ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 131 1965

АКСИОМАТИКА КОНЕЧНЫХ ТОЧЕЧНЫХ СИСТЕМ

Г. Г. ПЕСТОВ

(Представлена кафедрой инженерно-вычислительной математики)

В ряде работ, опубликованных в последние годы [1], [2], [3] [4], [5], [6], изучаются конечные множества точек, расположенных на эвклидовой плоскости. В этих работах предполагается, что никакие три точки из данного множества не лежат на одной прямой. Каждая прямая, проходящая через две точки такого множества, осуществляет разбиение множества точек на два подмножества. При этом все результаты названных работ, относящиеся к конечным множествам на эвклидовой плоскости, могут быть сформулированы в терминах такого рода разбиений.

Поэтому представляется разумным освободиться от предположения о том, что конечные множества или конечная точечная система, как мы будем говорить, следуя Картеси [1], лежит в эвклидовой плоскости. Цель настоящей статьи—сформулировать аксиоматику конечных систем, получить некоторые следствия из этих аксиом и ввести простейшие понятия.

Везде, где это возможно, мы стараемся удержать терминологию и обозначения, использованные в уже цитированных работах [1], [2], [3], [4], [5], [6], а также в примыкающих к этому направлению работах [7], [8].

Дано некоторое конечное множество точек a, b, $c, \ldots$, которое мы обозначим S. Дана функция $N(a, b)$, принимающая целочисленные значения, положительные или отрицательные, и удовлетворяющая следующим условиям:

а) $-n \leqslant N(a, b) \leqslant n, \qquad N(a, b) \neq 0;$

б) $|N(a,b)| \neq |N(a,d)|, \qquad \text{если } b \neq d;$

в) $$\frac{N(a,b)N(a,c)\,[N^2(a,c)-N^2(a,b)]}{N(b,a)N(b,c)[N^2(b,c)-N^2(b,a)]} < 0;$$

г) в любом подмножестве $S' \subset S$ найдутся такие точки a и b, что для всех $c \in S'$

$$N(a,c)\,N(a,b)\,[N^2(a,c) - N^2(a,b)] > 0.$$

Определение. Конечное множество точек, для которого задана двойная циклическая функция $N(a,b)$, называется конечной точечной системой.

Определим функцию порядка, принимающую два значения $+1$ и -1, и заданную для каждой тройки точек из S:

$$\zeta(a, b, c) = Sgn\,\{(N(a, b)\,N(a, c)[N^2(a, c) - N^2(a, b)]\}.$$

Если $\zeta(a, b, c) = +1$, будем говорить, что точка c лежит слева от прямой (a, b).

Совокупность точек, лежащих слева от (a,b), будем обозначать $L(a,b)$ Совокупность точек, лежащих справа от (a,b), будем обозначать $R(a,b)$.

Лемма треугольника

$$\zeta(c,b,c)=\zeta(b,c,a),$$

$$\zeta(a,c,b)=-\zeta(a,b,c).$$

Эти равенства следуют из аксиомы (c).

Таким образом, значение функции порядка для каждой тройки точек сохраняется при циклической перестановке точек.

Иногда удобно заменить функцию $N(x,y)$ на другую $N_1(x,y)$ так, чтобы функция порядка при этом не изменилась и для данной пары $(a, b): N(a,b)=1$.

Определение. Будем говорить, что функции $N(x,y)$ и $N_1(x,y)$ эквивалентны, если порождаемые ими функции порядка совпадают.

Теорема. Пусть $N(x,y)$ двойная циклическая функция. Определим функцию $N_1(x,y)$

$$N_1(x,y)=N(x,y), \quad x\neq a,$$

$$N_1(a,y)=\{Res\,[|N(a,y)|-|N(a,b)|+n+1[\ (mod n)\}\ \zeta(a,b,y).$$

Тогда $N_1(x,y)$ есть двойная циклическая функция, эквивалентная $N(x,y)$ и $N_1(a,b)=1$; через $Res\, m\,(mod n)$ мы обозначаем наименьший строго положительный вычет числа m по модулю n.

Доказательство. Требуется доказать, что

$$\zeta(x,y,z)=\zeta_1(x,y,z). \tag{1}$$

Если $x\neq a$, то (1) следует из определения $N_1(x,y)$. Если $x=a$, то

$$\zeta_1(a,y,z)=Sgn\,\{N_1(a,y)\,N_1(a,z)\,[N^2(a,z)-N^2(a,y)]\}=$$
$$=\zeta(a,b,y)\,\zeta(a,b,z)\cdot Sgn\{N_1^2(a,z)-N_1^2(a,y)\}.$$

Далее рассмотрим три случая:

1) $|N(a,z)|>|N(a,b)|$ и $|N(a,y)|>|N(a,b)|$.

$$\zeta_1(a,y,z)=Sgn\,\{N_1(a,y)\,N_1(a,z)\,[N_1^2(a,z)-N_1^2(a,y)]\}=$$
$$=Sgn\,\{N^2(a,y)-N^2(a,b)\}\,\zeta(a,b,y)\,Sgn\,\{N_1^2(a,z)-$$
$$-N_1^2(a,b)\}\,\zeta(a,b,z)\cdot Sgn\,\{N_1^2(a,z)-N_1^2(a,y)\}=$$
$$=\zeta(a,b,y)\,\zeta(a,b,z)\cdot Sgn\,\{N_1^2(a,z)-N_1^2(a,y)=$$
$$=\zeta(a,b.y)\cdot\zeta(a,b,z)\,Sgn\,\{N^2(a,z)-N^2(a,y)\}=$$
$$=Sgn\{N(a,b)\,N(a,y)\cdot[N^2(a,y)-N^2(a,b)]\,N(a,b)\,N(a,z)\times$$
$$\times[N^2(a,z)-N^2(a,b)]\,[N^2(a,z)-N^2(a,y)]\}=$$
$$=Sgn\{N(a,y)\,N(a,z)[N^2(a,z)-(N^2(a,y)]\}=$$
$$=\zeta(a,y,z);$$

2) $|N(a,z)|<|N(a,b)|$, $|N(a,y)|<|N(a,b)|$.

$$\zeta_1(a,y,z)=Sgn\,\{N(a,y)\,N(a,b)\,[N^2(a,y)-N^2(a,b)]\cdot$$
$$\cdot N(a,z)\,N(a,b)\ [N^2(a,z)-N^2(a,b)]\cdot[n+|N(a,z)|-$$
$$-|N(a,b)|-n-|N(a,y)|+|N(a,b)|]\}=$$
$$=Sgn\{N(a,y)\,N(a,z)\ [N^2(a,z)-$$
$$-N^2(a,y)]\}=\zeta(a,y,z);$$

3) $|N(a,z)| > |N(a,b)|, \qquad |N(a,y)| < |N(a,b)|.$

$$\zeta(a,y,z) = Sgn\{N(a,y)\, N(a,b)\, [N^2(a,y) - N^2(a,b)] \cdot$$
$$\cdot N(a,z)\, N(a,b) \cdot [N^2(a,z) - N^2(a,b)] \cdot [|N(a,z)| -$$
$$- |N(a,b)| - n - |N(a,y)| + |N(a,b)|]\} =$$
$$= Sgn\{-N(a,y)\, N(a,z)\, [|N(a,z)| - |N(a,y)| - n]\} =$$
$$= Sgn\{N(a,y)\, N(a,z)\, [N^2(a,z) - N^2(a,y)]\} = \zeta(a,y,z).$$

Замечание. Аналогично можно построить двойную циклическую функцию $N_1(x,y)$, удовлетворяющую условию $N_1(a,b) = k$.

Лемма 1. Каждая подсистема есть система, иными словами, если дана система S и S' подмножество из S, то можно так определить $N'(a,b)$, что $\varsigma(a,b,c) = \varsigma'(a,b,c)$ для каждой тройки точек $a,b,c \in S'$.

Доказательство. В самом деле, на S' можно задать двойную циклическую функцию, удовлетворяющую условиям а), б), в):

$$N'(a,b) = \left\{1 + \sum_{\substack{c \neq b \\ c \neq a}} \frac{1}{2}\, \{Sgn[N^2(a,b) - N^2(a,c)] + 1\right\} \cdot$$
$$\cdot Sgn\, N(a,b)$$

Покажем, что
$$\zeta(a,b,c) = \zeta'(a,b,c).$$

$$\zeta'(a,b,c) = Sgn\,\{N'(a,b)\, N'(a,c)\, [N'^2(a,c) - N'^2(a,b)]\} =$$
$$= Sgn\left\{N(a,b)\, N(a,c) \left[1 + \sum_x \frac{1}{2}\ [1 + Sgn\,[N^2(a,c) -\right.\right.$$
$$- N^2(a,x)]] - 1 - \sum \frac{1}{2}\ [Sgn[N^2(a,b) - N^2(a,y)] + 1]]\} =$$
$$= Sgn\{N(a,b)\, N(a,c)\ [|N(a,c)| - |N(a,b)|]\} = \zeta(a,b,c).$$

Определение. Точка a называется внешней точкой по отношению к S, если $a \in S'$, где S есть подсистема S' и существует такая точка $b \in S$, что $R(a,b) = \overline{0}$.

Если $a \in S$ и a—внешняя по отношению к S, то будем говорить, что a—внешняя точка S. Будем называть a,b смежными внешними точками, если $L(a,b) = \overline{0}$ или $R(a,b) = \overline{0}$.

Лемма 2. Существует, по меньшей мере, три внешние точки в S.

Доказательство. По свойству (c) существует хотя бы одна точка a такая, что $R(a,b) = \overline{0}$. Покажем, что b—также внешняя. Для этого введем двойную циклическую функцию условием $N'(b,a) = n$. Тогда $N(b,c) > 0$, $c \in S$.

В самом деле
$$\zeta(a,b,c) = +1,$$
следовательно,
$$\zeta(b,a,c) = -1,$$
$$\zeta(b,a,c) = Sgn\{N(b,a)\, N(b,c) . [N^2(b,c) - N^2(b,a)]\} < 0.$$

Отсюда $N(b,c) > 0$.

Следовательно, $N(b,c)$ принимает значения $1, 2, \ldots, n$.

Пусть d такая, что $N(b,d) = 1$ (следовательно, $d \neq a$).

Тогда
$$\zeta(b,d,c) = Sgn\,\{N(b,d)\, N(b,c)\ [N^2(b,c) - N^2(b,d)]\} = +1.$$

Следовательно, $R(b,d)=\overline{0}$, значит b — внешняя, так же следует, что d — внешняя, что и требовалось доказать.

Лемма Каратеодори. Если $d\in S$ не есть внешняя точка системы S, то найдется Δabc, содержащий $d; a, b, c\in S$.

При этом мы говорим, что $\Delta\, a_1a_2a_3$ содержит d, если существует такой циклический порядок $a_{i1}a_{i2}a_{i3}$, что

$$d\in\{L(a_1, a_2)\cap L(a_2, a_3)\cap L(a_3, a_1)\}.$$

Доказательство.

d — не внешняя точка. Если A — точечное множество, то A будем обозначать число элементов A.

Пусть $\alpha=\min\limits_{b\in S}\{L(d, b),\ R(d, b)\}$.

Пусть $L(a,b)=\alpha$, следовательно, $\overline{\overline{L(d,b)}}\ll\overline{\overline{L(d,c)}}$ и $\overline{\overline{L(d,b)}}\ll\overline{\overline{R(d,c)}}$. Пусть a такая, что $a\in L(a,b)$

Произведем циклическую нумерацию, приняв $N(d,b)=1$. Тогда наименьшее положительное значение, не равное единице

$$N(d, c)\geqslant 3.$$

В самом деле, если бы нашлась точка f такая, что $N(d,f)=2$, тогда

$$L(d,f)=\{e{:}N(d,e)\,N(d,f)\,[N^2(d,e)-N^2(d,f)]>0\}=$$
$$=\{e{:}N(d,e)\,[N^2(d,e)-2^2]>0\}=L(d,b)/b,$$

следовательно, $\overline{\overline{L(d,f)}}=\overline{\overline{L(d,b)}}-1=\alpha-1$, что невозможно.

Итак, наименьшее из положительных значений, больших единицы

$$N(d, e)\geqslant 3.$$

Следовательно, существует точка g такая, что $N(d,g)=-2$. Треугольник Δagb и есть искомый.

В самом деле,

$$\zeta(g, b, d)=\zeta(d, g, b)=$$
$$=Sgn\{N(d, b)\,N(d,g)\,[N^2(d,b)-N^2(d,g)]\}=+1,$$
$$\zeta(g, b, d)=+1.$$

Далее

$$\zeta(a, g, d)=\zeta(d, a, g)=Sgn\{N(d, a)\,N(d, g)\,[N^2(d, g)-$$
$$-N^2(d, a)]\}=Sgn\{(1-2)N(d, a)\,[4-N^2(d, a)]\}=+1.$$

Таким образом,

$$\zeta(a, g, d)=+1.$$

конец,

$$\zeta(a, d, b)=\zeta(d, b, a)=Sgn\{N^2(d, a)-1\}=+1.$$

Итак,

$$\zeta(a, d, b)=+1.$$

Равенства (2), (3), (4) означают, что $d\in\Delta\, abg$.

Лемма о внешней точке. Если $a,b,c\in S$ и $L(a, b)=c$, то c — внешняя точка системы S.

Доказательство.

1. Имеет место одно из равенств

$$L\,(a, c)=\overline{0}\quad\text{или}\quad L\,(c, b)=\overline{0}.$$

Тогда, по определению, c — внешняя точка

2. $L(a, c)\neq 0, L(c, b)\neq\overline{0}.$

Возьмем $d \in L(a, c)$ и $e \in L(c, b)$.

Будем обозначать через S_n систему, состоящую из n точек.

Рассмотрим S_5, состоящую из точек a, b, c, d, e. Тогда a не может быть внешней точкой в S_5.

В самом деле, всякая внешняя точка имеет две смежные внешние точки, между тем $\zeta(a, c, d) = +1$, $\zeta(a, c, b) = -1$, следовательно, a и c — не смежные; $\zeta(d, a, b) = -1$, $\zeta(d, a, c) = +1$, следовательно, a и d — не смежные; $\zeta(a, b, c) = +1$, $\zeta(a, b, d) = -1$, следовательно, a и b — не смежные.

Таким образом, точка a не может иметь двух смежных точек, а поэтому не является внешней точкой. То же относится к точке b. Следовательно, внешними будут точки c, d, e. При этом $d \in R(d, c)$; следовательно, $d, b, e \in R(d, c)$. (5)

Далее, $d \in R(c, b)$; следовательно, $a, d \in R(c, b)$.

Вернемся теперь к системе S.

Введем двойную циклическую функцию условием: $N(c, b) = 1$. Тогда для $d \in R(c, b)$ $N(c, d) < 0$; для любой l из $L(c, b)$, $N(c, l) > 0$.

Заметим, что для $d \in L(a, c)$, $|N(c, d)| < |N(c, a)|$.

В самом деле,

$$\zeta(c, a, d) = -1,$$

$$\zeta(c, a, d) = Sgn[|N(c, d)| - |N(c, a)|].$$

Итак, $|N(c, d)| < |N(c, a)|$.

Аналогично, если $f \in R(c, b) \cap L(c, a)$, то

$$|N(c, f)| > |N(c, a)| > |N(c, d)|.$$

Пусть d_1 такое, что $|N(c, d_1)| = \min\limits_{x \in R(c,b)} |N(c, x)|$.

Тогда $d_1 \in R(c, a)$.

Далее $R(c, d_1) = \overline{0}$. В самом деле, если $x \in R(c, b)$, то

$$\varsigma(c, x, d) = Sgn\{(|N(c, d)| - |N(c, x)|\} = -1, x \in \overline{R}(c, d).$$

Если $x \in L(c, b)$, то $x \in L(c, d)$ в силу (5). Следовательно, $R(c, d) = \overline{0}$, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kartesci Franz. Extremalaufgaben über endliche Punktsysteme, Publs. mat., 4, № 1—2, 16—27, 1955.
2. B. J. Birch. On 3N points in a plane, Proc. Cambridge Philos. Soc., 55, № 4, 289—293, 1959.
3. И. М. Яглом, В. Г. Болтянский. Выпуклые фигуры, 1951.
4. Седлачек. Заметка о выпуклом многоугольнике. Časop. pěstov. mat. 82. № 3, 1957.
5. Седлачек. О системах диагоналей в выпуклом многоугольнике. Časop pěstov. mat. 81, № 2, 1956.
6. Вацлав Полак. О существовании некоторых систем диагоналей выпуклого многоугольника. Časop. pěstov. mai., 85, № 1, 70—74, 1960.
7. Joussen Jakob. Ordnungsfunktionen infreien Ebenen, Abhandl. Math. seminar Univ. Hamburg., 24, 239—263, 1960.
8. Glock Erich. Ordnungsfunktionen, die af Seiteneinteilungen besonderer Art führen, Arch. Math., 12, № 1, 71—77, 1961.