ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 131 1965

МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО НЕПРЕРЫВНЫХ КРИВЫХ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Л. Е. ПОРТНОВ

(Представлена проф. П. П. Куфаревым)

Под L_R будем подразумевать множество всех непрерывных кривых метрического пространства R [1].

Теорема 1. Пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t) \in M$, где $M = \{\varphi(t)\}$ множество всевозможных непрерывных неубывающих функций $\varphi(t)$, что $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$. Найдутся $\varphi_3(t)$, $\varphi_4(t) \in M$ такие, что

$$\varphi_1[\varphi_3(t)] = \varphi_2[\varphi_4(t)].$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon_n = \dfrac{1}{2^n}$ $n = 1,2,..,$ Произведем разбиение отрезка $[0,1]$ точками

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{2^n} = 1$$

так, чтобы $(\kappa - 1)\varepsilon_n \leqslant \varphi_1(t) \leqslant \kappa\varepsilon_n$ при $t \in [t_{\kappa-1}, t_\kappa]$,

и точками $0 = t_0' < t_1' < ... < t'_{2^n} = 1$

так, чтобы $(\kappa - 1)\varepsilon_n \leqslant \varphi_2(t) \leqslant \kappa\varepsilon_n$ при $t \in [t'_{\kappa-1}, t_\kappa']$ $\kappa = 1,2...2^n$.

Положим $\varphi_3{}^n(t) = \sum\limits_{\kappa=1}^{2^n} \psi_\kappa(t)$, где

$$\psi_\kappa(t) = \begin{cases} \dfrac{t_{\kappa-1}(t'_\kappa - t) + t_\kappa(t - t'_{\kappa-1})}{t'_\kappa - t'_{\kappa-1}} \\ \end{cases}$$

при $t \in [t'_{\kappa-1}, t'_\kappa]$, при $t \in [0, 1] \setminus [t'_{\kappa-1}, t'_\kappa]$.

Нетрудно видеть, что

$$\varphi_3^n(t) \in M \quad \text{и}$$

$$|\varphi_2[\varphi_3^n(t)] - \varphi_1(t)| \leqslant \varepsilon_n,$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_2[\varphi_3^n(t)] = \varphi_1(t).$$

По теореме [2] для некоторой подпоследовательности $\{\varphi_3^m(t)\} \subset \{\varphi_3^n(t)$ можно указать равномерно сходящуюся последовательность функций $\{\varphi_m(t)\}$ такую, что последовательность функций $\varphi_3^m[\psi_m(t)]\}$ также будет сходиться на $[0,1]$ равномерно.

Обозначим:

$$\lim_{m\to\infty} \psi_m(t) = \varphi_3(t), \qquad \lim_{m\to\infty} \varphi_3{}^m[\psi_m(t)] = \varphi_4(t).$$

Нетрудно видеть, что

$$\varphi_3(t), \quad \varphi_4(t) \in M \text{ и}$$

$$\varphi_1[\varphi_3(t)] = \varphi_2[\varphi_4(t)].$$

Следствие. Пусть $f_0(t)$ непрерывное отображение отрезка $[0,1]$ в метрическое пространство R. Тогда семейство непрерывных отображений

$$\{f[\varphi(t)]\}, \tag{1}$$

где $\varphi(t) \in M$ обладает свойством эквивалентности.

Доказательство. Пусть $f_1(t)$, $f_2(t) \in (1)$.

Это значит, что $f_1(t) = f_0[\varphi_1(t)]$, $f_2(t) = f_0[\varphi_2(t)]$.

Для доказательства нашего утверждения достаточно найти такие $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$, что $\varphi_1[\psi_1(t)] = \varphi_2[\psi_2(t)]$, возможность чего следует из предыдущей теоремы.

Теорема 2. Пусть $\{f(t)\}$, $\{g(t)\}$ два семейства эквивалентности непрерывных отображений отрезка (0,1) в метрическое пространство R [1]. Пусть $f_0(t) \in \{f(t)\}$, $g_0(t) \in \{g(t)\}$. Для любых $f_1(t) \in \{f(t)\}$, $g_1(t) \in g(t)$ найдутся $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t) \in M$ такие, что если

$$y_1(t) = \rho[f_1(t),\ g_1(t)],$$

$$y_0(t) = \rho\{f_0[\varphi_1(t)], \qquad g_0[\varphi_2(t)]\},$$

то $E_{y_1} = E_{y_0}$, где E_{y_1} — множество значений функции, $y_1(t)$, E_{y_0} — множество значений функций $y_0(t)$.

Доказательство. Так как $f_1(t)$ и $f_0(t)$ принадлежат одному семейству эквивалентности, то существуют $\delta_1(t)$, $\delta(t) \in M$ такие, что $g_1[\delta_1(t)] = f_2[\delta_2(t)]$.

Точно так же для $g_1(t)$, $g_0(t)$ можно указать $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t) \in M$ такие, что

$$g_1[\gamma_1(t)] = g_2[\gamma_2(t)].$$

По теореме (1) для $\delta_1(t)$, $\gamma_1(t)$ можно указать $\alpha_1(t)$, $\beta_1(t)$ такие, что

$$\delta_1[\alpha_1(t)] = \gamma_1[\beta_1(t)].$$

Рассмотрим

$$y_2(t) = \rho\,[f_1\{\delta_1[\alpha_1(t)]\}, \quad g_1\{\gamma_1[\beta_1(t)]\}] \text{ и}$$

и

$$y_3(t) = \rho[f_0\{\delta_2[\alpha_1(t)]\}, \qquad g_0\{\gamma_2[\beta_1(t)]\}].$$

Ясно, что $E_{y_2} = E_{y_3}$, так как $f_1[\delta_1(t)] = f_0[\delta_2(t)]$, $g_1[\gamma_1(t) = g_0[\gamma_2(t)]$ и $E_{y_2} = E_{y_1}$.

Поэтому, обозначив $\varphi_1(t) = \delta_2[\alpha_1(t)]$, $\varphi_2(t) = \gamma_2[\beta_1(t)]$, будем иметь

$$E_{y_0} = E_{y_2} = E_{y_1}.$$

Теорема 3. Пусть $\{f(t)\}$ и $\{g(t)\}$ два семейства эквивалентности непрерывных отображений отрезка $[0,1]$ в метрическое пространство R. Тогда множество значений функции $F[f(t),\ g(t)] = \sup \rho[f(t), g(t)]$,

где $f(t) \in \{f(t)\}$, $g(t) \in \{g(t)\}$ замкнуто.

Доказательство. Достаточно показать, что если

$$F[f_n(t),\ g_n(t)] = \sup_{t\in[0,1]} \rho\,[t_n(t),\ g_n(t)] = a_n$$

и

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

$$f_n(t) \in \{f(t)\} \qquad g_n(t) \in \{g(t)\},$$

то существуют

$$\overline{f}(t) \in \{f(t)\} \qquad \text{и} \qquad \overline{g}(t) \in \{g(t)\}$$

такие, что $F[\overline{f}(t), \overline{g}(t)] = a$.

Пусть $f_0(t) \in \{f(t)\}$, $g_0(t) \in \{g(t)\}$, тогда по теореме [2] можем найти последовательности $\{\varphi_n(t)\}$, $\{\psi_n(t)\}$, причем $\varphi_n(t)$, $\psi_n(t)$ такие, что

$$F[f_n(t), g_n(t)] = F\{f_0[\varphi_n(t)], \ g_0[\psi_n(t)]\} = a_n.$$

Последовательности $\{\varphi_n(t)\}$, $\{\psi_n(t)\}$ можно считать, учитывая теорему [2], равномерно сходящимися.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(t) = \psi(t)$,

тогда

$$F\{f_0[\varphi(t)], \ g_0[\psi(t)]\} = a.$$

Обозначая

$$\overline{f}(t) = f_0[\varphi(t)], \qquad \overline{g}(t) = g_0[\psi(t)],$$

имеем

$$\sup \rho[\overline{f}(t), \ \overline{g}(t)] = a.$$

В частности, a может равняться

$$\inf_{\{f(t)\},\{g(t)\}} F[f(t), \ g(t)].$$

Легко показать, что с помощью функции (1) пространство можно метризовать.

Теорема 4. Для полноты пространства L_R необходимо и достаточно, чтобы было полно пространство R.

Доказательство. Необходимость. Элементы пространства R можно считать элементами пространства L_R, рассматривая непрерывные отображения $f(t)$, сопоставляющие всему [0,1] один элемент из R. Отсюда ясна необходимость полноты R для полноты L_R. Достаточность. Пусть R полно и пусть $\{L_n\}$ фундаментальная последовательность элементов из L_R, и

$$\{f_1(t)\}, \quad \{f_2(t)\}, \ldots, \{f_n(t)\} \tag{3}$$

соответствующая последовательность семейств эквивалентности. Возьмем $f_1^\circ(t) \in \{f_1(t)\} \ldots, f_n^\circ(t) \in \{f_n(t)\} \ldots$ и рассмотрим семейства отображений

$$\{f_1^\circ[\varphi(t)] \ldots, \{f_n^\circ[\varphi(t)\} \ldots \tag{4}$$

$$\rho(L_n, \ L_{n+1}) = \inf \rho[f_n(t), \ f_{n+1}(t) = (\text{по теоремам } \ 2{,}3) =$$
$$= \rho\{f_n^\circ[\varphi_n(t), \ f_{n+1}^\circ[\varphi_{n+1}(t)\}.$$

Отсюда можем записать систему равенств

$$\rho(L_1, L_2) = \rho\{f_1^\circ[f_1(t)], \ f_2^\circ[\varphi_2(t)]\},$$
$$\rho(L_2, L_3) = \rho\{f_2^\circ[\varphi'_2(t)], \ \varphi^\circ_3[\varphi_3(t)]\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{5}$$
$$\rho(L_n, \ L_{n+1}) = \rho\{f_n^\circ[\varphi'_n(t)], \ f_{n+1}(t)]\}.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

По теореме 1 для $\varphi_n[\beta_{n-2}(t)]$ и $\varphi'_n(t)$ найдутся $\alpha_{n-1}(t)$ и $\beta_{n-1}(t)$ такие, что

$$\varphi_n\{\beta_{n-2}[\alpha_{n-1}(t)]\} = \varphi'_n[\beta_{n-1}(t)].$$

Условимся обозначать $\alpha[\beta(t)] = (\alpha\beta)$.

Положим $\alpha'_n(t) = (\alpha_n\delta_n)$, $\beta'_n(t) = (\beta_n\delta_n)$, где функция $\delta_n(t) = \sum_{\kappa=1}^{2^n} \psi_\kappa(t)$ построена, как в теореме 1, чтобы

$$|(\alpha_1\delta_1\alpha_2\delta_2\ldots\alpha_{n-1}\delta_{n-1}) - (\alpha_1\delta_1\alpha_2\delta_2\ldots\alpha_n\delta_n)| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Ясно, что

$$\varphi_n\{\beta_{n-2}[\alpha'_{n-1}(t)]\} = \varphi'_n[\beta'_{n-1}(t)].$$

Подставим в (4) все $\alpha'_n(t)$ и $\beta'_n(t)\}$

$$\begin{aligned} \rho(L_1, L_2) &= \rho\{f_1^\circ[\gamma_0(t)\,f_2^\circ[\gamma_1(t)]\},\\ \rho(L_2, L_3) &= \rho\{f_2^\circ[\gamma_1(t)],\ f_3^\circ[\gamma_2(t)]\},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \rho(L_n, L_{n+1}) &= \rho\{f_n^\circ[\gamma_{n-1}(t)],\ \ f_{n+1}^\circ[\gamma_n(t)]\}, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_0(t) &= \varphi_1[\lim_{n\to 8}(\alpha_1\delta_1\alpha_2\delta_2\ldots\alpha_n\delta_n)],\\ \gamma_1(t) &= \varphi_2[\lim_{n\to\infty}(\alpha_1\delta_1\alpha_2\delta_2\ldots\alpha_n\delta_n)],\\ \gamma_2(t) &= \varphi_3\beta'_1[\lim_{n\to\infty}(\alpha_2\delta_2\ldots\alpha_n\delta_n)],\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \gamma_{n-1}(t) &= \varphi_n\beta'_{n-2}[\lim_{m\to\infty}(\alpha_{n-1}\delta_{n-1}\alpha_n\delta_n\ldots\alpha_{n+m}\delta_{n+m})].\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_1\delta_1\alpha_2\delta_2\ldots\alpha_n\delta_n) \in M$, то и $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_\kappa\delta_\kappa\ldots\alpha_n\delta_n) \in M$ при любом κ. А потому $\gamma_0(t)$, $\gamma_n(t) \in M$ $(n = 1,2,\ldots)$,но тогда фундаментальная последовательность

$$\{f_n^\circ[\gamma_{n-1}(t)]\}$$

непрерывных отображений отрезка $[0,1]$ в R сходится, в силу полноты R к $f^\circ(t)$ непрерывному отображению $[0,1]$ в R. Фундаментальность (7) следует из (6) и фундаментальности последовательности $\{L_n\}$. Семейство эквивалентности непрерывных отображений отрезка $[0,1]$ в R, в которое войдет $f_0(t)$ определит в L_R кривую L_0 такую, что для любого $\varepsilon > 0$ и (2) найдется $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n \geqslant N$ $\rho(L_0, L_n) < \varepsilon$. А это и значит, что L_R полно, так как $\{L_n\}$—любая фундаментальная последовательность из L_R.

Теорема 5. Пространство $L_{C_{(0,1)}}$ сепарабельно.

Доказательство. Будем рассматривать всевозможные отображения отрезка $[0,1]$ в пространство непрерывных функций $C_{(0,1)}$ такого вида

$$P_n(t) = \sum_{\kappa=1}^{2^n} f_\kappa(t)$$

$$f_\kappa(t) = \begin{cases} \dfrac{P_{\kappa-1}(x)\ (S_\kappa - t) + P_\kappa(x)\,(t - S_{\kappa-1})}{S_\kappa - S_{\kappa-1}} & \text{при } t\in[S_{\kappa-1},\ S_\kappa].\\ 0 & \text{при } t\in([0,1]\setminus[S_{\kappa-1},\ S_\kappa]), \end{cases} \tag{8}$$

и где $S_0 = 0$, $S_\kappa = \dfrac{\kappa}{2^n}$, $\kappa = 1, 2,\ldots,2^n$, $p_0(x)$, $p_1(x),\ldots,p_{2^n}(x)$ — полиномы с рациональными коэффициентами.

$P_n(t)$ является непрерывным отображением отрезка $[0,1]$ в $C_{(0,1)}$. Нетрудно видеть, что множество всех отображений вида (8) счетно. Нетрудно видеть, что множество отображений вида (8) плотно во множестве всех непрерывных отображений отрезка $(0,1)$ в $C_{(0,1)}$. Пусть $g(t)$ непрерывное отображение отрезка $[0,1]$ в $C_{(0,1)}$ и пусть $\varepsilon>0$ произвольно. В силу компактности $[0,1]$ и непрерывности $g(t)$ на $[0,1]$ можно указать такое n, что при $|t_1 - t_2| \leqslant \frac{1}{2^n}$ будем иметь

$$\rho\,[g\,(t_1),\ g\,(t_2)] < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

Так как множество полиномов с рациональными коэффициентами плотно в $C_{(0,1)}$, то для $g(S_\kappa = g\left(\frac{\kappa}{2^n}\right)$ найдется полином $P_\kappa(x)$ такой что

$$\rho\left[P_\kappa(x),\quad g\left(\frac{\kappa}{2^n}\right)\right] < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{10}$$

где $\kappa = 0,\ 1,\ 2,\ldots 2^n$.

Покажем, что $\rho[g\,(t), P_n(t)] < \varepsilon$, где

$$P_n(t) = \sum_{\kappa=1}^{2^n} f_\kappa\,(t) \text{ и}$$

$$f_\kappa(t) = \begin{cases} \dfrac{p_{\kappa-1}(x)\ (S_\kappa - t) + P_\kappa(x)\ (t - S_{\kappa-1})}{S_\kappa - S_{\kappa-1}} \text{при } t \in [S_{\kappa-1}, S_\kappa], \\ 0 \qquad \text{при } \overline{t \in}[S_{\kappa-1},\ S_\kappa], \end{cases}$$

а $P_\kappa(x)$ удовлетворяют неравенству (10). Пусть $t_0 \in [0,1]$, тогда $t_0 \in [S_{\kappa-2}, S_\kappa]$ и пусть $g\,(t_0) = \varphi\,(x)$.

Обозначим $\dfrac{S_\kappa - t_0}{S_\kappa - S_{\kappa-1}} = \alpha, \qquad \dfrac{t_0 - S_{\kappa-1}}{S_\kappa - S_{\kappa-1}} = \beta.$

Легко видеть, что $\alpha + \beta = 1$,

$$\rho[g\,(t_0),\ P_n\,(t_0)] = \max_{x\in[0,1]} |\varphi\,(x) - \alpha P_{\kappa-1}\,(x) + \beta P_\kappa\,(x)|, \tag{11}$$

$$|\varphi(x) - (\alpha p_{\kappa-1}(x) + \beta\, P_\kappa\,(x)| = |\alpha\varphi\,(x) - \alpha P_{\kappa-1}(x) + \beta\,(x) - \\ - \beta P_\kappa(x) \leqslant \alpha \max_{x\in[0,1]} |\varphi\,(x) - P_{\kappa-1}\,(x) + \\ + \beta \max_{x\in[0,1]} |\varphi\,(x) - P_\kappa\,(x)|. \tag{12}$$

Так как $|t_0 - S_{\kappa-1}| \leqslant \frac{1}{2^n}$ и $|t_0 - S_\kappa| \leqslant \frac{1}{2^n}$, то, учтя (9) и (10), имеем

$$\max_{x\in[0,1]} |\varphi\,(\mathrm{x}) - P_{\kappa-1}\,(x)| < \varepsilon,$$

$$\max_{x\in[0,1]} |\varphi\,(x) - P_\kappa\,(x)| < \varepsilon. \tag{13}$$

Из (11), (12), и (13) имеем

$$\rho\,[\mathrm{g}\,(t_0),\ P_n(t)] < \varepsilon.$$

так как $t_0 \in \rho[0,1]$ произвольно, то и

$$\operatorname*{Sup}_{t\in[0,1]} \rho\,[g(t),\ P^n(t)] > \varepsilon.$$

Итак, множество отображений вида (8) плотно во множестве всех непрерывных отображений отрезка $[0,1]$ в $C_{(0,1)}$.

Рассмотрим множество семейств эквивалентности непрерывных отображений отрезка $[0,1]$ в пространстве $C_{(0,1)}$

$$\{P\}. \tag{14}$$

Будем считать, что семейство эквивалентности $\{f(t)\} \in (14)$, если существует отображение вида (8), P_n такое, что

$$P_n(t) \in \{f(t)\}.$$

Так как одно отображение не может принадлежать различным классам эквивалентности, то множество (14) не более чем счетно. Занумеруем семейства (14)

$$\{f_1(t)\},\quad \{f_2(t)\},\dots,\{f_n(t)\},\dots,$$

и всем отображениям вида (8), входящим в $\{f_\kappa(t)\}$, соотнесем число κ, обозначая $P_\kappa(t)$. Множество кривых, определяемых семействами (8), обозначим $\{L_\kappa\}$. (15)
Покажем, что (15) плотно в $L_{C_{(0,1)}}$.

Пусть $L \in L_{C_{(0,1)}} \{g(t)\}$ — семейство эквивалентности, определяющее L, и пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Возьмем $g_0(t) \in \{g(t)\}$. Так как множество отображений вида (8) плотно во множестве всех непрерывных отображений отрезка (0,1) в $C_{0,1}$, то для взятых $g_0(t)$ и $\varepsilon > 0$ найдется отображение типа (8) $P_\kappa(t)$ такое что

$$\sup \rho\,[g_0(t),\ P_\kappa(t)] < \varepsilon.$$

Пусть $\{f_\kappa(t)\}$ семейство эквивалентности, содержащее $P_\kappa(t)$, тогда

$$\rho(L,\ L_\kappa) = \inf_{\{g(t)\},\ \{f_\kappa(t)\}} \{\sup \rho\,[g(t),\ f_\kappa(t)\,]\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in[0,1]} \rho[g_0(t),\ P_\kappa(t)] < \varepsilon.$$

Итак, (15) является счетным и плотным в $L_{C_{(0,1)}}$ множеством.

Следствие. Для сепарабельности L_R необходимо и достаточно, чтобы было сепарабельно R.

Доказательство. Необходимость очевидна, так как само R можно считать подмножеством L_R, рассматривая всевозможные непрерывные отображения, сопоставляющие всему отрезку (0,1) один элемент из R. Достаточность. Пусть R сепарабельно. По теореме Банаха-Мазура в $C_{(0,1)}$ существует подмножество, изометричное R, т. е. существует гомеоморфное отображение Φ пространства R в $C_{(0,1)}$ такое, что $\Phi(R) \subset C_{(0,1)}$ изометрично R. Нетрудно видеть, что $\Phi(R)$ сепарабельно, так как $L\Phi(R) \subset L_{C_{(0,1)}}$, а по предыдущей теореме $L_{C_{(0,1)}}$ сепарабельно.

Пусть $\{L_\kappa\}$ счетное плотное в $L\Phi(R)$ множество, тогда, как легко видеть,

$$\{\Phi^{-1}(L_\kappa)\}$$

счетное плотное в L_R множество.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. МГУ, § 20, 1954.

2. Л. Е. Портнов. О последовательностях монотонных функций. Известия ТПИ, т. 131, 1965.