ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 131 1965

О ГЛУБИНЕ ТОЧКИ В ТОЧЕЧНОЙ СИСТЕМЕ

Г. Г. ПЕСТОВ

(Представлена кафедрой инженерно-вычислительной математики)

В настоящей статье вводится понятие глубины точки в точечной системе, изучаются некоторые свойства точечных систем, связанные с понятием глубины. Затем обобщается один результат Берча.

Определение. Пусть S_n есть подсистема S_{n+1}, $a \in S_{n+1}$. Величину

$$d(a, S_n) = \min_{x \in S_n} \{\overline{\overline{R(a, x) \cap S_n}}, \quad \overline{\overline{L(a, x) \cap S_n}}\}$$

будем называть глубиной точки a в S_n. Здесь $\overline{\overline{M}}$ означает число элементов множества M.

По-видимому, понятие глубины точки ранее не вводилось, хотя имеются результаты, относящиеся к глубине. Именно, известна

Теорема. На плоскости дано n точек: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Существует такая точка b в этой плоскости, что по каждую сторону от любой прямой, проходящей через точку b и не проходящей через точки $a_1, a_2, \ldots, a_n$, находится не менее $\left[\frac{n}{3}\right]$ точек [1].

Некоторые теоремы о глубине

Теорема 1. Если $c \in R(a, b)$, то

$$\overline{\overline{R(a, b)}} \geqslant d(c, S_n) + 1.$$

Доказательство. Рассмотрим подсистему $S_m \in S_n$, состоящую из $L(a, b)$ и точек a, b, c. Сечения в системе S_n мы будем обозначать $L(x, y)$ и $R(x, y)$, а сечения в S_m — через $L'(x, y)$ и $R'(x, y)$.

Имеем $R'(a, b) = c$, то есть $L'(b, a) = c$. Тогда по лемме о внешней точке [3], точка c есть внешняя точка в системе S_m; следовательно, найдется такая точка $d \in S_m$, $d \neq c$, что

$$R'(c, d) = \overline{0}.$$

Но так как система S_m получена из S_n отбрасываем $\overline{\overline{R(a, b)}} - 1$ точек, то в системе S_n

$$\overline{\overline{R(c, b)}} \leqslant \overline{\overline{R(a, b)}} - 1.$$

По определению глубины $\overline{\overline{R(c, b)}} \geqslant d(c, S_n)$, то есть, $d(c, S_n) + 1 \leqslant \overline{\overline{R(a, b)}}$, что и требовалось доказать.

Определение. Систему S будем называть выпуклой, если все точки системы — внешние.

Иначе S называется выпуклой, если коэффициент наполнения [5] $P(S)=0$.

Теорема 2. Пусть $S' \in S$, S' — выпуклая, $a \in S$ и в системе $S'' = S' \bigcup a$ точка a — внутренняя,

Тогда $d(a,S) \geqslant 1 + \min\limits_{x \in S'} d(x,S)$.

Доказательство. Так как a — внутренняя точка S'', то по лемме Каратеодори [3] найдутся такие три точки x_1, x_2, x_3, что a лежит внутри $\Delta x_1x_2x_3$. Пусть $b \in S$. Тогда в пятерке (a, x_1, x_2, x_3, b) точка a — внутренняя, то есть не является внешней.

В самом деле,

$$R(a, x_i) \neq \bar{0}, \quad L(a, x_i) \neq \bar{0}, \quad i = 1,\ 2,\ 3.$$

Следовательно, a не может иметь двух смежных внешних точек и потому не является внешней в пятерке (a, x_1, x_2, x_3, b) [3].

Поэтому $R(a,b) \bigcap S_5 \neq \bar{0}$, $L(a,b) \bigcap S_5 \neq \bar{0}$. Пусть $x_{i_1} \in R(a, b)$, $x_{i_2} \in L(a,b)$. Тогда, на основании теоремы 1,

$$R(a,b) \geqslant d(x_{i_1}, S) + 1, \quad L(a,b) \geqslant d(x_{i_2}, S) + 1.$$

Отсюда

$$d(a,S) = \min_{b \in S} \{\overline{\overline{R(a,b)}},\ \overline{\overline{L(a,b)}}\} \geqslant$$

$$\geqslant \min_{i} d(x_i, S) + 1 \geqslant \min_{x \ni S'} d(x, S) + 1.$$

То есть

$$d(a,S) \geqslant \min d(x,S) + 1.$$

Теорема 3. Пусть точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ системы S_n расположены в порядке нестрогого возрастания глубины.

Обозначим S_m подсистему S_n, состоящую из m первых точек x_1, $x_2, \ldots, x_m$. Имеют место равенства

$$d(x_i, S_m) = d(x_i, S_n), \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Доказательство. Покажем, что

$$d(x_i, S_{n-1}) = d(x_i, S_n), \quad i = 1,\ 2, \ldots, n-1.$$

Ясно, что

$$d(x_i, S_{n-1}) \leqslant d(x_i, S_n). \tag{1}$$

Докажем обратное неравенство.

Для любого $y \neq x_n$: $d(x_i, S_n) \leqslant R(x_i, y, S_n)$

и $d(x_i, S_n) \leqslant L(x_i, y, S_n)$.

Здесь через $R(x,y,S)$ и $L(x,y,S)$ мы обозначаем сечения в системе S.

Пусть $x_n \in R(x_i, y, S_n)$. Тогда по теореме 1:

$$\overline{\overline{R(x_i, y, S_n)}} \geqslant d(x_n, S_n) + 1.$$

В системе S_{n-1}

$$\overline{\overline{R(x_i, y, S_{n-1})}} = \overline{\overline{R(x_i, y, S_n)}} - 1.$$

Следовательно,

$$\overline{\overline{R(x_i, y, S_{n-1})}} \geqslant d(x_n, S_n)$$

и

$$\overline{\overline{L(x_i, y, S_n)}} = \overline{\overline{L(x_i, y, S_{n-1})}} \geqslant d(x_i, S_n).$$

Отсюда

$$d(x_i, S_{n-1}) = \min\{R(x_i, y, S_{n-1}),\ L(x_i, y, S_{n-1})\} \geqslant$$
$$\geqslant \min\{d(x_n, S_n),\ d(x_i, S_n)\}.$$

Так как

$$d(x_n, S_n) \geqslant d(x_i, S_n),$$

то

$$d(x_i, S_{n-1}) \geqslant d(x_i, S_n); \tag{2}$$

сопоставляя (1) и (2), находим

$$d(x_i, S_{n-1}) = d(x_i, S_n).$$

Применяя индукцию, получим

$$d(x_i, S_m) = d(x_i, S_n),\ i \leqslant m < n.$$

Следствие. В системе S_{2n+1} для двух точек x, $y \in S_{2n+1}$, $x \neq y$ не может выполняться равенство

$$d(x, S_{2n+1}) = d(y, S_{2n+1}) = n. \tag{*}$$

Доказательство. Пусть (*) имеет место. Тогда, по теореме 3,

$$d(x_{2n}, S_{2n+1}) = d(x_{2n}, S_{2n}),$$

то есть

$$d(x_{2n}, S_{2n}) = n. \tag{3}$$

Но последнее равенство невозможно.

В самом деле, пусть $y \in S_{2n}$ таково, что $\overline{\overline{R(x_{2n}, y)}} = n$.

Зададим двойную циклическую функцию в S_{2n} условием

$$N(x_{2n}, y, S_{2n}) = 1.$$

Пусть y_2 таково, что

$$|N(x_{2n}, y_2, S_{2n})| = 2.$$

Пусть для определенности

$$N(x_{2n}, y_2, S_{2n}) = 2.$$

Тогда, если $z \in R(x_{2n}, y, S_{2n})$, то функция порядка

$$\zeta(x_{2n}, y_1, z) = sgn\{N(x_{2n}, z_1, S_{2n})\,N(x_{2n}, y_1, S_{2n}) \times$$
$$\times [N^2(x_{2n}, z, S_{2n}) - N^2(x_{2n}, y_1, S_{2n})]\} = Sgn\,N(x_{2n}, z, S_{2n}) < 0.$$

и

$$|N(x_{2n}, z, S_{2n})| > 2.$$

Так как

$$y_2 \in R(x_{2n}, y_1, S_{2n}),$$

то

$$\zeta(x_{2n}, y_2, z) = Sgn\{N(x_{2n}, z, S_{2n})\,N(x_{2n}, y_2, S_{2n})[N^2(x_{2n},$$
$$z, S_{2n}) - N^2(x_{2n}, y_2, S_{2n})]\} = Sgn\,N(x_{2n}, z, S_{2n}) < 0,$$

то есть

$$z \in R(x_{2n}, y_2, S_{2n}).$$

Значит

$$R(x_{2n}, y_1, S_{2n}) \subset R(x_{2n}, y_2, S_{2n}). \tag{4}$$

Кроме того,

$$y_1 \in R(x_{2n}, y_1,, S_{2n}), \tag{5}$$

и

$$\zeta(x_{2n}, y_2, y_1) = Sgn\{N(x_{2n}, y_1, S_{2n})\,N(x_{2n}, y_2, S_{2n}) \times$$
$$\times [N^2(x_{2n}, y_1, S_{2n}) - N^2(x_{2n}, y_2, S_{2n})]\} = -1.$$

Следовательно:

$$y_1 \in R(x_{2n}, y_2, S_{2n}). \tag{6}$$

Из (4), (5), (6)

$$n = \overline{\overline{R(x_{2n}, y_1, S_{2n})}} < \overline{\overline{R(x_{2n}, y_2, S_{2n})}}.$$

Значит

$$\overline{\overline{L(x_{2n}, y_2, S_{2n})}} \leqslant n - 1.$$

Откуда $d(x_{2n}, S_{2n}) \leqslant n-1$, что противоречит (3), следовательно, (3) невозможно.

К теореме Берча

В работе Берча [2] доказана

Теорема. На плоскости дано $3N$ точек, их можно разбить на N троек так, что N треугольников с вершинами в этих точках имеют общую точку.

Пользуясь понятием глубины точки в системе, мы получим более общий результат.

Обозначим через $t(q)$ наибольшее число треугольников без общих вершин с вершинами в точках S_{n+1}, содержащих точку $q \in S_{n+1}$.

Имеет место

Теорема 4.

$$t(q) = \min\left\{\left[\frac{n}{3}\right],\ d(q, S_n)\right\}.$$

Доказательство. 1. Пусть точка μ_0 такова, что

$$L(q, \mu_0) = d, \quad \text{где} \quad d = d(q, S_{n+1}).$$

В подсистеме $S' = L(q, \mu_0) \cup \mu_0 \cup q$ введем двойную циклическую функцию условием

$$N(q, \mu_0, S') = 1.$$

Каждой точке $\mu \in L(q, \mu_0)$ припишем номер $m = N(q, \mu, S') - 1$ и будем обозначать μ через μ_m.

Рассмотрим подсистему $S'' = R(q, \mu_0) \cup q \cup \mu_0$. Введем в S'' циклическую функцию условием

$$N(q, \mu_0, S'') = n - d = p.$$

Точку $\pi \in R(q, \mu_0) \cup \mu_0$ будем обозначать π_k, если

$$N(q, \pi, S'') = k, \quad k = 1, 2, \ldots p.$$

2. **Лемма 1.** Если $p < 2d$, то найдется точка π_i, дающая вместе с μ_1 и μ_d накрывающий треугольник.

Доказательство. Обозначим

$$\alpha_i = \overline{\overline{L(q, \mu_i) \cap S''}}.$$

Здесь $L(x, y)$ и $R(x, y)$ — сечения в S_{n+1}.

Тогда

а) $1 \leqslant \alpha_1 \leqslant p - d$,

б) $d \leqslant \alpha_d$ [4].

Но из $p < 2d$ следует,

$$p - d < d, \quad \alpha_1 < \alpha_d.$$

Значит

$$F = [\{L(q, \mu_1) \cap S''\} \setminus \{L(q, \mu_d) \cap S''\}] \neq \overline{0}.$$

Пусть $\pi_j \in F$. Тогда $\Delta \mu_1 \pi_j \mu_d$ содержит точку q.

3. Отбросим теперь в системе S_{n+1} точки μ_1, π_j, μ_d получим подсистему S_{n-2}. Покажем, что

$$d(q, S_{n-2}) = d - 2.$$

В самом деле

$$\overline{\overline{L(q, \pi_p, S_{n-2})}} = d - 2,$$

поэтому

$$d(q, S_{n-2}) \leqslant n - 2.$$

С другой стороны,

$$d(q, S_{n-2}) = \min_{\mu \in S_{n-2}} \{\overline{\overline{L(q, \mu, S_{n-2})}},\ \overline{\overline{R(q, \mu, S_{n-2})}}\} \geqslant$$

$$\geqslant \min \{\overline{\overline{L(q, \mu, S_{n+1})}} - 2,\ \overline{\overline{R(q, \mu, S_{n+1})}} - 2\} = d(q, S_{n+1}) - 2.$$

Следовательно,

$$d(q, S_{n-2}) \geqslant d(q, S_{n+1}) - 2 = d - 2.$$

Откуда

$$d(q, S_{n-2}) = d(q, S_{n+1}) - 2.$$

4. Пусть S_{n+1} такова, что $p < 2d$, то есть $d(q, S_{n+1}) > \left[\frac{n}{3}\right]$.

Построим подсистему S_{n-2}, как описано в предыдущем пункте, затем, исходя из S_{n-2} так же построим S_{n-5} и так далее, до тех пор, пока не получим S_{n-3k+1}, в которой впервые

$$p_k = p - k \geqslant 2(d - 2k) = 2d_k,$$

то есть

$$d(q, S_{n-3k+1}) \leqslant \left[\frac{n-3k}{3}\right].$$

Таким образом, если мы покажем, что в S_{n-3k+1} существует ровно $\left[\frac{n}{3}\right] - k$ накрывающих треугольников, то в S_{n+1} будет равно $\left[\frac{n}{3}\right]$ накрывающих треугольников.

5. Таким образом, остается доказать, что имеет место

Лемма 2. Если $d(q, S_{n+1}) \leqslant \left[\frac{n}{3}\right]$ и, следовательно, $p \geqslant 2d$, то

$$t(q, S_{n+1}) = d(q, S_{n+1}).$$

Доказательство. Введем индукцией по числу точек в системе S_{m+1}. При $m = 2$, 3, 4 лемма 2 тривиальна.

Пусть для всех $m \leqslant n - 3$ лемма 2 верна. Покажем, что она будет верна и для $m = n$.

В системе S_{n+1}

$$\pi_d \in L(q, \mu_d, S_{n+1}),$$

так как $d \leqslant \alpha_d$.

Точка $\pi_p \in R(q, \mu_d, S_{n+1})$. Следовательно, $\Delta\pi_d\pi_p\mu_d$ содержит q.

Рассмотрим подсистему S_{n-2}, полученную из S_n отбрасываем точек π_d, π_p, μ_d.

Покажем, что

$$d(q, S_{n-2}) = d(q, S_{n+1}) - 1.$$

Пусть $y \in S_{n-2}$; оценим

$$\min \{\overline{\overline{R(q, y, S_{n-2})}},\ \overline{\overline{L(q, y, S_{n-2})}}\}.$$

Возможны три случая:

$$\text{а)} \quad \mu_d \in L(q, y, S_{n+1}); \quad \pi_p, \pi_d \in R(q, y, S_{n+1})$$

или

$$[\mu_d \in R(q, y, S_{n+1}); \quad \pi_p, \pi_d \in L(q, y, L_{n+1})].$$

Тогда

$$\overline{\overline{L(q,\ y,\ S_{n-2})}} = \overline{\overline{L(q,\ y,\ S_{n+1})}} \geqslant d-1, \tag{7}$$

$$\overline{\overline{R(q,\ y,\ S_{n-2})}} = R\,\overline{\overline{(q,\ y,\ S_{n+2})}} - 2 \geqslant (p-d+1) - 2 \geqslant d-1.$$

Здесь мы воспользовались неравенством $p \leqslant 2d$. Следовательно,

$$\overline{\overline{R(q,\ y,\ S_{n-2})}} \geqslant d-1. \tag{8}$$

б) Пусть

$$\pi_p \in R(q,\ y,\ S_{n+1});\quad \pi_d,\ \mu_d \in L(q,\ y,\ S_{n+1})$$

или $[\ \pi_p \in L(q,\ y,\ S_{n+1});\quad \pi_d,\ \mu_d \in R(q,\ y,\ S_{n+1})]$.

Тогда

$$L(q.\ y,\ S_{n-2}) = L(q,\ y,\ S_{n+1}) - 2 \geqslant (d+1) - 2 = d-1. \tag{9}$$

Далее

$$\overline{\overline{R(q,\ y,\ S_{n-2})}} = \overline{\overline{R(q,\ y,\ S_{n+1})}} - 1 \geqslant d-1,$$

$$\overline{\overline{R(q,\ y,\ S_{n-2})}} \geqslant d-1. \tag{10}$$

в) Пусть, наконец,

$$\pi_d \in L(q,\ y,\ S_{n+1});\quad \mu_d,\ \pi_p \in R(q,\ y,\ S_{n+1})$$

или

$$(\pi_d \in R(q,\ y,\ S_{n+1});\quad \mu_d,\ \pi_p \in L(q,\ y,\ S_{n+1}).$$

В этом случае

$$\overline{\overline{R(q,\ y,\ S_{n-2})}} = \overline{\overline{R(q,\ y,\ S_{n+1})}} - 2 = (d+1) - 2 = d-1. \tag{11}$$

С другой стороны,

$$\overline{\overline{L(q,\ y,\ S_{n-2})}} - \overline{\overline{L(q,\ y,\ S_{n+1})}} - 1 \geqslant d-1. \tag{12}$$

Из (7) — (12) следует

$$d(q,\ S_{n-2}) = d-1.$$

В то же время, $d_1 = d-1$, $p_1 = p-2$, поэтому

$$2d_1 = 2d - 2 \leqslant p - 2 = p_1,$$

то есть

$$2d_1 \leqslant p_1.$$

6. Итак, отбросив один накрывающий треугольник $\Delta\pi_d\pi_p\mu_d$, мы получили систему S_{n-2}, в которой $p_1 \geqslant 2d_1$.

По предположению, для S_{n-2} лемма 2 верна. Поэтому в S_{n-2} существует $t(q,\ S_{n-2}) = d_1$ накрывающих треугольников. Следовательно, в S_{n+1} существует $t(q,\ S_{n+1}) = d_1 + 1 = d$ накрывающих треугольников. Итак, лемма 2 доказана. Тем самым доказана теорема 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Яглом, В. Г. Болтянский. Выпуклые фигуры. 1951.

2. B. J. Birch. On 3 N points in a plane. Proc. Cambridge Philos. Soc, 55, № 4 289—293, 1959.

3. Г. Г. Пестов. Аксиоматика конечных систем. Статья в настоящем сборнике.

4. Г. Г. Пестов. Некоторые экстремальные задачи теории точечных систем. Статья в настоящем сборнике.

5. Г. Г. Пестов. О некоторых числовых характеристиках точечных систем. Статья в настоящем сборнике.