

МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО НЕПРЕРЫВНЫХ КРИВЫХ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Л. Е. ПОРТНОВ

(Представлена проф. П. П. Куфаревым)

Под L_R будем подразумевать множество всех непрерывных кривых метрического пространства R [1].

Теорема 1. Пусть $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in M$, где $M = \{\varphi(t)\}$ множество всевозможных непрерывных неубывающих функций $\varphi(t)$, что $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$. Найдутся $\varphi_3(t), \varphi_4(t) \in M$ такие, что

$$\varphi_1[\varphi_3(t)] = \varphi_2[\varphi_4(t)].$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$ $n = 1, 2, \dots$. Произведем разбиение отрезка $[0, 1]$ точками

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{2^n} = 1$$

так, чтобы $(\kappa - 1)\varepsilon_n \leq \varphi_1(t) \leq \kappa\varepsilon_n$ при $t \in [t_{\kappa-1}, t_\kappa]$,

и точками $0 = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_{2^n} = 1$

так, чтобы $(\kappa - 1)\varepsilon_n \leq \varphi_2(t) \leq \kappa\varepsilon_n$ при $t \in [t'_{\kappa-1}, t'_\kappa]$ $\kappa = 1, 2, \dots, 2^n$.

Положим $\varphi_3^n(t) = \sum_{\kappa=1}^{2^n} \psi_\kappa(t)$, где

$$\psi_\kappa(t) = \begin{cases} \frac{t_{\kappa-1}(t'_\kappa - t) + t_\kappa(t - t'_{\kappa-1})}{t'_\kappa - t'_{\kappa-1}} \end{cases}$$

при $t \in [t'_{\kappa-1}, t'_\kappa]$, при $t \in [0, 1] \setminus [t'_{\kappa-1}, t'_\kappa]$.

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \varphi_3^n(t) &\in M \quad \text{и} \\ |\varphi_2[\varphi_3^n(t)] - \varphi_1(t)| &\leq \varepsilon_n, \end{aligned}$$

т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_2[\varphi_3^n(t)] = \varphi_1(t).$$

По теореме [2] для некоторой подпоследовательности $\{\varphi_3^m(t)\} \subset \{\varphi_3^n(t)\}$ можно указать равномерно сходящуюся последовательность функций $\{\varphi_m(t)\}$ такую, что последовательность функций $\varphi_3^m[\varphi_m(t)]$ также будет сходиться на $[0, 1]$ равномерно.

Обозначим:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \psi_m(t) = \varphi_3(t), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_3^m[\psi_m(t)] = \varphi_4(t).$$

Нетрудно видеть, что

$$\varphi_3(t), \quad \varphi_4(t) \in M \text{ и} \\ \varphi_1[\varphi_3(t)] = \varphi_2[\varphi_4(t)].$$

С л е д с т в и е. Пусть $f_0(t)$ непрерывное отображение отрезка $[0,1]$ в метрическое пространство R . Тогда семейство непрерывных отображений

$$\{f[\varphi(t)]\}, \quad (1)$$

где $\varphi(t) \in M$ обладает свойством эквивалентности.

Доказательство. Пусть $f_1(t), f_2(t) \in (1)$.

Это значит, что $f_1(t) = f_0[\varphi_1(t)], f_2(t) = f_0[\varphi_2(t)]$.

Для доказательства нашего утверждения достаточно найти такие $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$, что $\varphi_1[\psi_1(t)] = \varphi_2[\psi_2(t)]$, возможность чего следует из предыдущей теоремы.

Теорема 2. Пусть $\{f(t)\}, \{g(t)\}$ два семейства эквивалентности непрерывных отображений отрезка $(0,1)$ в метрическое пространство $R[1]$. Пусть $f_0(t) \in \{f(t)\}, g_0(t) \in \{g(t)\}$. Для любых $f_1(t) \in \{f(t)\}, g_1(t) \in \{g(t)\}$ найдутся $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in M$ такие, что если

$$y_1(t) = \rho[f_1(t), g_1(t)], \\ y_0(t) = \rho\{f_0[\varphi_1(t)], g_0[\varphi_2(t)]\},$$

то $E_{y_1} = E_{y_0}$, где E_{y_1} — множество значений функции, $y_1(t)$, E_{y_0} — множество значений функций $y_0(t)$.

Доказательство. Так как $f_1(t)$ и $f_0(t)$ принадлежат одному семейству эквивалентности, то существуют $\delta_1(t), \delta(t) \in M$ такие, что $g_1[\delta_1(t)] = f_2[\delta_2(t)]$.

Точно так же для $g_1(t), g_0(t)$ можно указать $\gamma_1(t), \gamma_2(t) \in M$ такие, что

$$g_1[\gamma_1(t)] = g_2[\gamma_2(t)].$$

По теореме (1) для $\delta_1(t), \gamma_1(t)$ можно указать $\alpha_1(t), \beta_1(t)$ такие, что

$$\delta_1[\alpha_1(t)] = \gamma_1[\beta_1(t)].$$

Рассмотрим

$$y_2(t) = \rho[f_1[\delta_1[\alpha_1(t)]], g_1[\gamma_1[\beta_1(t)]]] \text{ и}$$

и

$$y_3(t) = \rho[f_0\{\delta_2[\alpha_1(t)]\}, g_0\{\gamma_2[\beta_1(t)]\}].$$

Ясно, что $E_{y_2} = E_{y_3}$, так как $f_1[\delta_1(t)] = f_0[\delta_2(t)], g_1[\gamma_1(t)] = g_0[\gamma_2(t)]$ и $E_{y_2} = E_{y_1}$.

Поэтому, обозначив $\varphi_1(t) = \delta_2[\alpha_1(t)], \varphi_2(t) = \gamma_2[\beta_1(t)]$, будем иметь $E_{y_0} = E_{y_2} = E_{y_1}$.

Теорема 3. Пусть $\{f(t)\}$ и $\{g(t)\}$ два семейства эквивалентности непрерывных отображений отрезка $[0,1]$ в метрическое пространство R . Тогда множество значений функции $F[f(t), g(t)] = \sup \rho[f(t), g(t)]$,

где $f(t) \in \{f(t)\}, g(t) \in \{g(t)\}$ замкнуто.

Доказательство. Достаточно показать, что если

$$F[f_n(t), g_n(t)] = \sup_{t \in [0,1]} \rho[f_n(t), g_n(t)] = a_n$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

$$f_n(t) \in \{f(t)\} \quad g_n(t) \in \{g(t)\},$$

Условимся обозначать $\alpha[\beta(t)] = (\alpha\beta)$.
 Положим $\alpha'_n(t) = (\alpha_n\delta_n)$, $\beta'_n(t) = (\beta_n\delta_n)$, где функция $\delta_n(t) = \sum_{\kappa=1}^{2^n} \psi_\kappa(t)$ построена, как в теореме 1, чтобы

$$|(\alpha_1\delta_1\alpha_2\delta_2\ldots\alpha_{n-1}\delta_{n-1}) - (\alpha_1\delta_1\alpha_2\delta_2\ldots\alpha_n\delta_n)| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Ясно, что

$$\varphi_n\{\beta_{n-2}[\alpha'_{n-1}(t)]\} = \varphi'_n[\beta'_{n-1}(t)].$$

Подставим в (4) все $\alpha'_n(t)$ и $\beta'_n(t)$

$$\begin{aligned} \rho(L_1, L_2) &= \rho\{f_1^\circ[\gamma_0(t)], f_2^\circ[\gamma_1(t)]\}, \\ \rho(L_2, L_3) &= \rho\{f_2^\circ[\gamma_1(t)], f_3^\circ[\gamma_2(t)]\}, \\ &\dots\dots\dots \\ \rho(L_n, L_{n+1}) &= \rho\{f_n^\circ[\gamma_{n-1}(t)], f_{n+1}^\circ[\gamma_n(t)]\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_0(t) &= \varphi_1[\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_1\delta_1\alpha_2\delta_2\ldots\alpha_n\delta_n)], \\ \gamma_1(t) &= \varphi_2[\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_1\delta_1\alpha_2\delta_2\ldots\alpha_n\delta_n)], \\ \gamma_2(t) &= \varphi_3\beta'_1[\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_2\delta_2\ldots\alpha_n\delta_n)], \\ &\dots\dots\dots \\ \gamma_{n-1}(t) &= \varphi_n\beta'_{n-2}[\lim_{m \rightarrow \infty} (\alpha_{n-1}\delta_{n-1}\alpha_n\delta_n\ldots\alpha_{n+m}\delta_{n+m})]. \end{aligned}$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_1\delta_1\alpha_2\delta_2\ldots\alpha_n\delta_n) \in M$, то и $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_\kappa\delta_\kappa\ldots\alpha_n\delta_n) \in M$ при любом κ . А потому $\gamma_0(t), \gamma_n(t) \in M$ ($n = 1, 2, \dots$), но тогда фундаментальная последовательность

$$\{f_n^\circ[\gamma_{n-1}(t)]\}$$

непрерывных отображений отрезка $[0, 1]$ в R сходится, в силу полноты R к $f^\circ(t)$ непрерывному отображению $[0, 1]$ в R . Фундаментальность (7) следует из (6) и фундаментальности последовательности $\{L_n\}$. Семейство эквивалентности непрерывных отображений отрезка $[0, 1]$ в R , в которое войдет $f_0(t)$ определит в L_R кривую L_0 такую, что для любого $\varepsilon > 0$ и (2) найдется $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n \geq N$ $\rho(L_0, L_n) < \varepsilon$. А это и значит, что L_R полно, так как $\{L_n\}$ — любая фундаментальная последовательность из L_R .

Теорема 5. Пространство $L_{C(0,1)}$ сепарабельно.

Доказательство. Будем рассматривать всевозможные отображения отрезка $[0, 1]$ в пространство непрерывных функций $C_{(0,1)}$ такого вида

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \sum_{\kappa=1}^{2^n} f_\kappa(t) \\ f_\kappa(t) &= \begin{cases} \frac{P_{\kappa-1}(x)(S_\kappa - t) + P_\kappa(x)(t - S_{\kappa-1})}{S_\kappa - S_{\kappa-1}} & \text{при } t \in [S_{\kappa-1}, S_\kappa], \\ 0 & \text{при } t \in ([0, 1] \setminus [S_{\kappa-1}, S_\kappa]), \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

и где $S_0 = 0$, $S_\kappa = \frac{\kappa}{2^n}$, $\kappa = 1, 2, \dots, 2^n$, $p_0(x), p_1(x), \dots, p_{2^n}(x)$ — полино-

мы с рациональными коэффициентами.

$P_n(t)$ является непрерывным отображением отрезка $[0,1]$ в $C_{(0,1)}$. Нетрудно видеть, что множество всех отображений вида (8) счетно. Нетрудно видеть, что множество отображений вида (8) плотно во множестве всех непрерывных отображений отрезка $(0,1)$ в $C_{(0,1)}$. Пусть $g(t)$ непрерывное отображение отрезка $[0,1]$ в $C_{(0,1)}$ и пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. В силу компактности $[0,1]$ и непрерывности $g(t)$ на $[0,1]$

можно указать такое n , что при $|t_1 - t_2| \leq \frac{1}{2^n}$ будем иметь

$$\rho[g(t_1), g(t_2)] < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (9)$$

Так как множество полиномов с рациональными коэффициентами плотно в $C_{(0,1)}$, то для $g(S_\kappa) = g\left(\frac{\kappa}{2^n}\right)$ найдется полином $P_\kappa(x)$ такой что

$$\rho\left[P_\kappa(x), g\left(\frac{\kappa}{2^n}\right)\right] < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (10)$$

где $\kappa = 0, 1, 2, \dots, 2^n$.

Покажем, что $\rho[g(t), P_n(t)] < \varepsilon$, где

$$P_n(t) = \sum_{\kappa=1}^{2^n} f_\kappa(t) \text{ и}$$

$$f_\kappa(t) = \begin{cases} \frac{p_{\kappa-1}(x)(S_\kappa - t) + P_\kappa(x)(t - S_{\kappa-1})}{S_\kappa - S_{\kappa-1}} & \text{при } t \in [S_{\kappa-1}, S_\kappa], \\ 0 & \text{при } t \notin [S_{\kappa-1}, S_\kappa], \end{cases}$$

а $P_\kappa(x)$ удовлетворяют неравенству (10). Пусть $t_0 \in [0,1]$, тогда $t_0 \in [S_{\kappa-2}, S_\kappa]$ и пусть $g(t_0) = \varphi(x)$.

Обозначим $\frac{S_\kappa - t_0}{S_\kappa - S_{\kappa-1}} = \alpha$, $\frac{t_0 - S_{\kappa-1}}{S_\kappa - S_{\kappa-1}} = \beta$.

Легко видеть, что $\alpha + \beta = 1$,

$$\rho[g(t_0), P_n(t_0)] = \max_{x \in [0,1]} |\varphi(x) - \alpha P_{\kappa-1}(x) + \beta P_\kappa(x)|, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - (\alpha P_{\kappa-1}(x) + \beta P_\kappa(x))| &= |\alpha \varphi(x) - \alpha P_{\kappa-1}(x) + \beta \varphi(x) - \\ &\quad - \beta P_\kappa(x)| \leq \alpha \max_{x \in [0,1]} |\varphi(x) - P_{\kappa-1}(x)| + \\ &\quad + \beta \max_{x \in [0,1]} |\varphi(x) - P_\kappa(x)|. \end{aligned} \quad (12)$$

Так как $|t_0 - S_{\kappa-1}| \leq \frac{1}{2^n}$ и $|t_0 - S_\kappa| \leq \frac{1}{2^n}$, то, учтя (9) и (10), имеем

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0,1]} |\varphi(x) - P_{\kappa-1}(x)| &< \varepsilon, \\ \max_{x \in [0,1]} |\varphi(x) - P_\kappa(x)| &< \varepsilon. \end{aligned} \quad (13)$$

Из (11), (12), и (13) имеем

$$\rho[g(t_0), P_n(t)] < \varepsilon.$$

так как $t_0 \in [0,1]$ произвольно, то и

$$\sup_{t \in [0,1]} \rho[g(t), P^n(t)] > \varepsilon.$$

Итак, множество отображений вида (8) плотно во множестве всех непрерывных отображений отрезка $[0,1]$ в $C_{(0,1)}$.

Рассмотрим множество семейств эквивалентности непрерывных отображений отрезка $[0,1]$ в пространстве $C_{(0,1)}$

$$\{P\}. \quad (14)$$

Будем считать, что семейство эквивалентности $\{f(t)\} \in (14)$, если существует отображение вида (8), P_n такое, что

$$P_n(t) \in \{f(t)\},$$

Так как одно отображение не может принадлежать различным классам эквивалентности, то множество (14) не более чем счетно. Занулируем семейства (14)

$$\{f_1(t)\}, \{f_2(t)\}, \dots, \{f_n(t)\}, \dots,$$

и всем отображениям вида (8), входящим в $\{f_\kappa(t)\}$, соотнесем число κ , обозначая $P_\kappa(t)$. Множество кривых, определяемых семействами (8), обозначим $\{L_\kappa\}$. (15)

Покажем, что (15) плотно в $L_{C_{(0,1)}}$.

Пусть $L \in L_{C_{(0,1)}}$ $\{g(t)\}$ — семейство эквивалентности, определяющее L , и пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Возьмем $g_0(t) \in \{g(t)\}$. Так как множество отображений вида (8) плотно во множестве всех непрерывных отображений отрезка $(0,1)$ в $C_{0,1}$, то для взятых $g_0(t)$ и $\varepsilon > 0$ найдется отображение типа (8) $P_\kappa(t)$ такое что

$$\sup \rho[g_0(t), P_\kappa(t)] < \varepsilon.$$

Пусть $\{f_\kappa(t)\}$ семейство эквивалентности, содержащее $P_\kappa(t)$, тогда

$$\begin{aligned} \rho(L, L_\kappa) &= \inf_{\{g(t)\}, \{f_\kappa(t)\}} \{\sup \rho[g(t), f_\kappa(t)]\} \leq \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} \rho[g_0(t), P_\kappa(t)] < \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, (15) является счетным и плотным в $L_{C_{(0,1)}}$ множеством.

Следствие. Для сепарабельности L_R необходимо и достаточно, чтобы было сепарабельно R .

Доказательство. Необходимость очевидна, так как само R можно считать подмножеством L_R , рассматривая всевозможные непрерывные отображения, сопоставляющие всему отрезку $(0,1)$ один элемент из R . Достаточность. Пусть R сепарабельно. По теореме Банаха-Мазура в $C_{(0,1)}$ существует подмножество, изометричное R , т. е. существует гомеоморфное отображение Φ пространства R в $C_{(0,1)}$ такое, что $\Phi(R) \subset C_{(0,1)}$ изометрично R . Нетрудно видеть, что $\Phi(R)$ сепарабельно, так как $L\Phi(R) \subset L_{C_{(0,1)}}$, а по предыдущей теореме $L_{C_{(0,1)}}$ сепарабельно.

Пусть $\{L_\kappa\}$ счетное плотное в $L\Phi(R)$ множество, тогда, как легко видеть,

$$\{\Phi^{-1}(L_\kappa)\}$$

счетное плотное в L_R множество.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. МГУ, § 20, 1954.
2. Л. Е. Портнов. О последовательностях монотонных функций. Известия ТПИ, т. 131, 1965.