ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 131 1965

НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТОЧЕЧНЫХ СИСТЕМ

Г. Г. ПЕСТОВ

(Представлена кафедрой инженерно-вычислительной математики)

Цель настоящей статьи — оценка порядка покрытия точки в точечной системе в зависимости от глубины точки. Из этих оценок в качестве одного из следствий вытекают результаты, полученные Картеси [1].

Пусть S_{n+1} — точечная система, $q \in S_{n+1}$. Обозначим через S_n систему S_{n+1} без q.

Определение. Если q лежит внутри ровно T треугольников с вершинами, принадлежащими S_n, то говорят, что q покрывается T раз.

T — порядок покрытия q в системе S_n.

Порядок покрытия точки q будем обозначать $T(q)$.

Постановка задачи: дана глубина $d(q)$ [3] точки q в системе S_n.

Найти оценки для $T(q)$.

Обозначим $d(q) = d$. Пусть $\overline{\overline{R(q,\ \pi_1)}} = d$.

Введем двойную циклическую функцию [4] условием $N(q,\ \pi_1) = 1$.

Занумеруем точки, принадлежащие $R(q,\ \pi_1)$.

Точке $\mu \in R(q,\ \pi_1)$ припишем номер

$$i(\mu) = \overline{\overline{R(q,\ \pi_1) \cap R(q,\ \mu)}} + 1.$$

Точку с номером i будем обозначать μ_i, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ d$.

Занумеруем точки, принадлежащие $L(q,\ \pi_1)$, включая и π_1. Точке $\pi \in L(q,\ \pi_1)$ припишем номер

$$K(\pi) = \overline{\overline{R(q,\ \pi) \cap L(q,\ \pi_1)}} + 2,\ K(\pi_1) = 1.$$

Точку π с номером κ обозначим π_κ, $\kappa = 1,\ 2,\ \ldots,\ p = n - d$.

Обозначим $\alpha_i = \overline{\overline{L(q,\ \mu_i) \cap L(q,\ \pi_1)}} + 1$

Тогда из определения глубины [3] следует

$$\begin{cases} i \leqslant \alpha_i \leqslant p - d + i - 1 \\ \alpha_i \leqslant \alpha_j\ \ i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ d, \qquad i \leqslant j, \end{cases} \tag{1}$$

где $p = n - d$. Тогда число накрывающих треугольников с одной вершиной в $L(q,\ \pi_1) \cup \pi_1$ и двумя вершинами в $R(q,\ \pi_1)$ есть $T_1 = \sum\limits_{i<j} (\alpha_j - \alpha_i)$. Число треугольников с одной вершиной в $R(q,\ \pi_1)$ и двумя вершинами в $L(q,\ \pi_1) \cup \pi_1$ есть $\sum\limits_{i=1}^{d} \alpha_i (p - \alpha_i) = T_2$,

Так как накрывающий треугольник не может иметь все три вершины в $R(q, \pi_1)$ или в $L(q, \pi_1)\cup\pi_1$, то общее число накрывающих треугольников есть

$$T = T_1 + T_2 = \sum_{i<j} (\alpha_j - \alpha_i) + \sum_{i=1}^{d} \alpha_i (p - \alpha_i). \qquad (2)$$

Итак, требуется найти максимум и минимум выражения (2), если α_i удовлетворит условиям (1).

Дифференцируем по α_i.

$$T'\alpha_i = p - 2\alpha_i - 1 - d + 2i, \quad i = 1, 2, \ldots, d.$$

Приравниваем к нулю

$$T'\alpha_i = 0; \quad \alpha_i = \frac{p-d-1}{2} + i. \qquad (3)$$

Рассмотрим разность

$$\Delta T = T(\alpha_1 + \Delta\alpha_1, \ldots, \alpha_d + \Delta\alpha_d) - T(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) =$$
$$= \sum_{i=1}^{d} \Delta\alpha_i (p + 2i - d - 1 - 2\alpha_i - \Delta\alpha_i).$$

Итак, при отклонении от экстремальных значений, определяемых формулой (3)

$$\Delta T = -\sum_{i=1}^{d} (\Delta\alpha_i)^2.$$

Таким образом, при отклонении от экстремальных значений аргументов $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$, определяемых (3), значение T монотонно убывает по каждому аргументу. Поэтому целые значения, ближайшие к значениям, определяемым (3), дадут максимум функции $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, а значения, наиболее удаленные от (3) и удовлетворяющие неравенствам (1), дадут минимум.

Наибольшие отклонения от (3) дает набор значений $\alpha_i = i$.
Поэтому

$$\tau(d) = \min T = \sum_{i=1}^{d} i(p-i) + \sum_{i<j} (j-i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{d} [i^2 + (p-d-1)i] = \frac{d(d+1)(2d+1)}{6} + (p-d-1)\frac{d+1}{2}d =$$
$$= \frac{d(d+1)(3n-4d-2)}{6}.$$

Итак,

$$\tau(d) = \min T(q) = \frac{d(d+1)(3n-4d-2)}{6}, \qquad (4)$$

где $d = d(q)$.

Найдем теперь $\max T(q)$.

а. n — четное. Тогда α_i из формулы (3) не целые. Положим $\alpha_i' = \alpha_i + \frac{1}{2}$. Тогда $\Delta\alpha_i = \frac{1}{2}$. Используем уже найденное значение $\min T(q)$.

$$\max T(q) = \min T(q) + \left(\frac{p-d-1}{2}\right)^2 \cdot d - \frac{1}{4}\cdot d =$$
$$= d\cdot\frac{4d^2 - 6nd + 3n^2 - 4}{12}.$$

Итак, для n четного

$$\Theta(d) = \max T(q) = \frac{4d^2 - 6nd + 3n^2 - 4}{12} \cdot d \cdot$$

б. Аналогично для n нечетного получим

$$\Theta(d) = d\,\frac{4d^2 - 6nd + 3n^2 - 1}{12}\ . \qquad (6)$$

Формулы (4), (5) и (6) полностью решают поставленную задачу.

Получим теперь в качестве следствия из (5), (6) результат Картеси.

Введем величины

$$K(S_n) = \max_{S_{n+1}} \max_{q \in S_{n+1}} T(q),$$

$$S_{n+1} \supset S_n,$$

$$W(n) = \max_{S_n} K(S_n),$$

$$V(n) = \min_{S_n} K(S_n).$$

Для нахождения $W(n)$ заметим, что $W(n) = \max_d \Theta(d)$.

а) n — нечетное

$$\Theta'(d) = 0,\ d = \frac{6n \pm \sqrt{12}}{12} = \frac{n}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{12}},$$

$$d = \frac{n}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}}.$$

ак как значение d есть целое число $d \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$, то

$$W(n) = \Theta\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right) = \frac{n(n^2-1)}{24}\ .$$

в) n — четное.

$$\Theta'(d) = 0,\ d = \frac{n}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{3}}\ .$$

Так как $d \leqslant \frac{n}{2} - 1$, то $W(n) = \frac{n(n^2-4)}{24}$.

Таким образом,

$$W(n) = \begin{cases} \dfrac{n(n^2-1)}{24} & n \text{ — нечетное} \\ \dfrac{n(n^2-4)}{24} & n \text{ — четное} \end{cases} \qquad (7)$$

Формулы (7) получены Картеси [1].

Так как $d(S_n) \geqslant \left[\frac{n}{3}\right]$, [2], то $\tau\left(\left[\frac{n}{3}\right]\right) \leqslant V(n) \leqslant \Theta\left(\left[\frac{n}{3}\right]\right)$, где τ и Θ находятся по формулам (4), (5), (6). Отсюда следует, что $W(n) > V(n)$ при $n \geqslant 7$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kartesci Franz. Extremalaufgaben über endliche Punktsysteme Publs. mat., 4, № 1—2, 16—27, 1955.

2. И. М. Яглом, В. Г. Болтянский. Выпуклые фигуры. 1951.

3. Г. Г. Пестов. О глубине точки в точечной системе. Известия ТПИ, т. 131, 1965.

4. Г. Г. Пестов. Аксиоматика конечных точечных систем. Известия ТПИ, т. 131, 1965.