ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 131 1965

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

Л. Е. ПОРТНОВ

(Представлена проф. П. П. Куфаревым)

Обозначим через $M=\{\varphi(t)\}$ множество всех непрерывных неубывающих функций $\varphi(t)$, определенных на $[0,1]$, таких, что $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$.

Лемма 1. Пусть последовательность функций

$$\{\varphi_n(t)\}\subset M \tag{1}$$

сходится и

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\varphi(t).$$

Если t_0 — точка непрерывности функции $\varphi(t)$, то для любой последовательности $\{t_n\}$, где $t_n\in[0,1]$ и $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=t_0$, последовательность $\{\varphi_n(t_n)\}$ (2) сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t_n)=\varphi(t_0)$.

Последовательность $\{t_n\}$ будем считать строго монотонной, что можно делать, не нарушая общности рассуждений.

Так как $\varphi_n(t)\in M$ и последовательность $\{t_n\}$ монотонна, то справедливо неравенство

$$\begin{aligned}|\varphi_{n+m}(t_{n+m})-\varphi_{n+m}(t_0)|&\leqslant|\varphi_{n+m}(t_n)-\varphi_{n+m}(t_0)|\leqslant|\varphi_{n+m}(t_n)-\varphi(t_n)|+\\&+|\varphi_{n+m}(t_0)-\varphi(t_n)|\leqslant|\varphi_n(t_0)-\varphi(t_n)|+|\varphi_{n+m}(t_0)-\varphi_n(t_0)|+\\&+|\varphi_{n+m}(t_n)-\varphi(t_n)|\leqslant|\varphi_n(t_0)-\varphi(t_0)|+|\varphi(t_n)-\varphi(t_0)|+\\&+|\varphi_{n+m}(t_0)-\varphi_n(t_0)|+|\varphi_{n+m}(t_n)-\varphi(t_n)|.\end{aligned} \tag{3}$$

Возьмем $\varepsilon>0$. Легко видеть, что

$$|\varphi_n(t_0)-\varphi(t_0)|<\frac{\varepsilon}{5}\qquad\text{при}\quad n>N_1(\varepsilon,t_0), \tag{4}$$

$$|\varphi_n(t_n)-\varphi(t_0)|<\frac{\varepsilon}{5}\qquad\text{при}\quad n>N_2(\varepsilon,t_0),$$

$$|\varphi_{n+m}(t_0)-\varphi_n(t_0)|<\frac{\varepsilon}{5}\qquad\text{при}\quad n>N_3(\varepsilon,t_0),$$

$$|\varphi_{n+m}(t_n)-\varphi(t_n)|<\frac{\varepsilon}{5}\qquad\text{при}\quad n>N_4(\varepsilon,t_n).$$

Отсюда

$$|\varphi_{n+m}(t_{n+m}) - \varphi_{n+m}(t_0)| < \frac{4}{5}\varepsilon$$

при $$n + m > N_5 = \max_{i=1,2,3} N_i + N_4. \tag{5}$$

Рассмотрим неравенство

$$|\varphi_n(t_n) - \varphi(t_0)| \leqslant |\varphi(t_0) - \varphi_n(t_0)| + |\varphi_n(t_n) - \varphi_n(t_0)|.$$

Из (4) и (5) имеем

$$|\varphi(t_0) - \varphi_n(t_0)| < \frac{\varepsilon}{5} \qquad \text{при} \quad n > N_3,$$

$$|\varphi_n(t_n) - \varphi_n(t_0)| < \frac{4}{5}\varepsilon \qquad \text{при} \quad n > N_5,$$

и $$|\varphi_n(t_n) - \varphi(t_0)| < \varepsilon \qquad \text{при} \quad n > N_5.$$

Лемма 2. Пусть последовательности функций $\{\varphi_n(t)\} \subset M$, $\{\psi_n(t)\} \subset M$ равномерно сходящиеся.

Тогда последовательность функций $\{\varphi_n[\psi_n(t)]\}$ также равномерно сходящаяся.

Доказательство легко следует из неравенства

$$|\varphi[\psi(t)] - \varphi_n[\psi_n(t)]| \leqslant |\varphi[\psi(t)] - \varphi[\psi_n(t)]| + |\varphi[\psi_n(t)] - \varphi_n[\psi_n(t)]|.$$

Теорема. Пусть $\{\varphi_n(t)\} \subset M$ $n = 1, 2, \ldots$ (6) для некоторой последовательности $\{\varphi_m(t)\} \subset \{\varphi_n(t)\}$ можно указать равномерно сходящуюся последовательность функций

$$\{\psi_m(t)\} \subset M \tag{7}$$

такую, что последовательность функций

$$\{\varphi_m[\psi_m(t)]\} \tag{8}$$

будет сходиться равномерно на [0, 1].

Теорему достаточно доказать для случая точечно сходящейся последовательности $\{\varphi_n(t)\}$ к разрывной функции $\psi(t)$. Доказательство будем вести в предложении, что число точек разрыва $\varphi(t)$ бесконечно. В других случаях доказательство упрощается.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как функция $\varphi(t)$ монотонна, то точки отрезка [0,1], в которых она разрывна, можно занумеровать.

Пусть $\varphi(t)$ имеет разрывы в точках $t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots$ (9)

Положим $\varphi(t_i - 0) = \alpha_1(i)$, $\varphi(t_i + 0) = \alpha_2(i)$, $i = 1, 2, \ldots$

Построим для каждой точки t_i последовательности

$$x_1(i), x_2(i), \ldots, x_n(i), \ldots \tag{10}$$

$$y_1(i), y_2(i), \ldots, y_n(i), \ldots \tag{11}$$

удовлетворяющие условиям:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n[x_n(i)] = \alpha_1(i)$, $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n[y_n(i)] = \alpha_2(i)$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(i) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(i) = t_i$,

3) при $i \neq j$ $(x_n^{(i)}, y_n^{(i)}) \bigcap (x_n^{(j)}, y_n^{(j)}) = 0$.

Покажем, что такие последовательности (10) и (11) построить можно. Введем в рассмотрение последовательности

$$x_1^0(i), x_2^0(i), \ldots, x_n^0(i), \ldots \tag{12}$$

$$y_1^0(i),\ y_2^0(i),\dots,y_n^0(i),\dots \tag{13}$$

где $x_n^0(i)$ таково, что $\varphi_n[x_n^0(i)] = \alpha_1(i)$ и при $t > x_n^0(i)$ $\varphi_n(t) > \alpha_1(i)$; $y_n^0(i)$ такова, что $\varphi_n[y_н^0(i)] = \alpha_2(i)$ и при $t < y_n^0(i)$ $\varphi_n(t) < \alpha_2(i)$.

Пусть $d_i = \alpha_2(i) - \alpha_1(i)$. Так как $\varphi(t_i - 0) = \alpha_1(i)$, то можно указать для каждого натурального числа κ точку p_κ такую, что

$$|\varphi(p_\kappa) - \alpha_1(i)| < \frac{d_i}{2^{\kappa+1}}, \qquad |p_\kappa - t_i| < \frac{1}{2^{\kappa+1}}. \tag{14}$$

Получим последовательность точек $\{p_\kappa\}$.

Ясно, что $\lim\limits_{\kappa\to\infty} p_\kappa = t_i$.

Для каждой точки $p_\kappa \in \{p_\kappa\}$ и последовательности (6) можно указать номер m_κ такой, что при $n > m_\kappa$

$$|\varphi_n(p_\kappa) - \varphi(p_\kappa)| < \frac{\alpha_i}{2^{\kappa+1}}. \tag{15}$$

Таким образом, последовательности $\{p_\kappa\}$ ставим в соответствие последовательность чисел $\{m_\kappa\}$. При выбранном m_κ, $m_{\kappa+1}$ будем выбирать так, чтобы было $m_{\kappa+1} > m_\kappa$.

Теперь построим последовательность $\{x_n(i)\}$

$$x_1(i) = x_1^0(i),\ x_2(i) = x_2^0(i),\dots,x_{m_1}^{(i)} = x_{m_1}^{0(i)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{m_1+2}^{(i)} = x_{m_1+2}^{(i)} = \dots = x_{m_2}^{(i)} = p_1 \\ x_{m_2+1}^{(i)} = x_{m_2+2}^{(i)} = \dots = x_{m_3}^{(i)} = p_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{m_\kappa+1}^{(i)} = x_{m_\kappa+2}^{(i)} = \dots = x_{m_\kappa+1}^{(i)} = p_\kappa \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}$$

Определяем таким образом для всех $n > m_\kappa$ таких, что $\varphi_n(p_\kappa) - \varphi(p_\kappa) > 0$, если же $\varphi_n(t)$ такова, что $\varphi_n(p_\kappa) - \varphi(p_\kappa) \leqslant 0$, то полагаем $x_n^{(i)} = x_n^0(i)$.

Аналогично строим последовательность $\{y_n(i)\}$. Построенные нами последовательности $\{x_n^{(i)}\}$, $\{y_n^{(i)}\}$ можно считать, соответственно, последовательностями (10) и (11)

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n[x_n(i)] = \alpha_1(i)$, что следует из (10), так как $\lim\limits_{\kappa\to\infty} \varphi(p_\kappa) = \alpha_1(i)$. Аналогично $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n[y_n(i)] = \alpha_2(i)$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(i) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(i) = t_i$,

3) $x_n^{(i)}, y_n^{(i)}) \cap (x_n(j), y_n(j)) = 0$ при $i \neq j$, это следует из того, что $(x_n^0(i), y_n^0(i)) \cap (x_n^0(j), y_n^0(j)) = 0$ при $i \neq j$, а наши последовательности $\{x_n(i)\}$, $\{y_n(i)\}$ построены таким образом, что $(x_n(i), y_n(i)) \subset (x_n^0(i), y_n^0(i))$, так как из (9) и (10) ясно, что $\varphi_n(x_n(i), y_n(i)) \subset (\alpha_1(i), \alpha_2(i))$.

Построим последовательность функций

$$\{\gamma_n(t)\} \subset M, \tag{16}$$

где

$$\gamma_n(t) = \varphi_n(t) \text{ при } t \overline{\in} U(x_n(i), y_n(i)), \text{линейна на } [x_n(i), y_n(i)].$$

Построим последовательности функций

$$\{\delta_n^\kappa(t)\} \quad \kappa = 1, 2\dots \tag{17}$$

при $\kappa = \kappa_0$, $n = 1, 2,\dots$ следующим образом:

$$\delta_n'(t) = \begin{cases} x_n(1) \text{ при } t = x_1(1), \\ y_n(1) \text{ при } t = y_1(1), \\ \text{линейна на } [0, x_1(1)],\ [x_1(1), y_1(1)],\ [y_1(1), 1]. \end{cases}$$

Ясно, что $\delta'(t)=\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n'(t)$ непрерывная на $[0,1]$ функция, причем на $[0, x_1(1)]$, $[y_1(1), 1]$ $\delta'(t)$ строго монотонна, можно считать, что $0\neq t_1\neq 1$ при $t\in[x_1(1), y_1(1)]$, $\delta'(t)=t_1$.

Пусть $\delta'(t)=t_2$ при $t=\tau_2$, $\tau_2\in\Delta$, где Δ — интервал строгой монотонности функции $\delta'(t)$.

Положим

$$\delta^2(t)=\begin{cases}\delta'(t) \text{ при } t\,\overline{\in}\,(R_1, S_1),\\ t_2 \text{ при } t\in\overline{\delta}_{\tau_2}=[a_1, b_1],\\ \text{причем } \tau_2\in[a_1, b_1]\subset(R_1, S_1) \text{ и отрезок } [a_1, b_1] \text{ настолько мал,}\\ \text{что } |\delta^1(t)-\delta^2(t)|<\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

Построим последовательность функций

$$\{\delta_n^2(t)\}\subset M,$$

так

$$\delta_n^2(t)=\begin{cases}\delta_n'(t) \text{ при } t\,\overline{\in}\,(R_1, S_1),\\ x_n(2) \text{ при } t=a_1,\\ y_n(2) \text{ при } t=b_1\\ \text{линейна на } [R_1, a_1],\ [a_1, b_1],\ [b_1, S_1].\end{cases}$$

Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n^2(t)=\delta^2(t)$.

Пусть уже построены $\delta^3(t)$ и $\{\delta_n^3(t)\},\dots,$ $\delta^\kappa(t)$ и $\{\delta_n^\kappa(t)\}$ и пусть $\delta^\kappa(t)=t_{\kappa+1}$ при $t=\tau_{\kappa+1}$, $\tau_{\kappa+2}\in\Delta$, где $\Delta=[R_\kappa, S_\kappa]$ — интервал строгой монотонности функции $\delta^\kappa(t)$.

Положим

$$\delta^{\kappa+1}(t)=\begin{cases}\delta^\kappa(t) \text{ при } t\,\overline{\in}\,[R_\kappa, S_\kappa],\\ t_{\kappa+1} \quad \text{при } t\in\overline{\delta}_{\tau_{\kappa+1}}=[a_\kappa, b_\kappa],\end{cases}$$

$$\delta^{\kappa+1}(t)=\begin{cases}\delta^\kappa(t) \text{ при } t\,\overline{\in}\,[R_\kappa, S_\kappa],\\ t_{\kappa+1} \quad \text{при } t\in\overline{\delta}_{\tau_{\kappa+1}}=[a_\kappa, b_\kappa],\\ \text{причем } \tau_{\kappa+1}\in[a_\kappa, b_\kappa]\subset(R_\kappa, S_\kappa) \text{ и отрезок } [a_\kappa, b_\kappa] \text{ на-}\\ \text{столько мал, что } |\delta^\kappa(t)-\delta^{\kappa+1}(t)|<\dfrac{1}{2^{\kappa+1}}.\end{cases}\tag{18}$$

Построим также последовательность функций

$$\{\delta_n^{\kappa+1}(t)\}\subset M,$$

где

$$\delta_n^{\kappa+1}(t)=\begin{cases}\delta_n^\kappa(t) \qquad \text{при } t\,\overline{\in}\,(R_\kappa, S_\kappa),\\ x_n(\kappa+1) \text{ при } t=a_\kappa,\\ y_n(\kappa+1) \text{ при } t=b_\kappa,\\ \text{линейна на } [R_\kappa, a_\kappa],\ [a_\kappa, b_\kappa],\ [b_\kappa, S_\kappa].\end{cases}$$

Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n^{\kappa+1}(t)=\delta^{\kappa+1}(t)$.

Итак, имеем равномерно сходящиеся последовательности функций

$$\delta_1'(t),\dots,\delta_n'(t),\dots \lim\delta_n'=\delta'(t),$$

. . . .

$$\delta_1^\kappa(t),\ldots,\ \delta_n^\kappa(t),\ldots \lim \delta_n^\kappa(t) = \delta^\kappa(t). \qquad (19)$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

В силу (18) $\delta(t) = \lim\limits_{\kappa\to\infty} \delta^\kappa(t)$ непрерывная функция.

Рассмотрим функции $\varphi_n(t) \in (1)$, $\gamma_n(t) \in$ (16) (20)

$\varphi_n[x_n(i)] = \gamma_n[x_n(i)]$, $\varphi_n[y_n(i)] = \gamma_n[y_n(i)]$ (в силу (16)).

Положим

$$\varepsilon_n(i) = \frac{\gamma_n[y_n(i)] - \gamma_n[x_n(i)]}{2^n}.$$

Произведем разбиение отрезка $[x_n(i),\ y_n(i)]$ точками $x_n(i) = l_0(i) < l_1(i) < \ldots < l_{2^n}(i) = y_n(i)$, чтобы $\varphi_n[x_n(i)] + (p-1)\varepsilon_n(i) \leqslant \varphi_n(t) \leqslant \varphi_n[x_n(i)] + p\varepsilon_n(i)$ при $t \in [l_{p-1}^{(i)}, l_p(i)]$, и точками $x_n(i) = S_0(i) < S_1(i) < \ldots < S_{2^n}(i) = y_n(i)$, чтобы $\gamma_n[x_n(i)] + (p-1)\varepsilon_n(i) \leqslant \gamma_n(t) \leqslant \gamma_n[x_n(i)] + p\varepsilon_n(i)$ $t \in [S_{p-1}(i), S_p(i)]$ $p = 1, 2 \ldots 2^n$.

Положим

$$\eta_n^\kappa(t) = \alpha_n^\kappa(t) + \sum_{i=1}^{\kappa} \sum_{p=1}^{2_n} \beta_p^i(t) \qquad \begin{matrix} \kappa = 1, 2,\ldots \\ \text{при } \kappa = \kappa_0 \\ n = 1, 2\ldots \end{matrix}$$

$$\beta_p^i(t) = \begin{cases} \dfrac{l_p^{(i)}(t - S_{p-1}^{(i)}) + l_{p-1}^{(i)}(S_p^{(i)} - t)}{S_p^{(i)} - S_{p-1}^{(i)}} & \text{при } t \in [S_{p-1}(i),\ S_p(i)], \\ 0 \text{ при } t \in [0,\ 1] \diagdown [S_{p-1}(i),\ S_p(i)] & \end{cases}$$

$$\alpha_n^\kappa(t) = \begin{cases} t \text{ при } t \in [0,\ 1] \diagdown \bigcup\limits_{i=1}^{\kappa} [x_n(i),\ y_n(i)], \\ 0 \text{ при } t \in \bigcup\limits_{i=1}^{\kappa} [x_n(i),\ y_n(i)]. \end{cases}$$

Легко видеть, что функции последовательности $\{\eta_n^\kappa(t)\}$ (20) таковы, что $\eta_n^\kappa(t) \in M$, $\eta_n^\kappa[x_n(i)] = x_n(i)$, $\eta_n^\kappa[y_n(i)] = y_n(i)$ и при $t \in [x_n(i), y_n(i)]$.

$$|\varphi_n[\eta_n^\kappa(t)] - \gamma_n(t)| \leqslant \max_i \varepsilon_n(i) \leqslant \frac{1}{2^n}. \qquad (21)$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(i) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(i) = t_i$, то $\eta^\kappa(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \eta_n^\kappa(t) = t$, т. е. каждая последовательность функций $\{\eta_n^\kappa(t)\}$ $\kappa = 1, 2,\ldots$ сходится равномерно на $[0,\ 1]$ ([1]).

Итак, мы имеем последовательности равномерно сходящихся функций

$$\left.\begin{matrix} \eta_1'(t),\ldots,\eta_n'(t),\ldots \lim\limits_{n\to\infty} \eta_n'(t) = t, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \eta_1^\kappa(t),\ldots,\eta_n^\kappa(t),\ldots \lim\limits_{n\to\infty} \eta_n^\kappa(t) = t. \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{matrix}\right\} \qquad (22)$$

Пусть $\{\kappa_m\} \cdot m = 1, 2,\ldots$ последовательность чисел натурального ряда такая, что при $i > \kappa_m$

$$d_i = \alpha_2(i) - \alpha_1(i) < \frac{1}{2^m}. \qquad (23)$$

Такая последовательность существует, так как $\sum_i d_i \leqslant 1$. Пусть далее $\{n_m\}$ последовательность натуральных чисел такая, что

$$|\eta_{n_m}^{\kappa m}(t) - t| < \frac{1}{2^m}, \qquad |\delta_{n_m}^{\kappa m}(t) - \delta^{\kappa m}(t)| < \frac{1}{2^m},$$

причем последовательность $\{n_m\}$ строим так, чтобы было $n_m < m$. Такую последовательность чисел $\{n_m\}$ можно выбрать, так как последовательности (19) и (22) сходятся равномерно. Отсюда, учтя (16), (20), (21), (23) и то, что $n_m > m$, имеем

$$|\varphi_{n_m}[\eta_{nm}^{\kappa m}(t)] - \gamma_{n_m}(t)| < \frac{1}{2^m}, \tag{24}$$

$$\lim_{m\to\infty} \eta_{nm}^{\kappa m}(t) = t, \qquad \lim_{m\to\infty} \delta_{n_m}^{\kappa m}(t) = \lim_{m\to\infty} \delta^{\kappa m}(t) = \delta(t).$$

Для простоты обозначим

$$\{\varphi_{n_m}(t)\} = \{\varphi_m(t)\}, \qquad \{\gamma_{n_m}(t)\} = \{\gamma_m(t)\},$$

$$\{\eta_{n_m}^{\kappa m}(t)\} = \{\eta_m(t)\}, \qquad \{\delta_{n_m}^{\kappa m}(t)\} = \{\delta_m(t)\}.$$

Неравенство (24) запишется так:

$$|\varphi_m[\eta_m(t)] - \gamma_m(t)| < \frac{1}{2^m}. \tag{24'}$$

Пусть $\psi_m(t) = \eta_m[\delta_m(t)]$. По лемме (2) последовательность функций $\{\psi_m(t)\}$ (25) сходится равномерно.

Теперь для доказательства теоремы достаточно показать, что последовательность функций $\{\gamma_m[\delta_m(t)]\}$ (26) сходится равномерно.

В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$ произвольно.

$$|\varphi_m[\psi_m(t)] - \varphi_{m+n}[\psi_{m+n}(t)]| = |\varphi_m\{\eta_m[\delta_m(t)]\} - \varphi_{m+n}\{\eta_{m+n}[\delta_{m+n}(t)]\}| \leqslant$$
$$\leqslant |\varphi_m\{\eta_m[\delta_m(t)]\} - \gamma_m[\delta_m(t)]| + |\varphi_{m+n}\{\eta_{m+n}[\delta_{m+n}(t)]\} - \gamma_{m+n}[\delta_{m+n}(t)]| +$$
$$+ |\gamma_m[\delta_m(t)] - \gamma_{m+n}[\delta_{m+n}(t)]|. \tag{27}$$

Из полученного неравенства (27) с учетом (24′) следует, что по следовательность функций $\{\varphi_m[\psi_m(t)]\}$ (28) сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$, если равномерно сходится последовательность функций (26).

Покажем, что последовательность функций (21) сходится равномерно. Для этого достаточно показать, учитывая [1], что $\xi(t) = \lim_{m\to\infty} \gamma_m \cdot [\delta_m(t)]$ непрерывная на $[0, 1]$ функция.

При $t \in [a_i, b_i]$

$$\gamma_m[\delta_m(t)] = \frac{\gamma_m[y_m(i)] - \gamma_m[x_m(t)]}{b_i - a_i}(t - b_i) + \gamma_m[y_m^{(i)}].$$

Но так как $\lim_{m\to\infty} \gamma_m[x_m(i)] = \alpha_1(i)$, $\lim_{m\to\infty} \gamma_m[y_m(i)] = \alpha_2(i)$, то

$$\xi(t) = \frac{\alpha_2(i) - \alpha_1(i)}{b_i - a_i}(t - b_i) + \alpha_2(i) \quad t \in [a_i, b_i].$$

Пусть $E = [0, 1] \setminus \bigcup_i t_i$, где t_i — точка разрыва функции $\varphi(t)$. На E функция $\varphi(t)$ непрерывна. Покажем, что $\xi(t) = \varphi[\delta(t)]$ при $t \in \delta^{-1}(E)$, тогда так как $\delta(t)$ непрерывна на $[0, 1]$, а $\varphi(t)$ непрерывна на E, то функция $\xi(t) = \varphi[\delta(t)]$ непрерывна на $\delta^{-1}(E) = [0, 1] \setminus \bigcup_i [a_i, b_i]$.

Пусть $t_0 \in \delta^{-1}(E)$, тогда $\delta(t_0) \in E$, т. е. $\delta(t_0)$ — точка непрерывности функции $\varphi(t)$.

Так как $\lim\limits_{m\to\infty} \delta_m(t_0) = \delta(t_0)$, то по лемме 1

$$\lim_{m\to\infty} \gamma_m[\delta_m(t_0)] = \lim_{m\to\infty} \varphi_m[\delta_m(t_0)] = \varphi[\delta(t_0)].$$

При $t \in ([0, 1] \setminus \bigcup_i [a_i, b_i])$ $\gamma_m[\delta_m(t)] = \varphi_m[\delta_m(t)]$ в силу (13) и (16).

Теперь нетрудно видеть, что $\xi(t) = \lim\limits_{m\to\infty} \gamma_m[\delta_m(t)]$ есть функция непрерывная во всех точках $[0, 1]$, так как

$$\xi(t) = \begin{cases} \varphi[\delta(t)] \text{ при } t \in \delta^{-1}(E) = [0, 1] \setminus \bigcup_i [a_i, b_i], \\ \dfrac{\alpha_2(i) - \alpha_1(i)}{b_i - a_i}(t - b_i) + \alpha_2(i) \text{ при } t \in [a_i, b_i] \end{cases}$$

и если $t_\kappa \in \delta^{-1}(E)$, тогда при $t_\kappa \to a_i \lim\limits_{\kappa\to\infty} \varphi[\delta(t_\kappa)] = \alpha_1(i)$, так как $\delta(t_\kappa) \to (t_i - 0)$, а при $t_\kappa \to b_i \lim\limits_{\kappa\to\infty} \varphi[\delta(t_\kappa)] = \alpha_2(i)$, так как $\delta(t_\kappa) \to (t_i + 0)$.

Если же $\{t_\kappa\} \in [0, 1] \setminus \delta^{-1}(E)$, то при $t_\kappa \to a_i \lim\limits_{\kappa\to\infty} \xi(t_\kappa) = \alpha_1(i)$ при $t_\kappa \to b_i \lim\limits_{\kappa\to\infty} \xi(t_\kappa) = \alpha_2(i)$, т. е. $\xi(t)$ непрерывна в точках a_i, b_i.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полиа и Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа. Гос. изд. технико-теоретической литературы, М., т. 1, отдел 11, № 127, 1956.