

**О ПОВЕДЕНИИ ТЕЛА (КОНСТРУКЦИИ) В УСЛОВИЯХ
«ИДЕАЛЬНОЙ ТЕКУЧЕСТИ»**

Г. А. ДОЩИНСКИЙ

(Представлена научным семинаром кафедры сопротивления материалов)

Поведение тела под действием нагрузок предопределяется на основе уравнений теории упругости и пластичности, позволяющих расчетом предсказать характер и величину обратимых и необратимых деформаций в каждый момент процесса нагружения. Механические свойства используемых материалов вводятся в расчет на основе предварительного испытания образцов материала в лабораторных условиях. В этих испытаниях чаще всего снимается диаграмма растяжения, выражающая связь между напряжением и удлинением образца по мере развития упругой и пластической деформации.

К числу важнейших и широко используемых конструкционных материалов относятся малоуглеродистые стали. Исходные испытания на растяжение зачастую обнаруживают для этих сталей (в особенности в отожженном состоянии) характерное свойство—интенсивное нарастание необратимых деформаций при некотором неизменном значении растягивающего напряжения, называемого пределом текучести— σ_T .

На диаграмме растяжения эта особенность выражается горизонтальным участком (площадкой текучести) на кривой растяжения. В соответствии с этим в основу расчетов конструкций из малоуглеродистых сталей нередко полагается так называемая диаграмма Прандтля, показанная на рис. 1, а.

Для тела, находящегося в сложно-напряженном состоянии, предполагается, что текучесть имеет место при достижении некоторой совокупности всех напряжений (некоторой функции трех главных напряжений), устанавливаемой условием пластичности, определенной величины:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < 0 \text{ в пределах упругости,}$$

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \text{ при пластической деформации.}$$

Поведение тела (конструкции) в пределах упругости (до предела текучести при диаграмме Прандтля) достаточно надежно определяется зависимостями теории упругости.

При достижении состояния, соответствующего пределу текучести, начинается развитие необратимых пластических деформаций, и поведение тела должно определяться зависимостями теории пластичности. Однако описание поведения тела (или конструкции) при так называемой „идеальной пластичности“, соответствующей горизонтальному участку диаграммы Прандтля, связано с некоторыми математическими несоответствиями. Отметим главные такие затруднения при расчете на

основе деформационной теории пластичности (т. е. теории, рассматривающей конечные, а не дифференциальные соотношения между напряжениями и деформациями).

В качестве основного условия, устанавливающего связь напряжений при пластической деформации, здесь наиболее надежным считается условие пластичности Мизеса—Генки

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \sigma_3 \cdot \sigma_1} = \sigma_T. \quad (1)$$

Деформационная теория также предполагает, что для каждого материала существует определенная зависимость между обобщенным напряжением (интенсивностью напряжений — σ_i) и обобщенной де-

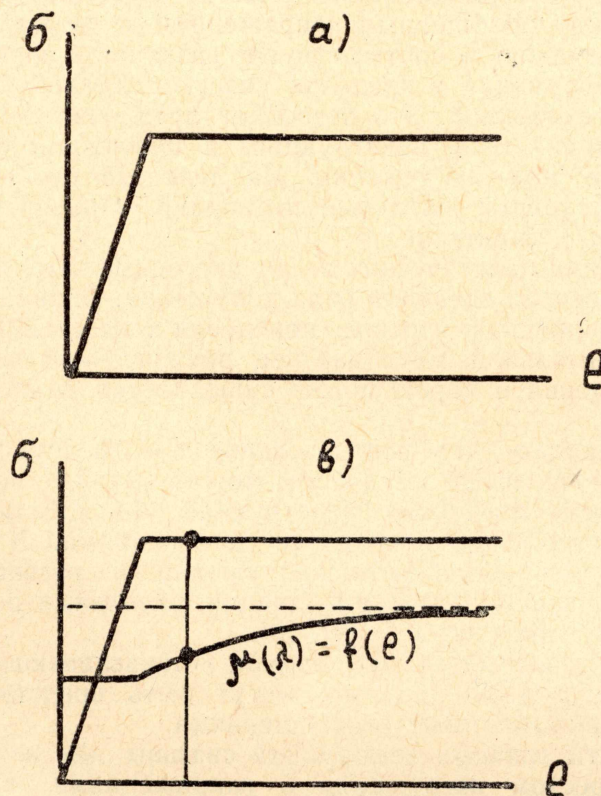


Рис. 1.

формацией (интенсивностью деформаций — e_i), вид которой и устанавливается исходным испытанием на растяжение. Однако фактически зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций

$\sigma_i = f\left(\frac{3}{2(1+\nu)} e_i\right)$ приводится к форме $\sigma_i = f(e_i)$, совпадающей с диаграммой растяжения лишь при принятии допущения о равенстве

коэффициента поперечной деформации 0,5 [1], [2]. Это значение заведомо не соответствует упругой деформируемости сталей, для которых коэффициент Пуассона $\nu \approx 0,3$.

Подобный разрыв при переходе от упругой стадии к пластической вносит некоторое нарушение монотонности функций, определяющих значения компонентов деформаций, и не соответствует действительному изменению коэффициента поперечной деформации, монотонно возрастающему за пределом упругости от 0,3 и асимптотически приближающемуся к значению 0,5.

Основные зависимости деформационной теории получили теоретическое и экспериментальное обоснование лишь для условий простого нагружения, т. е. при возрастании всех компонентов напряжений в процессе нагружения пропорционально одному параметру— λ . Однако само простое нагружение становится несовместным с условием пластичности на горизонтальном участке диаграммы. Здесь придется предполагать либо разрыв (остановку) в монотонности процесса нагружения, либо считать, что условие пластичности удовлетворяется за счет изменения соотношения между напряжениями, но это будет противоречием пропорциональному нагружению.

Наибольшее затруднение, пожалуй, будет связано с тем обстоятельством, что на горизонтальном участке зависимости нет однозначной связи между обобщенным напряжением и деформацией. Одному и тому же значению σ_i соответствуют различные значения e_i , вследствие чего деформация в пределах участка идеальной текучести становится неопределенной. Это позволяет предполагать некоторый произвол в поведении тела (конструкции) и невозможность предсказать это поведение при нагружении. На деле же при нагружении тел в подобных условиях наблюдается вполне определенная повторяемость картины деформации.

При решении практических задач указанные затруднения частично обходятся на основе введения ряда допущений. Вытекающая из такого расчета приближенная картина поведения тела (конструкции) оказывается в значительной мере заранее предписанной следствиями сделанных допущений и порою может существенно отклоняться от действительности.

Можно ожидать, что использование для расчета теорий, свободных от указанных выше неудобств, может выявить новые качественные особенности поведения конструкций при идеальной текучести, закрываемые используемыми ранее допущениями. В этой связи покажем некоторые возможности, вытекающие из развиваемой автором теории упруго-пластической деформации, отдельные положения которой освещены в работах [3], [4], [5].

Основные зависимости этой теории, устанавливающие связь между напряжениями и деформациями, могут быть представлены следующими, приведенными ниже соотношениями.

Компоненты главных деформаций связаны для изотропного материала при простом нагружении с напряжениями через посредство двух характеристик $E(\lambda)$ и $\mu(\lambda)$, соответствующих секущему модулю диаграммы растяжения и коэффициенту полной (упруго-пластической) поперечной деформации

$$e_n = \frac{1}{E(\lambda)} [\sigma_n - \mu(\lambda)(\sigma_m + \sigma_k)] \quad \begin{matrix} \nearrow n \\ m \leftarrow k \end{matrix} \quad (n, m, k = 1, 2, 3)$$

$$E(\lambda) = \frac{\sigma}{e} \quad \mu(\lambda) = \frac{e_{\text{поперечн.}}}{e_{\text{продольн.}}}$$

При этом напряженное состояние в целом связано с деформированным состоянием нижеследующим условием, выражающим основную механическую характеристику материала

$$\begin{aligned} & \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{4\mu(\lambda) - 2\mu(\lambda)^2}{1 + 2\mu(\lambda)^2} (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_3 \cdot \sigma_2 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)} = \\ & = E(\lambda) \cdot \sqrt{\frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}{1 + 2\mu(\lambda)^2}}. \end{aligned}$$

Это условие полностью совпадает с диаграммой растяжения без всяких допущений.

Соответствующее условие упруго-пластической деформации, эквивалентное условию пластичности деформационной теории пластичности для участка текучести, будет иметь вид

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{4\mu(\lambda) - 2\mu(\lambda)^2}{1 + 2\mu(\lambda)^2} (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)} = \sigma_T. \quad (2)$$

За счет учета действительного изменения $\mu(\lambda)$ это условие устанавливает однозначную связь между напряженным и деформированным состоянием и на участке текучести, где состояние материала характеризуется соответствующим каждому моменту процесса деформирования значением $\mu(\lambda)$, (рис. 1, в).

Условие (2) позволяет расчетом предсказать изменение сопротивляемости тела, выражаемой изменением напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ в процессе текучести. Это изменение и будет являться движущим началом, определяющим развитие процесса деформации в данных условиях. В то же время постоянство напряжений при текучести, устанавливаемое условиями пластичности типа условий Сен-Венана или Мизеса, связано с некоторыми затруднениями в объяснении причинности движения, так как деформация при текучести зачастую не носит характера установившегося движения.

Необходимо здесь также привести некоторые пояснения используемого нами понятия о простом нагружении.

Введенное А. А. Ильиным [1] понятие о простом нагружении соответствует теориям пластичности, базирующимся на условиях пластичности типа условий Сен-Венана, Мизеса-Генки. Использование других теорий может потребовать и соответствующего пояснения понятия о видах нагружения.

Определяя простое нагружение, как нагружение с возрастанием всех компонентов напряженного состояния (полных, а не только девиаторных) пропорционально одному параметру λ , мы не накладываем каких-либо условий на деформации, величина которых и соотношение определяют лишь свойствами материала.

Нетрудно представить себе, что если давая определение простого нагружения, параллельно наложить какие-либо условия на деформации, то это явится некоторым предписанием реальным материалам взаимосвязи между напряжением и деформацией. Иначе говоря, объективная связь примет некоторый условный характер.

По аналогии с простым нагружением можно ввести понятие о простом деформировании, с возрастанием всех компонентов деформации пропорционально одному параметру. При этом величина напряжений и их соотношение определится свойствами самого материала.

В отмеченном плане различные испытательные установки могут реализовать либо условия простого нагружения, либо простого деформирования.

Из условия (2) следует некоторая возможность ведения процесса простого нагружения и на участке текучести. Пропорциональное изменение напряжений при постоянстве σ_T здесь может быть достигнуто за счет изменения $\mu(\lambda)$, т. е. в конечном счете в связи с перераспределением деформаций.

Обратно, задавая условия простого деформирования, можно получить на участке текучести изменение напряжений, которое в зависимости от типа деформирования может носить либо активный характер (повышение напряжений), либо пассивный (падение напряжений).

Отмечая возможности расчета поведения тела (или конструкции) при „идеальной текучести“ на базе условия (2) (которое проверено нами экспериментально и подтверждается данными других исследователей), приведем в заключение два простейших примера.

При расчете тонкостенных сосудов напряжения по граням выделенного из стенки элемента определяются исходя из условий равновесия элемента (уравнения Лапласа) и равновесия части сосуда.

Для цилиндрического сосуда, подверженного внутреннему равномерному давлению, тангенциальное и меридиональное напряжения соответственно определяются:

$$\sigma_t = \frac{qD}{2t}, \quad \sigma_m = \frac{qD}{4t}.$$

Для радиального напряжения может быть в среднем принято

$$\sigma_r = -\frac{q}{2}.$$

Обозначая отношение диаметра сосуда к толщине через c , имеем

$$\sigma_t = \frac{q}{2} c; \quad \sigma_m = \frac{q}{4} c; \quad \sigma_r = -\frac{q}{2}.$$

Для „идеальной текучести“ из условия пластичности Мизеса—Генки следует, что пластическая деформация будет развиваться при постоянном давлении

$$q = \frac{4\sigma_T}{\sqrt{3c^2 + 6c + 4}}.$$

При расчете по условию (2) получим

$$q = \frac{4\sigma_T}{\sqrt{(5c^2 + 4) - \frac{4\nu(\lambda) - 2\nu(\lambda)^2}{1 + 2\nu(\lambda)^2}(2c^2 - 6c)}}.$$

откуда следует, что для ведения процесса пластического раздутья цилиндра необходимо некоторое (хотя и незначительное, но систематическое) повышение давления.

Ниже в таблице приведены данные испытания цилиндра из отожженной стали (Ст. 3), дававшей при растяжении горизонтальный участок диаграммы порядка $e_{\text{раст.}} = 1,7\%$ при $\sigma_T = 2,1 \cdot 10^8 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$, $D = 41 \text{ мм}$,

$t = 1 \text{ мм}$. Рассчитанное повышение давления в процессе текучести $q_{\text{теор.}}$ подтверждается данными эксперимента. В таблице приведены значения давлений в зависимости от изменения диаметра цилиндра ΔD , а также значения эквивалентной относительной продольной деформации при простом растяжении $e_{\text{раст.}}$ и соответствующие величины коэффициента поперечной деформации. Внутреннее давление в заглушенном по днищам цилиндре создает надежные условия простого нагружения в данных условиях. Измерение давления производилось с помощью образцового манометра (Кл. 0,35).

Для случая сдвига (кручения) главные напряжения соответственно равны

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau.$$

Согласно условию (2) для материала, у которого при испытании на

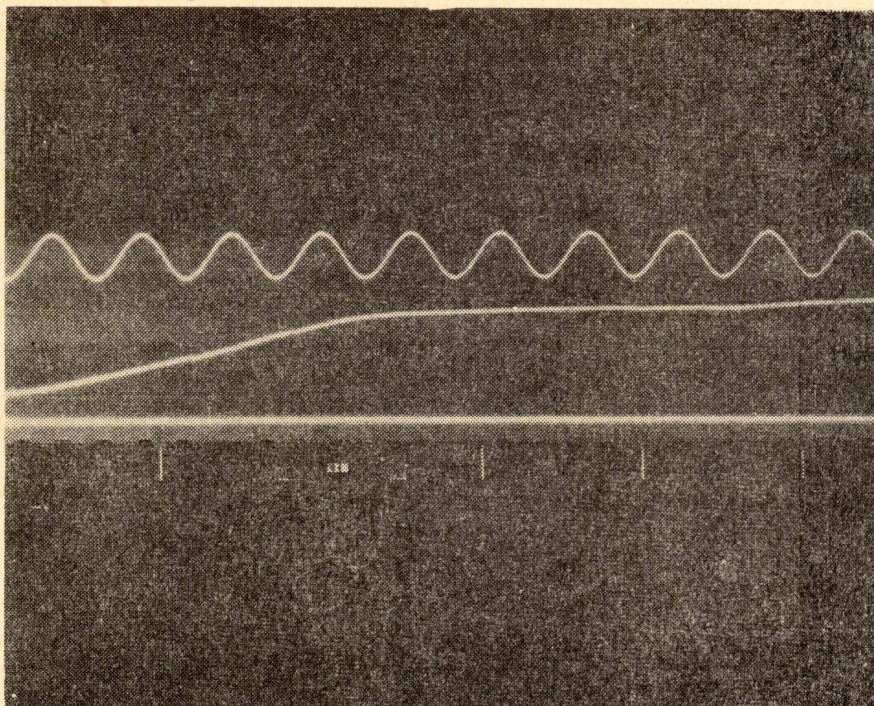


Рис. 2.

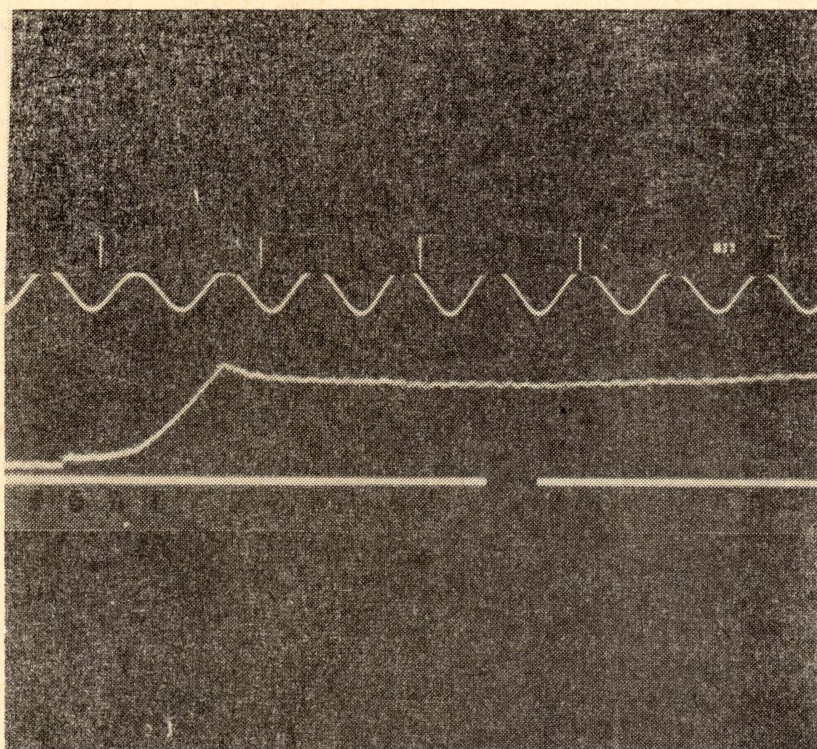


Рис. 3.

растяжение обнаруживается площадка текучести, соответствующее касательное напряжение

$$\tau = \frac{\sigma_T}{\sqrt{\frac{2[1 + \mu(\lambda)]^2}{1 + 2\mu(\lambda)^2}}},$$

т. е. предполагается возможность некоторого падения напряжений в пределах $(0,590 \div 0,577) \sigma_T$.

На рис. 2 и 3 показаны осциллограммы процессов растяжения и кручения стальных образцов. Крутящий момент на испытательной машине измерялся по отклонению маятника (реализовались условия, приблизительно соответствующие простому деформированию). Неко-

$\Delta D_{мм}$	$\epsilon_{раст.}$	$\mu(\lambda)$	$\frac{атм}{q_{теор.}}$	$\frac{атм}{q_{эсп.}}$	Примечание
0,036	0,00095	0,280	105	105	Начало текучести
0,144	0,00430	0,449	109	109,5	
0,286	0,00850	0,474	110	110	
0,423	0,01250	0,483	110,2	110,5	
0,571	0,01700	0,487	110,4	111	Конец текучести

торое падение напряжения сопровождалось соответствующим уменьшением отклонения уравнивающего маятника. Уменьшение крутящего момента (в сплошном образце) видно на осциллограмме (рис. 3).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Ильющин. Пластичность. Гостехиздат, 1948.
2. М. М. Филоненко-Бородич и др.. Курс сопротивления материалов. Т. 2, 1950.
3. Г. А. Дошинский. К теории упруго-пластической деформации. Известия ТПИ, т. 85, 1957.
4. Г. А. Дошинский. Общий закон связи между напряжениями и деформациями. Известия ТПИ, т. 114, 1963.
5. Г. А. Дошинский. О законе объемной деформации, настоящий сборник.