

ДИНАМИКА ЕДИНИЧНОГО ШАГА ШАГОВОГО ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ

В. В. ЖУЛОВЯН

(Представлена научным семинаром кафедр электрических машин и общей электротехники)

Динамика единичного шага m -фазного шагового реактивного электродвигателя (э. ш. д.) в общем случае описывается системой из $m + 1$ уравнений

$$U_1 = i_1 R_1 + \frac{d\psi_1}{dt_1}, \quad (1)$$

$$U_m = i_m R_m + \frac{d\psi_m}{dt},$$

$$I^2 \frac{d^2(\Theta)}{dt^2} + \lambda \frac{d\Theta}{dt} + M_\partial(i_1, i_2, \dots, i_m \Theta) - M_n = 0.$$

Так как каждое из уравнений, входящих в (1), является нелинейным, то получить решение в общем виде не предоставляется возможным.

Сделаем ряд допущений:

1. Ток в обмотках управления нарастает мгновенно.
2. Индуктивность обмоток управления не зависит от углового положения ротора.

Данные допущения вполне справедливы при значительных балластных сопротивлениях в цепях обмоток управления.

3. Момент двигателя аппроксимируем кубичной параболой [1]

$$M_\partial = M_m [\alpha (2p \Theta) - b (2p \Theta)^3], \quad (2)$$

где M_m — максимальное значение момента, развиваемое двигателем;

α и b — коэффициенты параболы, определяемые из расчетной или экспериментально снятой кривой момента;

Θ — геометрический угол рассогласования между магнитными осями ротора и статора;

p — число пар зубцов ротора.

При сделанных допущениях динамика единичного шага э.ш.д. будет определяться только уравнением движения ротора

$$I \frac{d^2 \Theta}{dt^2} + \lambda \frac{d\Theta}{dt} + M_m [\alpha (2p \Theta) - b (2p \Theta)^3] - M_n = 0, \quad (3)$$

где I — приведенный момент инерции;
 λ — коэффициент вязкого трения нагрузки;
 $M_n = M_r + R \operatorname{sign} \left| \frac{d\Theta}{dt} \right|$ — момент нагрузки, состоящий из постоянно-

го момента сопротивления и сухого трения.

Вводя новую переменную $x = 2p\Theta$ и относительное время $\tau = \sqrt{\frac{2pM_m}{I}} \cdot t$, получим

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + 2\delta \frac{dx}{d\tau} + \alpha x - bx^3 - p_n = 0, \quad (4)$$

где

$$\delta = \frac{\lambda}{2\sqrt{2pIM_m}}; \quad p_n = \beta + \kappa \operatorname{sign} \left| \frac{dx}{d\tau} \right|;$$

$$\beta = \frac{M_r}{M_m}; \quad \kappa = \frac{R}{M_m}.$$

1. Рассмотрим решение уравнения (4) для случая, когда и нагрузка определяется лишь постоянным моментом сопротивления $p_n = \beta$. При $\beta = 0$ (идеальный холостой ход) после ряда преобразований получим

$$\tau_x = F(\Theta, \varphi) \cdot \frac{\Theta_{ш}}{v_0}, \quad (5)$$

где $F(\Theta, \varphi)$ — нормальный эллиптический интеграл первого рода, величина которого определяется в зависимости от значений Θ, φ из соответствующих таблиц:

$$\sin \varphi = \frac{x}{\Theta_{ш}}; \quad \sin \Theta = \Theta_{ш} \sqrt{\frac{b/\alpha}{2 - \Theta_{ш}^2 b/\alpha}};$$

$$v_0 = \Theta_{ш} \sqrt{\alpha \left(1 - \frac{b}{2\alpha} \Theta_{ш}^2 \right)}; \quad \Theta_{ш} = \frac{2\pi}{m}.$$

Время отработки шага выразится через полный эллиптический интеграл первого рода, так как при $x = 0$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\tau_{ш} = \frac{\Theta_{ш}}{v_0} \kappa \Theta. \quad (6)$$

При $\beta \neq 0$ после ряда преобразований получим

$$\tau_{ш} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{\alpha}{2} (\Theta_{ш}^2 - x^2) - \frac{b}{4} (\Theta_{ш}^4 - x^4) - \beta (\Theta_{ш} - x)}}. \quad (7)$$

Определение эллиптического интеграла (6) — задача довольно громоздкая, так как связана с вычислениями корней подинтегрального полинома четвертой степени.

Для упрощения решения заменим результирующую кривую момента $M_p = \alpha x - bx^3 - \beta$ двумя кривыми (рис. 1):

$$\alpha_1 x_1 - b_1 x_1^3 = \alpha x - bx^3 - \beta \quad \text{для } x_1 \geq 0;$$

$$\alpha_2 x_1 - b_2 x_1^3 = \alpha x - bx^3 + \beta \quad \text{для } x_1 \leq 0, \quad (8)$$

где

$$x_1 = x - x_0.$$

Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, b_1, b_2$, определяются из следующих выражений:

$$\alpha_1 = \frac{x_{1n}^2 (1 - \beta)}{x_{1n} (x_{1n}^2 - x_{1m}^2)}; \quad b_1 = \frac{1 - \beta}{x_{1m} (x_{1n}^2 - x_{1m}^2)}; \quad (9)$$

$$\alpha_2 = \frac{x_{1n}^2 (1 + \beta)}{x_{1m}' (x_{1n}^{12} - x_{1m}^{12})}; \quad b_2 = \frac{1 + \beta}{x_{1m}' (x_{1n}^{12} - x_{1m}^{12})},$$

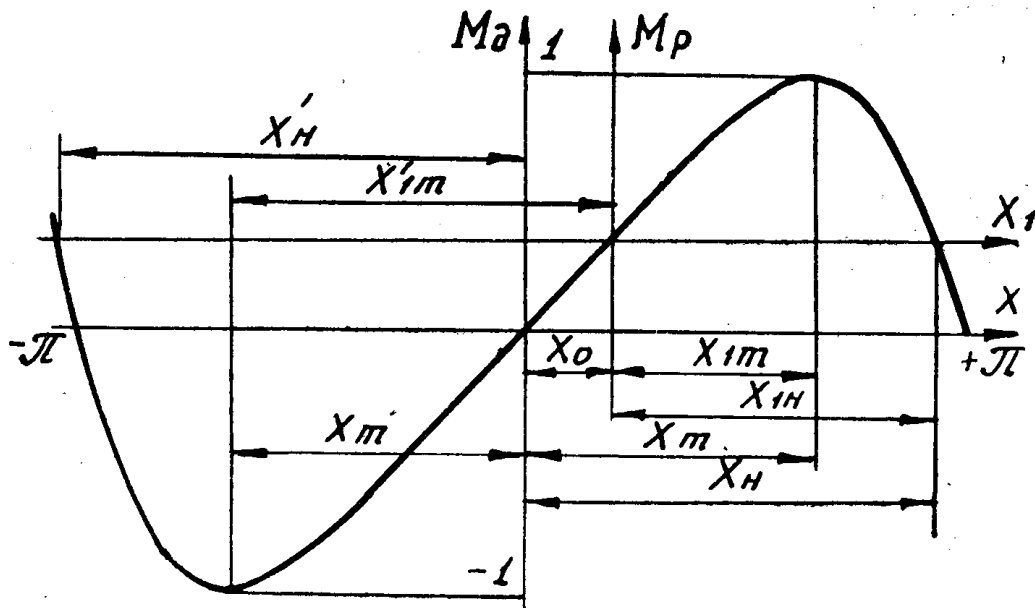


Рис. 1.

где

$$x_{1m} = x_m - x_0; \quad x_{1m}' = x_m + x_0; \quad x_{1n} = x_n - x_0; \quad x_{1n}' = x_n + x_0;$$

$$x_m = \sqrt{\frac{a}{3b}}.$$

Значения x_0, x_n, x_n' определяются из решения уравнения

$$ax - bx^3 - \beta = 0.$$

С учетом (7) уравнением движения будет

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \alpha_1 x_1 - b_1 x_1^3 = 0 \quad \text{для } x_1 \geq 0, \quad (10)$$

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \alpha_2 x_1 - b_1 x_1^3 = 0 \quad \text{для } x_1 \leq 0.$$

Откуда после ряда преобразований получим

$$\tau_x = \frac{\Theta_{\text{ш}}}{v_0} F(\Theta_1, \varphi_1) \quad \text{для } x_1 \geq 0;$$

$$\tau_x = \frac{x_n}{v_0} F(\Theta_2, \varphi_2) \quad \text{для } x_1 \leq 0, \quad (11)$$

причем

$$\sin \varphi_1 = \frac{x_1}{\Theta_{ш}}; \quad \sin \Theta_{ш} = \sqrt{\frac{b_1/\alpha_1}{2 - \Theta_{ш}^2 b_1/\alpha_1}};$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{x_1}{x_{п}}; \quad \sin \Theta_2 = x_{п} \sqrt{\frac{b_2/\alpha_2}{2 - x_{п}^2 b_2/\alpha_2}},$$

$x_{п}$ — значение первого полуколебания, которое может быть определено либо графическим путем (рис. 3), либо из решения уравнения

$$\frac{v_0^2}{2} = \frac{\alpha_2 \cdot x_1^2}{2} \left(1 - \frac{b_2 \cdot x_1^2}{2} \right).$$

Разница между точным решением (7) и приближенным значением (11) не превышает 5% во всем диапазоне возможных значений β как для трехфазных, так и для четырехфазных э.ш.д.

Время отработки шага

$$\tau_{ш} = \frac{\Theta_{ш}}{v_0} \kappa \cdot (\Theta_1). \quad (12)$$

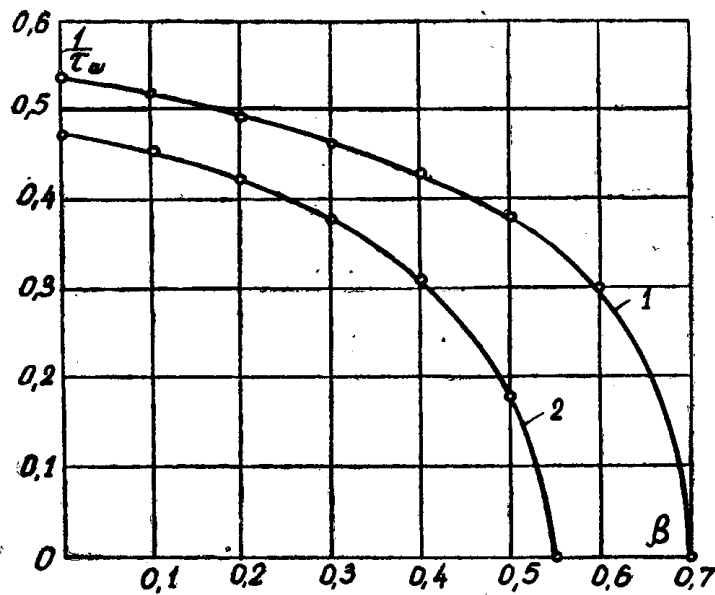


Рис. 2. Зависимость времени отработки шага от величины β .

На рис. 2 приведены зависимости времени отработки шага от величины нагрузки.

2. При работе двигателя на нагрузку типа сухого трения уравнение удобнее записать как

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \alpha x - bx^3 - \kappa = 0 \quad \text{для } \frac{dx}{d\tau} < 0,$$

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \alpha x - bx^3 + \kappa = 0 \quad \text{для } \frac{dx}{d\tau} > 0. \quad (13)$$

$$W = \frac{ax^2}{2} \left(1 - \frac{bx^2}{2} \right)$$

Так как скорость меняет знак в конце каждого полуколебания то решение уравнения (13) можно провести аналогично случаю $\beta \neq 0$. Тогда для первого полуколебания можно записать

Для второго полуколебания

$$\tau_x = \frac{x_{2n}''}{v_{02}} F(\Theta_4, \varphi_4) \text{ для } x_1'' \geq 0$$

117

Зависимость времени отработки шага от величины сухого трения будет иметь такой же вид, как и от величины β .

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \alpha x - bx^3 - \beta - \kappa &= 0 & \text{для } \frac{dx}{d\tau} < 0, \\ \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \alpha x - bx^3 - \beta + \kappa &= 0 & \text{для } \frac{dx}{d\tau} > 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Целесообразно заметить, что с помощью приведенного графического метода определения амплитуд можно решить обратную задачу, а именно: определить требуемое значение сухого трения для получения желаемой скорости затухания колебаний ротора. Такая задача возникает в тех случаях, когда требуется определить минимальное значение сухого трения, чтобы предотвратить «сбой» шага при частоте управления, близкой к частоте собственных колебаний ротора.

4. При работе двигателя на нагрузку типа вязкого трения уравнением движения будет

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + 2\delta \frac{dx}{d\tau} + \alpha x - bx^3 = 0. \quad (16)$$

В первом приближении решение будем искать в виде [3]

$$x = a \cdot \sin \psi. \quad (17)$$

Значения a и ψ определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= -\delta a - \frac{3}{4} \cdot \frac{\delta \cdot b \cdot a^3}{2\omega_0^2 + \delta^2}; \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= \omega_0 - \frac{3ba^2}{8\omega_0} + \frac{3\delta^2 ba^2}{4\omega_0(2\omega_0^2 + \delta^2)}, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\alpha - \delta^2}.$$

Интегрируя и подставляя в (17), получим

$$x = \frac{A e^{-\delta\tau}}{\sqrt{1 - A^2 B^2 e^{-2\delta\tau}}} \cdot \sin \left(\omega_0 \cdot \tau - \gamma \ln \frac{1 - A^2 B^2 e^{-2\delta\tau}}{1 - A^2 B^2} + \varphi_0 \right), \quad (19)$$

где

$$A^2 = \frac{a_0^2}{1 + B^2 a_0^2}; \quad B^2 = \frac{3b}{4(2\omega_0^2 + \delta^2)}; \quad \gamma = \frac{1}{2\delta B^2} \left(\frac{3b}{8\omega_0} + \frac{B^2 \delta^2}{\omega_0^2} \right).$$

Значения a_0 и φ_0 определяются из начальных условий единичного шага при

$$\tau = 0; \quad x = \Theta_{ш}; \quad \frac{dx}{d\tau} = 0;$$

$$x = \Theta_{ш} = a_0 \cdot \sin \varphi_0.$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} = 0 &= a_0 \left[B^2 \delta \sin \varphi_0 + \left(\frac{3b}{8\omega_0} + \frac{B^2 \delta^2}{\omega_0^2} \right) \cdot \cos \varphi_0 \right] + \\ &+ (\delta \sin \varphi_0 - \omega_0 \cdot \cos \varphi_0). \end{aligned} \quad (20)$$

Решение данной системы уравнений проще всего произвести графическим путем.

Полученное решение является более общим по сравнению с приведенным в [4], так как пригодно для конечных значений вязкого трения.

При $\delta = 0$ получим

$$x = \Theta_{ш} \cos \left[\omega_0 \tau \left(1 - \frac{3b \Theta_{ш}^2}{8\omega_0^2} \right) \right]. \quad (21)$$

Время отработки шага

$$\tau_{ш} = \frac{\pi}{2\omega_0 \left(1 - \frac{3b \Theta_{ш}^2}{8\omega_0^2} \right)}. \quad (22)$$

Зависимость времени отработки шага от величины вязкого трения для трехфазного э.ш.д. приведена на рис. 5.

Характер движения ротора при различных значениях вязкого трения для трехфазного э.ш.д. приведена на рис. 6. Для сравнения приведена зависимость $x(\tau)$ (пунктирная кривая) для $2\delta = 0,6$, полученная

путем решения уравнения (16) дельта — методом [5], который обладает большей точностью по сравнению с методом Шефера или методом Быховского М. Л., так как требует меньшее число вспомогательных построений для получения решения.

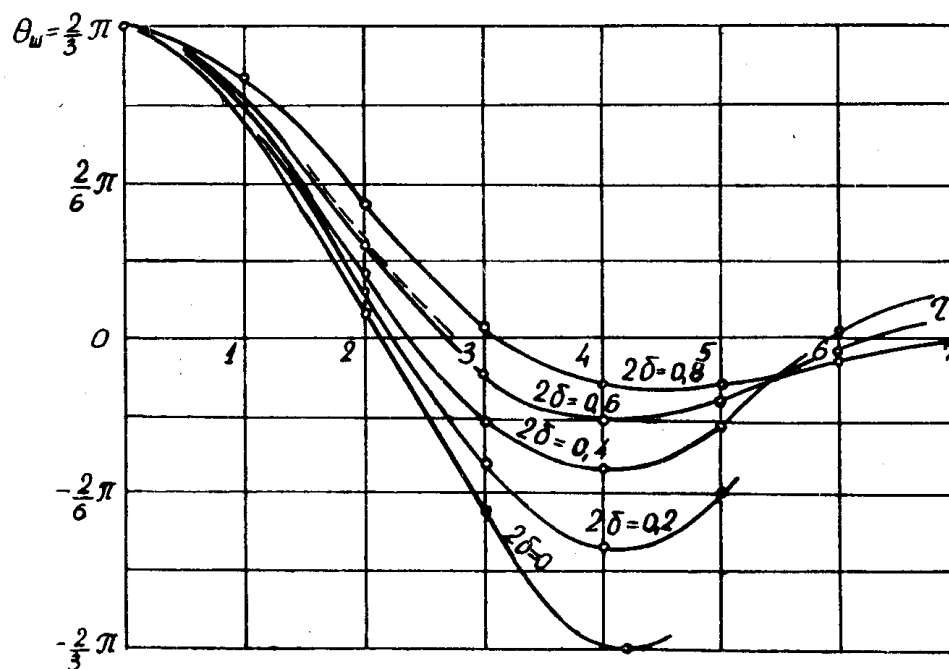


Рис. 5. Зависимость $x(\tau)$ от величины вязкого трения.

Последовательность амплитуд в зависимости от величины вязкого трения можно определить графическим путем [2], построив приближенное значение функции

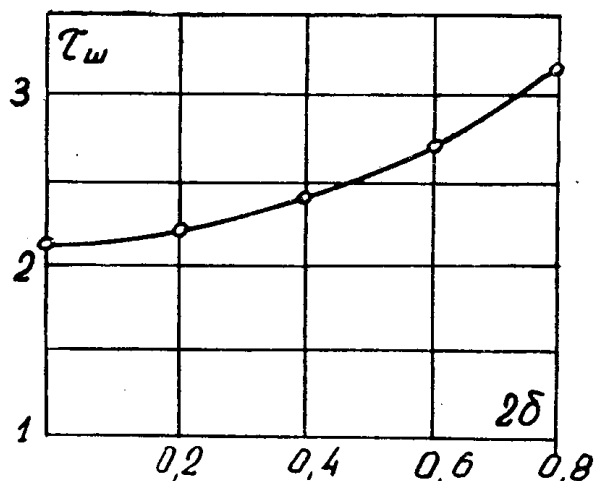


Рис. 6. Зависимость времени отработки шага от величины вязкого трения.

$$P(x) = \frac{\pi x \delta}{\omega_0} \cdot \frac{1 - \frac{3bx^2}{16(2\alpha - \delta^2)}}{2 - \frac{3bx^2(2\alpha - 3\delta^2)}{32\omega_0^2(2\alpha - \delta^2)}}. \quad (23)$$

С помощью (23) достаточно точно можно определить последовательность амплитуд для конечных значений вязкого трения, так как для ее вывода использовались выражения (18).

На рис. 7 построена функция $P(x)$ для значения $2\delta = 0,6$ и показан порядок определения последовательности амплитуд.

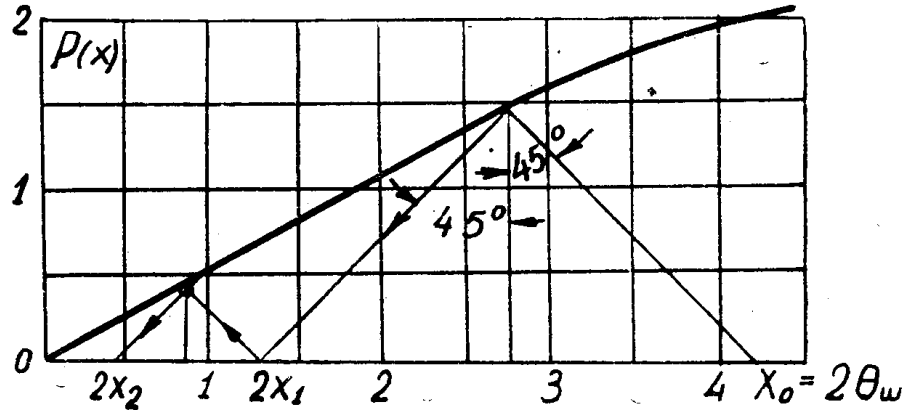


Рис. 7. Определение последовательности амплитуд.

5. При работе двигателя на нагрузку, состоящей из вязкого трения и постоянного момента сопротивления, уравнением движения будет

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + 2\delta \frac{dx}{d\tau} + \alpha \cdot x - bx^3 - \beta = 0. \quad (24)$$

В данном случае решение в первом приближении оказывается недостаточным, получение же решения во втором и третьем приближении связано со значительными трудностями и, самое главное, не обеспечивает удовлетворительной точности.

Заменим уравнение (23) двумя

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + 2\delta \frac{dx_1}{d\tau} + \alpha_1 \cdot x_1 - b_1 \cdot x_1^3 &= 0 \quad \text{для } x_1 \geq 0; \\ \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + 2\delta \frac{dx_1}{d\tau} + \alpha_2 \cdot x_1 - b_2 \cdot x_1^3 &= 0 \quad \text{для } x_1 \leq 0, \end{aligned} \quad (25)$$

где значения α_1 , α_2 , b_1 , b_2 определяются из (9).

Решение каждого уравнения в первом приближении запишется как

$$x_1 = \frac{A_1 \cdot e^{-\delta\tau}}{\sqrt{1 - A_1^2 B_1^2 e^{-2\delta\tau}}} \sin \left(\omega_1 \cdot \tau - \gamma_1 \ln \frac{1 - A_1^2 B_1^2 e^{-2\delta\tau}}{1 - A_1^2 B_1^2} + \varphi_{01} \right) \quad (26)$$

для $x_1 > 0$.

Полученные решения должны быть припасованы друг к другу.

На рис. 8 приведены расчетные и графически определенные зависимости $x_1(\tau)$ для значений $\beta = 0,4$ и $2\delta = 0,4$. Из рисунка видно хорошее совпадение расчетной и графически определенной зависимости $x(\tau)$ для четырехфазного э.ш.д. Для повышения точности решения для случая трехфазного э.ш.д. был найден поправочный коэффициент, равный $(1+\beta)$. С учетом поправочного коэффициента решение (26) запишется

$$x_1 = \frac{A_1 \cdot e^{-\delta\tau}}{\sqrt{1 - A_1^2 B_1^2 e^{-2\delta\tau}}} \cdot \sin \left[\omega_1 \cdot \tau - (1 + \beta) \gamma_1 \ln \frac{1 - A_1^2 B_1^2 e^{-2\delta\tau}}{1 - A_1^2 B_1^2} + \varphi_{01} \right] \quad (27)$$

для $x_1 \geq 0$;

$$x_1 = \frac{A_2 \cdot e^{-\delta \tau}}{\sqrt{1 - A_2^2 \cdot B_2^2 e^{-2\delta \tau}}} \cdot \sin \left[\omega_2 \tau - (1 + \beta) \gamma_2 \ln \frac{1 - A_2^2 B_2^2 e^{-2\delta \tau}}{1 - A_2^2 B_2^2} + \varphi_{02} \right]$$

для $x_1 \leq 0$,

причем значения A_1 и φ_{01} определяются из начальных условий без учета поправочного коэффициента.

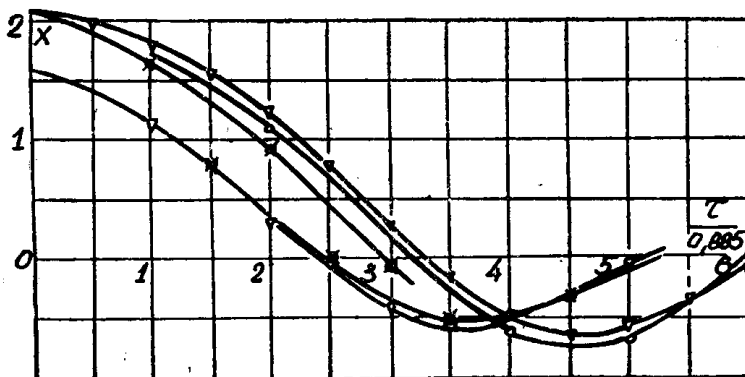


Рис. 8. Зависимость $x(\tau)$ для случая $\beta = 0,4$ и $2\delta = 0,4$.

При $\delta = 0$ время отработки шага для четырехфазного э.ш.д.

$$\tau_{ш} = \frac{\pi}{2\omega_1 \left(1 - \frac{3b}{8\omega^2} \cdot \Theta_{ш}^2 \right)}, \quad (28)$$

для трехфазного э.ш.д.

$$\tau_{ш} = \frac{\pi}{2\omega_1 \left[1 - \frac{(1+\beta)3b}{8\omega^2} \cdot \Theta_{ш}^2 \right]}. \quad (29)$$

Если считать результаты, получаемые по (11) точными, то можно показать, что с помощью (28) и (29) можно определять время отработки шага для значений $\beta = 0,6$ и $\beta = 0,4$ соответственно.

Заключение

Полученные аналитические соотношения позволяют достаточно просто определить влияние различных видов нагрузки на характер движения ротора с точностью, мало уступающей графическим методам расчета, время отработки шага или какой-то части шага, с помощью дополнительных графических построений определить скорость затухания колебаний при работе двигателя на нагрузку типа вязкого трения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. С. Борисов, А. Е. Кобринский. К динамике шагового электродвигателя. Известия академии наук, Энергетика и автоматика, № 6, 1960.
2. Г. Каудерер. Нелинейная механика. Изд-во иностранной литературы, Москва, 1961.
3. Е. П. Попов, И. П. Пальтов. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. Физматгиз, 1960.
4. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, 1958.
5. В. Канингхэм. Введение в теорию нелинейных систем. Госэнергоиздат, 1962.