kappa^2$	0.0000 08076
$3/4 e^2$	0.005 020	$\lg \sin \varphi_2$	9.723 20460 n	$\times \nu_\mu$	+0.19 581
$\times R(1)$	+0.009 351	$\lg \sin \varphi_1$	9.977 43722	$\times 5/16 e^2 \kappa^4$	0.0000 000866
$3/4 e^2 R(1)$	+0.000 047	φ_2	-31°55'02''.186	см. дальше	
$-\Delta R(1)$	-0.000 006	φ_1	+71°41'26''.029	$\sin 2\varphi_2$	-0.8975
$\nu_\mu F(2)=R(2)$	+0.000 041	$180^\circ + (\varphi_1 + \varphi_2)$	219°46'23''.843	$+$ $\sin 2\varphi_1$	+0.5965
$R(0)$	+3.541 180	$= \Delta \varphi_{1,2}$	+3.835 76731	ε_2	-0.3010
$R(1)$	+0.009 351	$\times \nu_\mu$	+0.195 806	$-1/2 \varepsilon_2$	+0.1505
$R(2)$	+ 41	δ	+0.751 066	$+$ $\Delta \varphi_{1,2}$	+3.8358
$\Delta L_{1,2}^{(0)}$	+3.550 572			τ_2	+3.9863
$-\Delta L_{1,2}^{(0)}$	+3.553 090			$\times 3/16 e^2 \kappa^2 \nu_\mu$	+0.0000 01581
$w^{(0)}$	- 2 518			$\Delta R(1)$	+0.0000 06302

$3/4 e^2$	0.005 020	$\operatorname{tg} \varphi_2 = t_2$	-0.62 286	$180^\circ + (\vartheta_1 + \vartheta_2)$	203°43'19".871
$\times R(1)$	+0.009 346	$\operatorname{tg} \varphi_1 = t_1$	+3 02 188	$= \Delta \vartheta_{1.2}$	+3.555 62291
$3/4 e^2 R(1)$	+0.0000 4692			$\times \frac{\sqrt{v}}{ \sqrt{v} } \sqrt{1-e^2}$	+0.996 64767
$-\Delta R(1)$	-0.0000 0630	$(t_1 + t_2)$	+2.39 902	$\nu_\mu F(0) = R(0)$	+3.543 70328
$\nu_\mu F(2) = R(2)$	+0.0000 4062	$\times \frac{\sqrt{v}}{ \sqrt{v} } \tau^2 \sqrt{1-e^2}$	+1.03 666	$-\delta$	-0.751 070
		$\frac{dw^{(1)}}{dp} = z^{(1)}$	+2.48 70	$\times \tau_0$	+2.792 638
		$-w^{(1)} : z^{(1)} =$		$e^2/2$	0.003 34671
		$= \Delta p^{(1)}$	+ 53	$\nu_\mu F(1) = R(1)$	+0.009 34613
$\sin 4\varphi_2$	-0.7916	$p^{(1)}$	+0.196 46500		
$\sin 4\varphi_1$	-0.9575	$p^{(2)} = p$	+0.196 46553		
σ_4	-1.7491				
		4. Поверочный расчет для p			
$3/8 \Delta \varphi_{1.2}$	+1.4384	$p = \cos B_0$	+0.196 46553	$R(0)$	+3.543 70328
$-1/4 \varepsilon_2$	+0.0753	$\lg p$	9.293 28636	$R(1)$	+0.009 34613
$+1/32 \varepsilon_4$	-0.0547	B_0	78°40'10".746	$R(2)$	+ 04062
σ_4	+1.4590	$\lg \sin B_2$	9.714 65700n	$R(3)$	+ 20
$\times 5/16 e^2 \kappa^1 \nu_\mu$	+0.0000 000170	$\lg \operatorname{csc} B_0 = \lg \tau$	0.008 54765	$\Delta L_{1.2}^{(2)}$	+3.553 09023
$\Delta R(2)$	+0.0000 000248	$\lg \sin B_1$	9.968 88962	$\Delta L_{1.2}$	+3.553 09023
		$\lg \sin \varphi_2$	9.723 20465n	$w^{(2)}$	0
$5/6 e^2$	0.005 578	$\lg \sin \varphi_1$	9.977 43727	5. Вычисление $A_{1.2}$ и $A_{2.1}$	
$\times R(2)$	+0.0000 4062	φ_2	-31°55' 02".201	$\lg \frac{\sqrt{v}}{ \sqrt{v} } p$	9.923 28636
$5/6 e^2 R(2)$	+0.0000 00227	φ_1	+71°41'26".100	$\lg V_1$	0.000 19522
$-\Delta R(2)$	- 025	$180^\circ + (\varphi_1 + \varphi_2)$	219°46'23".899	$-\lg V_0$	-0.000 05647
$\nu_\mu F(3) = R(3)$	+0.0000 0020	$= \Delta \varphi_{1.2}$	+3.835 76799	$-\lg \cos B_1$	-9.562 70597
		$\times \nu_\mu$	+0.195 807	$\lg \sin A_{1.2}$	9.730 71914
		δ	+0.750 070	$A_{1.2}$	147°27'27".800
$R(0)$	+3.543 70194			$\lg \frac{\sqrt{v}}{ \sqrt{v} } p$	9.923 28636
$R(1)$	+0.009 34614	$\lg \operatorname{tg} \varphi_2$	9.794 39299	$\lg V_2$	0.001 06741
$R(2)$	+ 4062	$\lg p$	9.293 28636	$-\lg V_0$	-0.000 05647
$R(3)$	+ 20	$\lg \operatorname{tg} \varphi_1$	0.480 30229	$-\lg \cos B_2$	-9.932 03927
$\Delta L_{1.2}^{(1)}$	+3.553 08890	$\lg pt_2$	9.087 67935	$\lg \sin A'_{2.1}$	9.362 25803
$-\Delta L_{1.2}$	+3.553 09023	$\lg pt_1$	9.773 58865	$A'_{2.1}$	13°18'49".009
$w^{(1)}$	- 133	$pt_2 = \vartheta_2$	-6°58'36".038	$A_{2.1}$	193°18'49".009
		$pt_1 = \vartheta_1$	+30°41'55".879		

6. Вычисление $s_{1,2}$.		$\sin 2\varphi_{\frac{1}{2}}$	—0.897 524
$\lg(1-e^2)$	9.997 083312	$+$ $\sin 2\varphi_1$	+0.596 488
$+$ $\lg V_0$	0.000 056473	$\sin 4\varphi_{\frac{1}{2}}$	—0.7916
$\lg \nu$	9.997 139785	$+$ $\sin 4\varphi_1$	—0.9575
$\lg a$	6.804 701197	$\sin 6\varphi_{\frac{1}{2}}$	+0.21
$\lg a_\nu$	6.801 840982	$+$ $\sin 6\varphi_1$	+0.87
$\lg e^2$	7.825 64818	ε_2	—0.301 036
$+$ $\lg \tau^2$	0.017 09530	ε_4	—1.7491
$\lg k^2$	7.808 55288	ε_6	+1.08
k^2	0.00643 50641	$C_2 \varepsilon_2$	+0.000 732330
k^4	0.00004 14100	$+$ $C_4 \varepsilon_4$	— 4291
k^6	0.00000 02665	$C_6 \varepsilon_6$	— 34
k^8	0.00000 00017	$\Delta \tau_{1,2}$	+0.000 72802
1	1.000 000000	$\lg \Delta \tau_{1,2}$	6.86214 ₋₁₀
$*) c_{02} k^2$	0.004 826298	$\lg a_\nu$	6.80 184
$c_{04} k^4$	0.000 029116	$\lg \Delta s_{1,2}^{(0)}$	3.66 398
$c_{06} k^6$	0.000 000 187	$\Delta s_{1,2}^{(0)}$	+4613.0 <i>м</i>
$c_{08} k^8$	01	$\lg C_0$	0.002 103657
C_0	+1.004 85560	$\lg \Delta \varphi_{1,2}$	0.583 852331
$c_{22} k^2$	—0.002 413149	$\lg a_\nu$	6.801 840982
$c_{24} k^4$	— 019411	$\lg s_{1,2}^{(0)}$	7.387 796970
$c_{26} k^6$	— 137	$s_{1,2}^{(0)}$	24 422 885.1
C_2	—0.002 43270	$\Delta s_{1,2}^{(0)}$	4613.0
$c_{44} k^4$	+0.000 002426	$s_{1,2}$	24 427 488.1
$c_{46} k^6$	+ 27		
C_4	+0.000 002453		
$c_{66} k^6 = C_6$	—0.000 000031		

Значение чисел

 $C_{0,2\lambda}, C_{2u,2\lambda}$.

$$1) c_{0,2\lambda} = (-1)^\lambda \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)_\lambda \left(\frac{2\lambda}{\lambda}\right)}{2^{2\lambda}}$$

$$2) c_{2u,2\lambda} = (-1)^{\lambda-u} \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)_\lambda \left(\frac{2\lambda}{\lambda-u}\right)}{2^{2\lambda} u}$$

$$(u, \lambda=1, 2, \dots, n; u \leq \lambda)$$

$$\begin{aligned} c_{02} &= +0.75 & c_{22} &= -0.375 \\ c_{04} &= +0.703125 & c_{24} &= -0.468750 \\ c_{06} &= +0.6836 & c_{26} &= -0.5127 \\ c_{08} &= +0.63 & c_{28} &= -0.54 \\ c_{44} &= +0.058594 & c_{66} &= -0.116 \\ c_{4,6} &= +0.1025 & c_{68} &= -0.03 \\ c_{4,8} &= +0.13 \\ c_{88} &= +0.0517 \end{aligned}$$

*) См. Приложение 3.

Решение прямой выравненноручевой засечки (первый способ)

1. Исходные данные.		$\times$	$\text{ctg} A_{1.3}$	— 2.9410	$\times$	$\text{ctg} A_{2.3}$	+ 0.75 101
			$\sin \theta_2$	+ 0.69 202		$\sin \Delta L_{2.3}$	+ 0.97 053
B_1	67°28'52".763	:	$\sin \theta_1$	+ 0.38 298		$\cos \theta_2$	+ 0.72 188
L_1	36°54'39".412	$\times$	$\text{ctg} A_{2.3}$	+ 0.75 101	$\times$	$\cos \Delta L_{2.3}$	— 0.24 099
=	0.644 21757		$\cos \Delta L_{1.2}$	— 0.16 004		$\mathcal{K}_1$	+ 0.72 888
$A_{1.3}$	341°13'15".376	$\times$	$\cos \theta_2$	+ 0.72 188		$\mathcal{K}_2$	— 0.17 397
			$\sin \Delta L_{1.2}$	+ 0.98 711		$\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2$	+ 0.55 491
B_2	46°12'34".548	+ Π_1		— 5.31 420	:	$\sin \theta_2$	+ 0.69 202
L_2	136°07'13".693	— Π_2		+ 0.12 019		$\text{tg} B_3^{(0)}$	+ 0.80 187
=	2.375 75039	— Π_3		— 0.71 257			
$A_{2.3}$	53°05'34".727	b		— 5.90 658	$B_3^{(0)} \approx B_3$		38°43'27"
2. Вычисление $B_3^{(0)}$, $L_3^{(0)}$		$\frac{a}{b} = \text{tg} \Delta L_{1.3}^{(0)}$		+ 0.42 766			
		$\Delta L_{1.3}^{(0)}$		203°09'16"			
$90^\circ - B_1 = \theta_1$	22°31'07"	+ L_1		36°54'39"			
$90^\circ - B_2 = \theta_2$	43°47'25"	$L_3^{(0)}$		240°03'55"			
$\Delta L_{1.2}$	99°12'34"	— L_2		136°07'14"			
		$\Delta L_{2.3}^{(0)}$		103°56'41"			
$\cos \theta_2$	+ 0.72 188		$\text{ctg} A_{1.3}$	— 2.9410			
$\times \cos \Delta L_{1.2}$	— 0.16 004	$\times$	$\sin \Delta L_{1.3}^{(0)}$	— 0.39 321			
$\times \text{ctg} A_{2.3}$	+ 0.75 101		$\cos \theta_1$	+ 0.92 376			
$\times \sin \Delta L_{1.2}$	+ 0.98 711	$\times$	$\cos \Delta L_{1.3}^{(0)}$	— 0.91 945			
$\times \text{ctg} \theta_1$	+ 2.41 200		r_1	+ 1.15 643			
$\times \sin \theta_2$	+ 0.69 202		r_2	— 0.81 935			
+ Π_1	— 0.11 553		$r_1 + r_2$	+ 0.30 708			
— Π_2	— 0.74 133	:	$\sin \theta_1$	+ 0.38 298			
— Π_3	— 1.66 915		$\text{tg} B_3^{(0)}$	+ 0.80 182			
a	— 2.52 601						

3. Расчет величин $\nu_{i3}, k_{i3}^2, \tau_{i3}, p_{i3},$			p	0.123 23565	0.553 02697
$\nu_{i3}^2, \varphi_i^3, \vartheta_i^3; (i = 1, 2)$			$\omega \sqrt{1-e^2}$	-0.996 64767	+ 0.996 64767
			ν_{i3}^2	-0.122 8226	+ 0.551 1730
$\lg \sin A_{i3}$	9.507 74760 n	9.902 87881	$\lg \sin B_3$	9.965 55668	9.858 46269
$\lg \cos B_i$	9.583 18128	9.840 12007	+ $\lg \tau_{i3}$	0.003 32312	0.079 26984
$-\lg V_i$	-0.000 21452	-0.000 69961	$\lg \sin \varphi_i^3$	9.968 87980	9.937 73253
$-\lg \sqrt{1-e^2}$	-9.998 54166	-9.998 54166	φ_i^3	68°34'03".855	60°02'46".239
$\lg \nu_{i3}$	9.092 17270 n	9.743 75761	$\lg \operatorname{tg} \varphi_i^3$	0.406 11008	0.239 36934
$\lg \nu^2$	8.184 34540	9.487 51522	+ $\lg p_{i3}$	9.090 73637	9.742 74631
$\lg e^2$	7.825 64818	7.825 64818	$\lg \operatorname{tg} \vartheta_i^3$	9.496 84645	9.982 11565
$\lg e^2 \nu^2$	6.009 99358	7.313 16340	ϑ_i^3	17°25'44".940	43°49'14".183
			4. Первое приближение для B_3, L_3		
e^2	0.006 693422	0.006 693422	$B_3^{(0)} \approx B_1$	38°43'27"	
$e^2 \nu^2$	0.000 102328	0.002 056664	$\lg \sin B_3$	9.796 277	9.796 277
ν^2	0.015 28781	0.307 26650	$\lg \tau_{i3}$	0.003 323	0.079 270
$e^2 - e^2 \nu^2$	0.006 591094	0.004 636758	$\lg \sin \varphi_3^i$	9.799 600	9.875 547
$1 - e^2 \nu^2$	0.999 89767	0.997 94334	φ_3^i	39°04'40".4	48°39'47".2
$1 - \nu^2$	0.984 71219	0.692 73350	φ_3^3	68°34'03".9	60°02'46".2
$\lg(\nu^2 - e^2 \nu^2)$	7.818 95750	7.666 21443	$180^\circ - (\varphi_i^3 + \varphi_3^i)$	+ 72°21'15".7	+ 71°17'26".6
$\lg(1 - e^2 \nu^2)$	9.999 95556	9.999 10588	$\pi - (\varphi_i^3 + \varphi_3^i)$	+ 1.262 822	+ 1.244 258
$\lg(1 - \nu^2)$	9.993 30932	9.840 56619	$\times \nu_{i3}^2$	- 0.122 82	+ 0.551 17
$\lg k^2$	7.819 00194	7.667 10855	ϑ	- 0.15 510	+ 0.68 580
$\lg \tau^2$	0.006 64624	0.158 53969	$\lg \operatorname{tg} \varphi_3^i$	9.909 576	0.055 684
k^2	0.006 591768	0.004 646314	+ $\lg p_{i3}$	9.090 736	9.742 746
k^4	0.000 043451	0.000 021588	$\lg \operatorname{tg} \vartheta_3^i$	9.000 312	9.798 430
k^6	0.000 000286	0.000 000100	ϑ_3^i	5°42'52".8	32°09'24".5
k^8	0.000 0000019	0.000 0000005	ϑ_3^3	17°25'44".9	43°49'14".2
$\lg \frac{1}{\tau} = \lg \sin B_0$	9.996 67688	9.920 73016	$180^\circ - (\vartheta_i^3 + \vartheta_3^i)$	156°51'22".3	104°01'21".3
B_0	82°55'16".038	56°25'30".272			
$\lg \cos B_0 = \lg p_0$	9.090 73637	9.742 74631			
$\frac{\nu}{ \nu } = \omega$	- 1	+ 1			

$\pi - (\vartheta_i^3 + \vartheta_i^i)$	2.737 6571	1.815 5367	$\lg \sqrt{1 - e^2}$	9.99 854	9.99 854
$\times \frac{1}{\omega_1 \sqrt{1 - e^2}}$	- 0.996 64767	+ 0.996 64767	$\lg v_{i3}$	9.09 217 <i>n</i>	9.74 376
$v_{i3} F(0) = R(0)$	- 2.728 4796	+ 1.809 4504	$\lg V_3$	0.00 089	0.00 089
$- \delta$	+ 0.155 10	- 0.685 80	$-\lg \cos B_3$	- 9.89 219	- 9.89 219
$\times \tau_0$	- 2.57 333	+ 1.123 65	$\lg \sin A'_{3i}$	9.19 941 <i>n</i>	9.85 100
$\times e^2/2$	0.003 3467	0.003 3467	A'_{3i}	189°06'24"	134°48'00"
$v_{i3} F(1) = R(1)$	- 0.008 6123	+ 0.003 7605	$\lg \operatorname{tg} A'_{3i}$	9.20 491	0.00 303 <i>n</i>
$3/16 e^2$	0.001 2550	0.001 2550	$-\lg V_3^2$	- 0.00 178	- 0.00 178
$3/16 e^2 k^2$	0.000 00827	0.000 00583	$-\lg \cos B_3$	- 9.89 219	- 9.89 219
$-\left[\begin{array}{l} \sin 2\varphi_3^i \\ + \\ \sin 2\varphi_i^3 \end{array} \right]$	+ 0.979	+ 0.992	$\lg \frac{\partial L_3^i}{\partial B_3} = \lg a_{i3}$	9.31 094	0.10 906 <i>n</i>
ε_2	- 1.659	- 1.857	a_{i3}	+ 0.20461	- 1.28 541
$-\frac{1}{2} \varepsilon_2$	+ 0.830	+ 0.928	$b = a_{1.3} - a_{2.3}$	+ 1.4901	
$+\pi - (\varphi_i^3 + \varphi_3^i)$	+ 1.263	+ 1.244	$\left(\frac{\partial L_3^1}{\partial B_3} - \frac{\partial L_3^2}{\partial B_3} \right) \delta B_3^{(0)} + w_L^{(0)} = 0$		
$\times \tau_2$	+ 2.093	+ 2.172	$+ 1.49001 \delta B_3^{(0)} + 267''.46 = 0$		
$\times 3/16 e^2 k^2 v_{i3}$	- 0.000 00102	+ 0.000 00321	$\delta B_3^{(0)}$	- 0.000 87024	- 02'59''.50
$\Delta R(1)$	- 0.000 0021	+ 0.000 0070	$B_3^{(0)}$		38°43'27''.0
$3/4 e^2$	+ 0.005 020	+ 0.005 020	$B_3^{(1)}$		38°40'27''.5
$\times R(1)$	- 0.008 612	+ 0.003 761	a_{i3}	+ 0.20461	- 1.28 541
$3/4 e^2 R(1)$	- 0.000 0432	+ 0.000 0189	$\times \delta B_3^{(0)}$	- 0.000 87024	- 0.000 87024
$-\Delta R(1)$	+ 21	- 70	$+\delta L_3^{(0)}$	- 0.000 1781	+ 0.001 1186
$v_{i3} F(2) = R(2)$	- 0.000 0411	+ 0.000 0119	$+ L_3^{(0)}$	4.190 2699	4.188 9732
$R(1)$	- 0.008 6123	+ 0.003 7605	L_3^i		
$R(0)$	- 2.728 4796	+ 1.809 4504	$L_3^{(1)} \approx L_3$	4.190 0918	4.190 0918
$\nabla L_{1.3}^{(0)}, \Delta L_{2.3}^{(0)}$	- 2.737 1330	+ 1.813 2228			
$L_1 + 2\pi, L_2$	+ 6.927 4029	+ 2.375 7504			
$L_3^{(0)}$	4.190 2699	4.188 9732			
$w_L^{(0)}$	0.001 2967	+ 267''.46			

5. Второе приближение для B_3, L_3					
$B_3^{(1)} \approx B_3$	38°40'27".5		$-\begin{bmatrix} \sin 2\varphi_3^i \\ + \\ \sin 2\varphi_i^3 \end{bmatrix}$	$+ 0.9783$ $+ 0.6803$	$+ 0.9922$ $+ 0.8652$
$\lg \sin B_3$	9.795 80539	9.795 80539	$-\begin{bmatrix} \sin 4\varphi_3^i \\ + \\ \sin 4\varphi_i^3 \end{bmatrix}$	$+ 0.405$ $- 0.997$	$- 0.248$ $- 0.868$
$\lg \tau_{i3}$	0.003 32312	0.079 26984	ε_2	$- 1.6586$	$- 1.8574$
$\lg \sin \varphi_3^i$	9.799 12851	9.875 07523	ε_4	$+ 0.592$	$+ 1.116$
φ_3^i	39°01'38".777	48°35'32".882			
φ_i^3	68°34'03".855	60°02'46".239	$-\frac{1}{2} \varepsilon_2$	$+ 0.8293$	$+ 0.9287$
$180^\circ - (\varphi_i^3 + \varphi_3^i)$	72°24'17".368	71°21'40".879	$+\pi - (\varphi_i^3 + \varphi_3^i)$	$+ 1.2637$	$+ 1.2455$
$\pi - (\varphi_i^3 + \varphi_3^i)$	1.263 70258	1.24549061	σ_2	$+ 2.0930$	$+ 2.1742$
$\times \nu_\mu$	- 0.122 8226	+ 0.551 1730	$\times$		
δ	- 0.155 2113	+ 0.686 4808	$3/16 e^2 k^2 \nu_\mu$	- 0.000 001016	+ 0.000 003214
$\lg \operatorname{tg} \varphi_3^i$	9.908 79441	0.054 60416	$\Delta R(1)$	0.000 002126	+ 0.000 006988
$\lg p_{i3}$	9.090 73637	9.742 74631	$\times$		
$\lg \operatorname{tg} \vartheta_3^i$	8.999 53078	9.797 35047	$3/4 e^2$	0.005 0200	0.005 0200
ϑ_3^i	5°42'16".082	32°05'33".491	$R(1)$	- 0.008 61258	0.003 76199
ϑ_i^3	17°25'44".940	43°49'14".183	$3/4 e^2 R(1)$	- 0.000 043235	+ 0.000 018885
$180^\circ - (\vartheta_i^3 + \vartheta_3^i)$	156°51'58".968	104°05'12".326	$-\Delta R(1)$	+ 0.000 002126	- 0.000 006988
$\pi - (\vartheta_i^3 + \vartheta_3^i)$	2.737 834817	1.816 656621	$\nu_\mu F(2) = R(2)$	- 0.000 041109	+ 0.000 011897
$\times \omega \sqrt{1-e^2}$	- 0.996 647670	+ 0.996 647670	$\frac{3}{8} [\pi - (\varphi_i^3 + \varphi_3^i)]$	$+ 0.474$	$+ 0.467$
$\nu_\mu F(0) = R(0)$	- 2.728 656691	+ 1.810 566589	$-\frac{1}{4} \varepsilon_2$	$+ 0.415$	$+ 0.464$
$-\delta_0$	- 0.155 2113	- 0.686 4808	$+\frac{1}{32} \varepsilon_4$	$+ 0.019$	$+ 0.035$
$\times \sigma_0$	- 2.573 4454	+ 1.124 0856	σ_4	$+ 0.908$	$+ 0.966$
e_2^2	0.003 346711	0.003 346711	$\times$		
$\nu_\mu F(1) = R(1)$	- 0.008 612578	+ 0.003 761989	$5/16 e^2 k^4 \nu_\mu$	- 0.000 000011	+ 0.000 000025
			$\Delta R(2)$	- 0.000 000010	+ 0.000 000024
$3/16 e^2, 5/16 e^2$	0.000 12550	0.000 20917	$\times$		
$3/16 e^2 k^2$	0.000 008273	0.000 005831	$5/6 e^2$	0.005 578	0.005 578
$\frac{5}{16} e^2 k^4$	0.000 000091	0.000 000045	$R(2)$	- 0.000 04111	+ 0.000 01190
			$5/6 e^2 R(2)$	- 0.000 000229	+ 0.000 000066
			$-\Delta R(2)$	$+ 10$	$- 24$
			$\nu_\mu F(3) = R(3)$	- 0.000 000219	+ 0.000 000042

			6. Поверочный расчет для B_3, L_3		
$R(0)$	- 2.728 656691	+ 1.810 566589	B_3	<u>38°40'27".310</u>	
$R(1)$	- 0.008 612578	+ 0.003 761989	$\lg \sin B_3$	9.795 80489	9.795 80489
$R(2)$	- 41109	+ 11897	$\lg \tau_{i3}$	0.003 32312	0.079 26984
$R(3)$	- 219	+ 42	$\lg \sin \varphi_3^i$	9.799 12801	9.875 07473
$\nabla L_{1.3}, \nabla L_{2.3}$	- 2.737 310597	+ 1.814340517	φ_3^i	39°01'38".585	48°35'32".613
$L_1 + 2\pi, L_2$	+ 6.927 402876	+ 2.375750387	φ_i^3	68°34'03".855	60°02'46".239
$L_3^{(1)}$	+ 4.190 092279	+ 4.190090904	$180^\circ - (\varphi_i^3 + \varphi_3^i)$	72°24'17".560	71°21'41".148
$w_L^{(1)}$	+ 0.000 001375	+ 0".2836	$\pi - (\varphi_i^3 + \varphi_3^i)$	1.263 703511	1.245 491913
$\lg \nu_{i3} V_3 \sqrt{1-e^2}$	9.09 060 <i>n</i>	9.74 319	$\times \nu_{i3}$	- 0.122 8226	+ 0.551 1730
$-\lg \cos B_3$	- 9.89 239	- 9.89 239	δ	- 0.155 2114	+ 0.686 4815
$\lg \sin A'_{3i}$	9.19 921 <i>n</i>	9.85 080	$+\lg \operatorname{tg} \varphi_3^i$	9.908 79359	0.054 60302
A'_{3i}	189°06'09"	134°49'32"	$\lg p_{i3}$	9.090 73637	9.742 74631
$\lg \operatorname{tg} A'_{3i}$	9.20 471	0.00 264 <i>n</i>	$\lg \operatorname{tg} \vartheta_3^i$	8.999 52996	9.797 34933
$-\lg V_3^2$	- 0.00 178	- 0.00 178	ϑ_3^i	5°42'16".044	32°05'33".248
$-\lg \cos B_3$	- 9.89 239	- 9.89 239	ϑ_i^3	17°25'44".946	43°49'14".183
$\lg \frac{\partial L_3^i}{\partial B_3} = \lg a_{i3}$	9.31 054	0.10 847 <i>n</i>	$180^\circ - (\vartheta_i^3 + \vartheta_3^i)$	156°51'59".010	104°05'12".569
a_{i3}	+ 0.20443	- 1.2837	$\pi - (\vartheta_i^3 + \vartheta_3^i)$	2.737 835020	1.816 657 800
$b = a_{1.3} - a_{2.3}$	+ 1.4881		$\times \omega \sqrt{1-e^2}$	- 0.996 647670	+ 0.996 647670
$1.4881 \delta B_3^{(1)} + 0".2836 = 0$			$\nu_{i3} F(0) = R(0)$	- 2.728 656894	+ 1.810 567 764
$\delta B_3^{(1)}$	- 0.000 000924	- 0".1905	$-\delta$	+ 0.155 2114	- 0.686 4815
$B_3^{(1)}$		38°40'27".500	τ_0	- 2.573 4455	+ 1.1240863
$B_3^{(2)}$		38°40'27".310	$\times e^2/2$	0.003 346711	0.003 346711
a_{i3}	+ 0.20443	- 1.2837	$\nu_{i3} F(1) = R(1)$	- 0.008 612576	+ 0.003 761991
$\delta B_3^{(1)}$	- 0.000 000924	- 0.000000924	$R(0)$	- 2.728 656894	+ 1.810 567764
$\delta L_3^{(1)}$	- 0.000 000189	+ 0.000001186	$R(1)$	- 0.008 612576	+ 0.003 761 991
$L_3^{(1)}$	4.190 09 2279	4.190 090 904	$R(2)$	- 41109	+ 11897
$L_3^{(2)}$	4.190 092 090	4 190 092 090	$R(3)$	- 219	+ 42
$\Delta L_3^{(1)}, \Delta L_3^{(2)}$		240°04'28".533	$\Delta L_3^{(1)}, \Delta L_3^{(2)}$	- 2.737 310798	+ 1.814 341694
$L_1 + 2\pi, L_2$			$L_1 + 2\pi, L_2$	+ 6.927 402876	+ 2.375 750387
$L_3^{(2)}$			$L_3^{(2)}$	4.190 092078	4.190 092 081
$w_L^{(2)}$			$w_L^{(2)}$	+ 0.000 000003	+ 0".0006
L_3			L_3	4.190 092 080	240°04'28".531

Решение прямой выравненноручевой засечки (второй способ)

1. Исходные данные		$\pm$	$\alpha_{1,2}$	44°58'14"	$\lg \cos \delta\gamma_{1,2}$	9.99 992
			$\delta\alpha_{1,2}$	16°01'22"	$-\lg \cos \gamma_{1,2}$	9.19 877
B_1	67°28'52".763		α_1	60°59'36"	$\lg \operatorname{ctg} \delta\sigma_{1,2}$	9.68 198
L_1	34°54'39".412		α_2	28°56'52"	$\lg \operatorname{tg} \sigma_{1,3}$	0.48 313
$=$	0.644 217568					
$A_{1,3}$	341°13'15".376	$+$	α_2	28°56'52"	σ_{i3}	71°48'06"
			$A_{2,3}$	53°05'35"	$\pm$ $\delta\sigma_{i3}$	0°33'08"
B_2	46°12'34".548		α_1	60°59'36"	$\sigma_{1,3}$	72°21'14"
L_2	136°07'13".693		$-A_{1,3}$	341°13'15"	$=$	1.262 8136
$=$	2.375 750387		γ_1	82°02'27"	$\sigma_{2,3}$	71°14'58"
$A_{2,3}$	53°05'34".727		γ_2	79°46'21"	$=$	1.243 5374
2. Вычисление $\sigma_{1,3}, \sigma_{2,3}$			$\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) = \gamma_{1,2}$	80°54'24"		
			$\frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2) = \gamma_{1,2}$	1°08'03"	$\lg \sin \gamma_1$	9.99 305
$90^\circ - B_2 = \theta_2$	43°47'25"		$\lg \sin \theta_1$	9.58 318	$-\lg \sin \sigma_{2,3}$	9.97 632
$90^\circ - B_1 = \theta_1$	22°31'07"		$\lg \sin \alpha_2$	9.68 486	$\lg \sin \gamma_2$	9.99 580
$\frac{1}{2}(\theta_2 + \theta_1) =$			$\lg \sin \theta_2$	9.84 012	$\lg \sin \sigma_{1,3}$	9.97 907
$\frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) =$	33°09'16"		$\lg \sin \alpha_1$	9.94 179	$\lg n_1$	0.01 673
$= \delta\theta_{1,2}$	10°38'09"		$\lg m_1$	9.89 832	$\lg \sin \sigma_{1,2}$	9.89 269
$\Delta L_{1,2}$	99°12'34"		$\lg \sin \Delta L_{1,2}$	9.99 437	$\lg n_2$	0.01 673
$\frac{1}{2}\Delta L_{1,2} =$			$\lg m_2$	9.89 833	$\lg \sin \gamma_3$	9.90 942
$= \delta L_{1,2}$	49°36'17"		$\lg \sin \sigma_{1,2}$	9.89 269	γ_3	54°16'00"
			$\sigma_{1,2}$	51°21'30"	γ_2	82°02'27"
			$\frac{1}{2}\sigma_{1,2} = \delta\sigma_{1,2}$	25°40'45"	γ_1	79°46'21"
$\lg \sin \delta\theta_{1,2}$	9.26 615				$\sum_{i=1}^3 \gamma_i$	216°04'48"
$-\lg \sin \theta_{1,2}$	9.73 788				ε	36°04'48"
$\lg \operatorname{ctg} \delta L_{1,2}$	9.92 989					
$\lg \operatorname{tg} \delta\alpha_{1,2}$	9.45 816		$\lg \sin \delta\gamma_{1,2}$	8.29 653		
$\lg \cos \delta\theta_{1,2}$	9.99 248		$-\lg \sin \gamma_{1,2}$	9.99 451		
$-\lg \cos \theta_{1,2}$	9.92 283		$\lg \operatorname{tg} \delta\sigma_{1,2}$	9.68 198		
$\lg \operatorname{ctg} \delta L_{1,2}$	9.92 989		$\lg \operatorname{tg} \delta\sigma_{i3}$	7.98 400		
$\lg \operatorname{tg} \sigma_{1,2}$	9.99 954					

3. Расчет величин $\nu_{i3}, k_{i3}^3, \tau_{i3}, p_{i3}$ $C_0^i, D_{2u}^i, Q_{i3}, \varphi_i^3, \vartheta_i^3, \nu_{i3}^3, \nu_{i3}^3$			1	1.000 000000	1.000 000000
			$c_{02}^i k^2$	0.004 943826	0.003 484736
			$c_{04}^i k^4$	0.000 030551	0.000 015179
$\lg \sin A_{i3}$	9.507 74760 n	9.902 87881	$c_{06}^i k^6$	196	68
$\lg \cos B_i$	9.583 18128	9.840 12007	$c_{08}^i k^8$	1	0
$-\lg V_l$	-9.998 54166	-9.998 54166	C_0^i	+1.004 974574	+1.003 499983
$-\lg \sqrt{1-e^2}$	-0.000 21452	-0.000 69961	$c_{22}^i k^2$	-0.002 471913	-0.001 742368
$\lg \nu_{i3}$	9.092 17270 n	9.743 75761	$c_{24}^i k^4$	-0.000 020368	-0.000 010119
$\lg \nu_{i3}^2$	8.184 34540	9.487 51522	$c_{26}^i k^6$	147	51
$\lg e^2$	7.825 64818	7.825 64818	$c_{28}^i k^8$	1	0
$\lg e^2 \nu_{i3}^2$	6.009 99358	7 313 16340	C_2^i	-0.002 492429	-0.001 752538
e^2	0.006 693422	0.006 693422	$c_{44}^i k^4$	+0.000 002546	-0.000 001265
$e^2 \nu^2$	0.000 102328	0.002 056664	$c_{46}^i k^6$	+ 29	+ 10
ν^2	0.015 28781	0.307 26650	$c_{48}^i k^8$	+ 0	+ 0
$e^2 - e^2 \nu^2$	0.006 591094	0.004 636758	C_4^i	+0.000 002575	+0.000 001275
$1 - e^2 \nu^2$	0.999 89767	9.997 94334	$c_{66}^i k^6$	-0.000 000033	-0.000 000012
$1 - \nu^2$	0.984 71219	0 692 73350	$c_{68}^i k^8$	0	0
$\lg (e^2 - e^2 \nu^2)$	7.818 95750	7.666 21443	C_6^i	-0.000 000033	-0.000 000012
$\lg (1 - e^2 \nu^2)$	9.999 95556	9.999 10588	$C_2^i : C_0^i = D_2^i$	-0.002 480092	-0.001 746426
$\lg (1 - \nu^2)$	9.993 30932	9.840 56619	$C_4^i : C_0^i = D_4^i$	+0.000 002562	+0.000 001271
$\lg k^2$	7.819 00194	7.667 10855	$C_6^i : C_0^i = D_6^i$	-0.000 000033	-0.000 000012
$\lg \tau^2$	0.006 64624	0.158 53969	$\lg (1 - e^2) a$	6.8017 84509	6.8017 84509
k^2	0.006 591768	0.004 646314	$\lg V_0^i$	0.0000 22221	0.0004 47059
k^4	0.000 043451	0.000 021588	$\lg C_0^i$	0.0021 55074	0.0015 17369
k^6	0.000 000286	0.000 000100	$\lg Q_{i3}$	6.8039 61804	6.8037 48937
k^8	0.000 000019	0.000 000005	$\frac{\nu}{ \nu } = \omega$	-1	+1
$\lg \frac{1}{\tau} = \lg \sin B_0$	9.996 67688	9.920 73016			
B_0	82°55'16".038	56°25'30".272			
$\lg \cos B_0 = \lg p$	9.090 73637	9.742 74631			
p	0.123 23565	0.553 02697			

*) См. Приложение 3.

P_{i3}	0.123 23565	0.553 02697	$-\begin{bmatrix} \sin 4\varphi_3^i \\ + \\ \sin 4\varphi_i^3 \end{bmatrix}$	+0.418	-0.243
$\omega \sqrt{1-e^2}$	-0.996 64767	+0.996 64767	$\varepsilon_2^{(00)}$	-0.997	-0.868
$\nu_{i3} \mu_{i3}$	-0.122 8226	+0.551 1730	$\varepsilon_4^{(00)}$	-1.65705	-1.85711
$\lg \sin B_i$	9.965 55668	9.858 46269	$D_2 \varepsilon_2^{(00)}$	+0.579	+1.111
$\lg \tau_{i3}$	0.003 32312	0.079 26984	$+ D_4 \varepsilon_4^{(00)}$	+0.004 1096	+0.003 2444
$\lg \sin \varphi_i^3$	9.968 87980	9.937 73253	$\partial \varphi_i^{(00)}$	+ 15	+ 14
φ_i^3	68°34'03".855	60°02'46".239	$\partial \varphi_i^{(00)}$	+0.004 1111	+0.003 2458
$\lg \operatorname{tg} \varphi_i^3$	0.406 11008	0.239 36934	$\cos 2\varphi_3^i$	+0.21 420	-0.12 235
$\lg P_{i3}$	9.090 73637	9.742 74631	$\cos 4\varphi_3^i$	-0.908	-0.970
$\lg \operatorname{tg} \vartheta_i^3$	9.496 84645	9.982 11565	$-2D_2 \cos 2\varphi_3^i$	+0.001 0625	-0.000 4274
ϑ_i^3	17°25'44".946	43°49'14".183	$4D_4 \cos 4\varphi_3^i$	+ 93	+ 49
4. Первое приближение для s_{i3}, B_3, L_3.			z	+0.001 0718	-0.000 4225
			$1-z=z_1$	+0.998 9282	+1.000 4225
а) Вычисление $w_B^{(0)}$			$\partial \varphi_i^{(00)}: z_1=\Delta \varphi_i^{(00)}$	+0.004 1155	+0.003 2444
B_{ik} —с чертежа	75°, 72°, 62°, 46°	49°, 53°, 50°, 43°	$\varphi_i^{(00)}$	+0.677 4641	+0.846 7253
R_{i1}, R_{i2}	6397, 6397	6381, 6384	$\varphi_i^{(0)} \approx \varphi_{i3}$	+0.681 5796	+0.849 9697
R_{i3}, R_{i4}	6390, 6378	6383, 6377	$=$	+39°03'05".9	+48°41'58".8
$\bar{R}_{i3} = \frac{1}{4\kappa} \sum R_{ik}$	6390500 м	6381 300 м	$\sin 2\varphi_3^i$	+0.97 852	+0.99 167
$\times \sigma_{i3}$	1.262 8136	1.243 5374	$\sin 4\varphi_3^i$	+0.404	-0.255
$s_{i3}^{(0)}$	80700 010 м	7935 385 м	$\varepsilon_2^{(0)}$	+1.65 878	+1.85 689
$\lg s_{i3}^{(0)}$	6.906 87407	6.899 56800	$\varepsilon_4^{(0)}$	+0.593	+1.123
$\lg Q_{i3}$	6.803 96180	6.803 74894	$D_2 \varepsilon_2^{(0)}$	+0.004 1139	+0.003 2429
$\lg \tilde{\sigma}_{i3}^{(0)}$	0.102 91227	0.095 81906	$+ D_4 \varepsilon_4^{(0)}$	+ 15	+ 14
$-\tilde{\sigma}_{i3}^{(0)}$	-1.267 3958	-1.246 8639	$\Delta \varphi_i^{(0)} \approx \Delta \varphi_i^{(00)}$	+0.004 1154	+0.003 2443
$+ \pi - \varphi_i^3$	+1.944 8599	+2.093 5892	$\lg \sin \varphi_i^{(0)}$	9.799 354	9.875 791
$\varphi_i^{(0)} \approx \varphi_i^3$	+0.677 4641	+0.846 7253	$-\lg \tau_{i3}$	0.003 323	0.079 270
$=$	+38°48'57"	+48°30'50"	$\lg \sin B_i^{(0)}$	9.796 031	9.796 521
$-\begin{bmatrix} \sin 2\varphi_3^i \\ + \\ \sin 2\varphi_i^3 \end{bmatrix}$	+0.97 679	+0.99 249	$B_i^{(0)}$	38°41'53".3	38°45'00".0
	+0.68 026	+0.86 522	$w_B^{(0)}$	-0.000 9051	-3'06".7

б) Вычисление $w_L^{(0)}$			$3/4 e^2$	0.005 020	0.005 020
$\pi - \varphi_l^3$	1.944 8599	2.093 5892	$\times R(1)$	-0.008 612	+0.003 760
$-\varphi_3^l$	0.681 5795	0.849 9696	$3/4 e^2 R(1)$	-0.000 0432	+0.000 0189
$\pi - (\varphi_l^3 + \varphi_3^l)$	-1.263 2804	1.243 6196	$-\Delta R(1)$	+ 21	- 70
$\times \nu_\mu$	-0.122 8226	+0.551 1730	$\nu_\mu F(2) = R(2)$	-0.000 0411	+0.000 0119
δ	-0.155 159	+0.685 449			
$\lg \operatorname{tg} \varphi_3^l$	9.909 169	0.056 243	$R(0)$	-2.728 5719	+1.808 8730
$\lg p_{i3}$	9.090 736	9.742 746	$R(1)$	-0.008 6124	+0.003 7598
$\lg \operatorname{tg} \vartheta_3^l$	8.999 905	9.798 989	$R(2)$	-0.000 0411	+0.000 0119
ϑ_3^l	5°42'33".7	32°11'24".0	$\Delta L_{1,3}^{(0)}, \Delta L_{2,3}^{(0)}$	-2.737 2254	+1.812 6447
ϑ_3^l	17°25'44".9	43°49'14".2	$L_1 + 2\pi, L_2$	+6.927 4029	+2.375 7504
$180^\circ = (\vartheta_l^3 + \vartheta_3^l)$	156°51'41".4	103°59'21".8	$L_3^{(0)}$	+4.190 1775	+4.188 3951
$\pi - (\vartheta_l^3 + \vartheta_3^l)$	2.737 7497	1.814 9573	$w_L^{(0)}$	+0.001 7824	+ 6'07".65
$\times \omega \sqrt{1-e^2}$	-0.996 64767	+0.996 64767	в) Вычисление величин $\frac{\partial B_3^l}{\partial s_{i3}}, \frac{\partial L_3^l}{\partial s_{i3}}$		
$\nu_\mu F(0) = R(0)$	-2.728 5719	+1.808 8730	$\delta s_{i3}^{(0)}, \delta B_{i3}^{(0)}; \delta L_{i3}^{(0)}; s_{i3}^{(1)}, B_3^{(1)}, L_3^{(1)}$		
$-\delta$	+0.155 159	-0.685 449			
$\times \sigma_0$	-2.573 413	+1.123 424	$B_{i3}^{(0)} \approx B_3^l$	38°41'53".3	38°45'00".0
$\times e^2/2$	0.003 3467	0.003 3467	$\lg \sqrt{1-e^2}$	9.99 854	9.99 854
$\nu_\mu F(1) = R(1)$	-0.008 6124	+0.003 7598	$\lg \nu_{i3}$	9.09 217 n	9.74 376
$3/16 e^2$	0.001 255	0.001 255	$\lg V_3^l$	0.00 089	0.00 089
$3/16 e^2 k^2$	0.000 00827	0.000 00583	$-\lg \cos B_3^l$	-9.89 234	-9.89 203
$\varepsilon_2^{(0)}$	-1.657	-1.858	$\lg \sin A_{3i}'$	9.19 926 n	9.85 116
$-\frac{1}{2} \varepsilon_2^{(0)}$	+0.828	+0.929	A_{3i}'	189°06'13"	134°46'42"
$\pi - (\varphi_l^3 + \varphi_3^l)$	+1.263	+1.244	$\lg \cos A_{3i}'$	9.99 450 n	9.84 780 n
$\times \sigma_2$	+2.091	+2.173	$+$		
$3/16 e^2 k^2 \nu_\mu$	-0.000 00102	+0.000 00321	$\lg (1)_3^l$	8.51 093	8.51 093
$\Delta R(1)$	-0.000 0021	+0.000 0070	$\lg \frac{\partial B_3^l}{\partial s_{i3}} \frac{\text{сек}}{\text{км}}$	1.50 543 n	1.35 873 n
			$a_{i3} = \frac{\partial B_3^l}{\partial s_{i3}}$	-32.021	-22.842

$\sin A_{3i}'$	9.19 926 n	9.85 116	5. Второе приближение.		
$\lg (2)_3^i$	8.50 915	8.50 915	а) Вычисление $w_B^{(1)}$		
$-\lg \cos B_3^i$	-9.89 234	-9.89 203	$\lg s_{i3}^{(1)}$	6.907 017684	6.900 219607
$\lg \frac{\partial L_3^i}{\partial s_{i3}} \frac{сек}{км}$	0.81 607 n	1.46 828	$\lg Q_{i3}$	6.803 961804	6.803 748937
$b_{i3} = \frac{\partial L_3^i}{\partial s_{i3}}$	-6.547	+29.395	$\lg \tilde{\tau}_{i3}^{(1)}$	0.103 055880	0.096 470670
$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial B_3^i}{\partial s_{1.3}} \delta s_{1.3}^{(0)} - \frac{\partial B_3^i}{\partial s_{2.3}} \delta s_{2.3}^{(0)} + w_B^{(0)} &= 0 \\ \frac{\partial L_3^i}{\partial s_{1.3}} \delta s_{1.3}^{(0)} - \frac{\partial L_3^i}{\partial s_{2.3}} \delta s_{2.3}^{(0)} + w_L^{(0)} &= 0 \end{aligned} \right.$			$-\tilde{\tau}_{i3}$	-1.267 814983	-1.248 736109
$-32.021 \delta s_{1.3}^{(0)} + 22.842 \delta s_{2.3}^{(0)} = +186''.7$			$\pi - \varphi_i^3$	+1.944 859873	+2.093 589153
$-6.547 \delta s_{1.3}^{(0)} - 29.395 \delta s_{2.3}^{(0)} = -367''.7$			$\varphi_i^{(10)}$	+0.677 044890	+0.844 853044
$\Delta = +1090.804; \Delta_1 = +2910.96;$			$\lg \sin B_3^{(1)}$	9.795 807	9.795 807
$\Delta_2 = +12996.45$			$\lg \tau_{i3}$	0.003 323	0.079 270
$\delta s_{1.3}^{(0)} = +2.6686 км; \delta s_{2.3}^{(0)} = +11.9145 км.$			$\lg \sin \varphi_i^{(1)}$	9.799 130	0.875 077
$\delta B_3^{(0)} = -85''.5; \delta B_3^{(0)} = -272''.2.$			$\varphi_i^{(1)} \approx \varphi_i^3$	39°01'39.2	48°35'35''.3
$\delta L_3^{(0)} = -17''.471; \delta L_3^{(0)} = +350''.227.$			$-\left[\begin{aligned} \sin 2\varphi_3^i &+0.978 347 \\ + \sin 2\varphi_i^3 &+0.680 267 \end{aligned} \right.$	+0.978 347	+0.992 150
			$-\left[\begin{aligned} \sin 4\varphi_3^i &+0.4050 \\ + \sin 4\varphi_i^3 &-0.9972 \end{aligned} \right.$	+0.680 267	+0.865 218
			$-\left[\begin{aligned} \sin 6\varphi_3^i &-0.81 \\ + \sin 6\varphi_i^3 &+0.78 \end{aligned} \right.$	+0.4050	-0.2482
$s_{i3}^{(0)}$	8070 010 $м$	7.935 385 $м$	$\varepsilon_2^{(1)}$	-1.658 614	-1.857 363
$\delta s_{i3}^{(0)}$	+2 669 $м$	+11 915 $м$	$\varepsilon_4^{(1)}$	+0.5922	+1.1158
$s_{i3}^{(1)}$	8.072 679 $м$	7.947 300 $м$	$\varepsilon_6^{(1)}$	+0.03	+0.93
$B_3^{(0)}$	38°41'53''.3	38°45'00''.0	$D_2 \varepsilon_2^{(1)}$	+0.004 113515	+0.003 243756
$\delta B_3^{(0)}$	-1' 25''.5	-4' 32''.2	$D_4 \varepsilon_4^{(1)}$	+0.000 001517	+0.000 001418
$B_3^{(1)}$	38°40'27''.8	38°40'27''.8	$D_6 \varepsilon_6^{(1)}$	— 1	— 11
$L_3^{(0)}$	4.190 1775	4.1883951	$\Delta \varphi_i^{(1)}$	+0.004 115031	+0.003 245163
$\delta L_3^{(0)}$	-0.000 0847	+0.001 6979	$\varphi_i^{(10)}$	+0.677 044890	+0.844 85 3044
$L_3^{(1)}$	4.190 0928	4.190 0930	$\varphi_i^{(1)} \approx \varphi_i^3$	+0.681159921	+0.848 098207
			$=$	39°01'39''.319	48°35'32''.813

$\sin 2\varphi_3^i$	+0.978 348	+0.992 150	$3/16 e^2, 5/16 e^2$	0.000 12550	0.000 20917
$\varepsilon_2^{(1)}$	-1.658 615	-1.857 368	$3/16 e^2 k^2$	0.000 008273	0.000 005831
$D_2 \varepsilon_2^{(1)}$	+0.004 113518	+0.003 243756	$5/16 e^2 k^4$	0.000 000091	0.000 000045
$\Delta\varphi_3^{(1)}$	+0.004 115034	+0.003 245163			
$\varphi_3^{(1)} \approx \varphi_3^i$	0.681 159 924	+0.848 098207	$-\frac{1}{2} \varepsilon_2^{(1)}$	+0.8293	+0.9287
$=$	39°01'39".320	48°35'32".813	$\pi - (\varphi_i^3 + \varphi_3^i)$	+1.2637	+1.2455
$\lg \sin \varphi_3^{(1)}$	9.799 12992	9.875 07510	σ_2	+2.0930	+2.1742
$- \lg \tau_{i3}$	0.003 32312	0.079 26984	$\times \frac{3}{16} e^2 k^2 \nu_{\mu}$	-0.000 001016	+0.000 003214
$\lg \sin B_i^{(1)}$	9.795 80680	9.795 80526	$\Delta R (1)$	-0.000 002128	+0.000 006988
$B_i^{(1)}$	38°40'28".038	38°40'27".452			
$w_B^{(1)}$	+0.000 002841	+0".586	$\times \frac{3}{4} e^2 R (1)$	0.005 0200	0.005 0200
			$3/4 e^2 R (1)$	-0.008 61258	+0.003 76199
			$\times \frac{3}{4} e^2 R (1)$	-0.000 043235	+0.000 018885
			$-\Delta R (1)$	+0.000 002126	-0.000 006988
б) Вычисление $w_L^{(1)}$			$\nu_{\mu} FR (2) = R (2)$	-0.000 041109	+0.000 011897
$\pi - \varphi_i^3$	1.944 8599	2.093 5892			
$-\varphi_3^i$	0.681 1599	-0.848 0982			
$\pi - (\varphi_i^3 + \varphi_3^i)$	1.263 7000	1.245 4910	$3/8 [\pi - (\varphi_i^3 + \varphi_3^i)]$	+0.474	+0.467
$\times \nu_{\mu}$	-0.122 8226	+0.551 1730			
δ	-0.155 2109	+0.686 4810	$-1/4 \varepsilon_2^{(1)}$	+0.415	+0.464
$\lg \operatorname{tg} \varphi_3^i$	9.908 79675	0.054 60387	$+\frac{1}{32} \varepsilon_4^{(1)}$	+0.019	+0.035
$\lg p_i$	9.090 73637	9.742 74631	σ_4	+0.908	+0.966
$\lg \operatorname{tg} \vartheta_3^i$	9.999 53312	9.797 35018	$\times \frac{5}{16} e^2 k^4 \nu_{\mu}$	-0.000 000011	+0.000 000025
ϑ_3^i	5°42'16".192	32°05'33".430	$\Delta R (2)$	-0.000 000010	+0.000 000024
ϑ_i^3	17°25'44".946	43°49'14".183			
$180^\circ - (\vartheta_i^3 + \vartheta_3^i)$	156°51'58".862	104°05'12".387			
$\pi - (\vartheta_i^3 + \vartheta_3^i)$	2.737 834304	4.816 656917	$\times \frac{5}{6} e^2 R (2)$	0.005 578	0.005 578
$\times \omega \sqrt{1-e^2}$	-0.996 647 670	+0.996 647670	$R (2)$	-0.000 04111	+0.000 01190
$\nu_{\mu} F(0) = R(0)$	-2.728 656180	+1.810 566884	$5/6 e^2 R (2)$	-0.000 000229	+0.000 000066
$-\delta$	+0.155 2109	-0.686 4810	$-\Delta R (2)$	+ 10	- 24
$\times \sigma_0$	-2.573 4453	+1.124 0859	$\nu_{\mu} FR (3) = R(3)$	-0.000 000219	+0.000 000042
$e^2/2$	0.003 346711	0.003 316711			
$\nu_{\mu} F(1) = R(1)$	-0.008 612578	+0.003 764991			

Продолжение приложения 5

$R(0)$	-2.728 656180	+1.810 566884
$R(1)$	-0.008 612578	+0.003 761991
$R(2)$	— 41109	+ 11897
$R(3)$	— 219	+ 42
$\nabla L_{1,3}^{(1)}, \Delta L_{2,3}^{(1)}$	-2.737 310086	+1.814 340814
$L_1+2\pi, L_2$	+6.927 402876	+3.375 753387
$L_3^{(1)}$	4.190 092790	4.190 091 201
$w_L^{(1)}$	+0.000 001591	+ 0".328

в) Вычисление величин $\frac{\partial B_3^i}{\partial s_{i3}}, \frac{\partial L_3^i}{\partial s_{i3}},$

$\partial s_{i3}^{(1)}, \partial B_{i3}^{(1)}$	$\partial L_3^{(1)}, s_{i3}^{(2)},$	$B_3^{(2)}, L_3^{(2)}.$
$\lg \tau_{i3} V_3^i.$ $\cdot \sqrt{1-e^2}$	9.09 160 <i>n</i>	9.74 319
$\lg \cos B_3^i$	9.89 239	9.89 239
$\lg \sin A_{3i}'$ A_{3i}'	9.19 921 <i>n</i> 189°06'09"	9.85 080 134°49'32"
$\lg \cos A_{3i}'$	9.99 450 <i>n</i>	9.84 816 <i>n</i>
$+$ $\lg (1)_3^i$	8.51 093	8.51 093
$\lg \frac{\partial B_3^i}{\partial s_{i3}} \frac{ce\kappa}{100 \mathcal{M}}$	0.50 543 <i>n</i>	0.35 909 <i>n</i>
$a_{i3} = \frac{\partial B_3^i}{\partial s_{i3}}$	-3.2021	-2.2860
$\lg \sin A_{3i}'$	9.19 921 <i>n</i>	9.85 080
$\lg (2)_3^i$	8.50 915	8.50 915
$- \lg \cos B_3^i$	9.89 239	9.89 239
$\lg \frac{\partial L_3^i}{\partial s_{i3}} \frac{ce\kappa}{100 \mathcal{M}}$	7.81 597 <i>n</i>	8.46 756
$b_{i3} = \frac{\partial L_3^i}{\partial s_{i3}}$	0.6546	+2.9347

$$3.2021 \partial s_{1,3}^{(1)} + 2.2860 \partial s_{2,3}^{(1)} + 0".586 = 0$$

$$-0.6546 \partial s_{1,3}^{(1)} - 2.9347 \partial s_{2,3}^{(1)} + 0".328 = 0$$

$$\Delta = +10.8936; \Delta_1 = +2.4695; \Delta_2 = +0.66669$$

80

$$\partial s_{1,3}^{(1)} = +22.669 \quad \partial s_{2,3}^{(1)} = +6.120$$

$$\partial B_1^{(1)} = -0".726; \quad \partial B_2^{(1)} = -0".140$$

$$\partial L_1^{(1)} = -0".1484 \quad \partial L_2^{(1)} = +0".1796$$

$s_{i3}^{(1)}$	8 072 679.0	7.947 300.0
$\partial s_{i3}^{(1)}$	+22.7	+6.1
$s_{i3}^{(2)}$	8 072 701.7	7 947 306.1
$B_3^{(1)}$	38°40'28".038	38°40'27".452
$\partial B_3^{(1)}$	-0".726	-0.140
$B_3^{(2)}$	38°40'27".312	38°40'27".312
$L_3^{(1)}$	4.190 092790	4.190 091201
$\partial L_3^{(1)}$	-0.000 000719	+0.000 000871
$L_3^{(2)}$	4.190 092071	4.190 09272
		240°04'28".529

6. Поверочный расчет

а) Определение $w_B^{(2)}$

$\lg s_{i3}^{(2)}$	6.907 018905	6.900 219941
$\lg Q_{i3}$	6.803 961804	6.803 748937
$\lg \tau_{i3}^{(2)}$	0.103 057101	0.096 471004
$-\tau_{i3}^{(2)}$	-1.267818547	-1.248 737069
$\pi - \varphi_i^3$	+1.944 859873	+2.093 589153
$\varphi_i^{(2)}$	0.677 041326	0.844 852084
$+\Delta \varphi_i^{(2)}$	+0.004 115034	+0.003 245163
$\varphi_i^{(2)} = \varphi_i^3$	+681 156360	+0.848 097247
$=$	39°01'38".583	48°35'32".614
$\lg \sin \varphi_i^{(2)}$	9.799 12801	9.875 07473
$\lg \tau_{i3}$	0.003 32312	0.079 26984
$\lg \sin B_i^{(2)}$	9.795 80489	9.795 80489

$B_3^{(2)}$	38°40'27".312	38°40'27".312	$\pi - (\vartheta_1^3 + \vartheta_3^i)$	2.737 835025	1.816 657799
$w_B^{(2)}$		0".000	$\times \omega \sqrt{1-e^2}$	-0.996 64767 0	0.996 647670
б) Определение $w_L^{(2)}$			$\nu_\mu F(0) = R(0)$	-2.728 656899	+1.810 567763
			$-\delta$	+0.155 2114	-0.686 4816
$\pi - \varphi_1^3$	1.944 8599	2.093 5892	$\times \sigma_0$	-2.573 4455	+1.124 0862
$-\varphi_3^i$	-0.681 1564	-0.848 0972	$\frac{e^2}{2}$	0.003 346711	0.003 346711
$\pi - (\varphi_1^3 + \varphi_3^i)$	1.263 7035	1.245 4920	$\nu_\mu F(1) = R(1)$	-0.008612578	+0.003 761992
$\times \nu_\mu$	0.122 8226	+0.551 1730			
δ	-0.155 2114	+0.686 4816	$R(0)$	-2.728656899	+1.810 567763
$\lg \operatorname{tg} \varphi_3^i$	9.908 79358	0.054 60302	$R(1)$	-0.008 612578	+0.003 761992
$\lg p_{13}$	9.090 73637	9.742 74631	$R(2)$	- 41109	+ 11897
$\lg \operatorname{tg} \vartheta_3^i$	9.999 52995	9.797 34933	$R(3)$	- 219	+ 42
ϑ_3^i	5°42'16".043	32°05'33".248	$\nabla L_{1,3}^{(2)}, \Delta L_{2,3}^{(2)}$	-2.737 310805	+1.814 341692
ϑ_1^3	17°25'44".946	43°49'14".183	$L_1 + 2\pi, L_2$	+6.927402876	+2.375 750387
$180^\circ - (\vartheta_1^3 + \vartheta_3^i)$			$L_3^{(2)}$	4.190 092071	4.190 092081
$+ \vartheta_3^i$	156°51'59".011	104°05'12".569	$w_L^{(2)}$	-0.000 000010	-0".0021

до $1-3^\circ$ среднюю широту B_{ik} каждой такой части и выписали отвечающее B_{ik} значение R_{ik} среднего радиуса кривизны (с точностью до 1 км). Теперь уже можно было подсчитать искомые начальные значения $s_{i3}^{(0)}$ длин засекающих сторон $i3$ на сфероиде, приняв

$$s_{i3}^{(0)} = \left(\frac{1}{4} \sum_k R_{ik} \right) \sigma_{i3}^{(0)}, \quad (i=1,2).$$

Последующие вычисления выполнялись так, как это описано в [Дел. 6,Б], причем выяснилось, что несмотря на кажущуюся грубость изложенного выше расчета длин $s_{i3}^{(0)}$ ошибки $\nabla s_{i3}^{(0)}$ этих длин оказались сравнительно малыми:

а) $\nabla s_{13}^{(0)} = -2.7$ км при $s_{1.3} = 8072.7$ км;

б) $\nabla s_{2.3}^{(0)} = -11.9$ км при $s_{2.3} = 7947.3$ км.

Для нахождения на сфероиде длин $s_{i.3}$ с точностью до 0,2 м и координат B_3 , L_3 с точностью до $0''.001-0''.002$ потребовалось два полных приближения (одно—с 6 знаками, другое—с 8—9 знаками) и одно неполное, проверочное приближение.

3. Сопоставляя значения координат B_3 , L_3 определяемой точки 3, найденные обоими способами, убеждаемся в их хорошей сходимости

1-й способ: $B_3 = 38^\circ 40' 27'' \cdot 310$; $L_3 = 240^\circ 04' 28'' \cdot 531$.

2-й способ: $B_3 = 48^\circ 40' 27'' \cdot 312$; $L_3 = 240^\circ 04' 28'' \cdot 529$.

Возникающие при этом расхождения не выходят из пределов точности вычисления по 8-значным таблицам логарифмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. W. Bessel. Ueber die Berechnung der geographischen Längen und Breiten aus geodetischen Vermessungen. Astr. Nachr., Bd. 4, № 86, 1826.
2. Ю. С. Сикорский. Элементы теории эллиптических функций. ОНТИ, 1936.
3. В. П. Ветчинкин. Новые формулы и таблицы эллиптических интегралов и функций. Изд. ВВА РККА, М., 1935.
4. Ф. А. Слудский. Лекции по высшей геодезии. М., 1894.
5. Ф. Н. Красовский. Курс высшей геодезии. Ч. 2, М., 1942.
6. Б. Ф. Крутой. Общие способы решения основных расчетных задач на земном сфероиде (краткое сообщение). Известия ТПИ, т. 118, 1963.