

РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

Ю. М. ТРИФОНОВ

(Представлена кафедрой АТПП)

Вопросу разложения на множители или определения корней характеристического уравнения 3 степени посвящен целый ряд работ [1, 2, 3, 4]. Методы, изложенные в этих работах, позволяют решить задачу, но требуют затраты значительного количества труда. Предлагаемый метод сокращает объем вычислительной работы, если уравнение не содержит кратных корней. Это условие практически всегда выполняется, ибо в подавляющем большинстве случаев характеристические уравнения систем автоматического регулирования вообще не содержат кратных корней [3].

Рассматриваемый ниже метод разложения на множители может применяться для характеристического уравнения вида

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1 = 0, \quad (1)$$

где $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$.

Если выполняется условие устойчивости Раусса-Гурвица, то

$$a_1 \cdot a_2 > a_3.$$

Представим выражение (1) в виде

$$(T_1 p + 1)(T_2 p^2 + T_3 p + 1) = 0 \quad (2)$$

при этом $T_1 > 0$, $T_2 > 0$, $T_3 > 0$.

После преобразования получим

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 T_3 + T_2) p^2 + (T_1 + T_3) p + 1 = 0. \quad (3)$$

Сравнивая выражения (1) и (3), видим, что

$$\left. \begin{aligned} T_1 T_2 &= a_3, & (4-a) \\ T_1 \cdot T_3 + T_2 &= a_2, & (4-b) \\ T_1 + T_3 &= a_1. & (4-в) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Определим пределы, которые ограничивают интервал существования T_1 . Из выражения (4—б) следует

$$T_1 = \frac{a_2 - T_2}{T_3}.$$

Чтобы T_1 было положительно, необходимо выполнение неравенства $T_2 < a_2$. Из уравнения (4—а) имеем

$$T_2 = \frac{a_3}{T_1}, \text{ отсюда } T_1 > \frac{a_3}{a_2}.$$

Второй предел существования T_1 определяется из уравнения (4—в)

$$T_3 = a_1 - T_1.$$

Чтобы было $T_3 > 0$, необходимо выполнение условия $T_1 < a_1$.

Таким образом, T_1 и T_3 существуют в интервалах

$$\frac{a_3}{a_2} < T_1 < a_1; \quad 0 < T_3 < a_1 - \frac{a_3}{a_2}.$$

Для решения системы (4) необходимо найти интервал существования $T_1 \cdot T_3$.

А. Для этого вначале найдем

$$\lim_{T_3 \rightarrow 0} T_1 = a_1, \text{ тогда } \lim_{T_3 \rightarrow 0} T_2 = \frac{a_3}{a_1}.$$

Из уравнения (4—б) имеем

$$T_1 T_3 \leq a_2 - \frac{a_3}{a_1} = c' \quad (5)$$

При

$$\lim_{T_3 \rightarrow a_1 - \frac{a_3}{a_2}} T_1 = \frac{a_3}{a_2}, \quad \lim_{T_3 \rightarrow a_1 - \frac{a_3}{a_2}} T_2 = a_2, \quad T_1 T_3 = 0.$$

$T_1 T_3$ существует в интервале

$$0 < T_1 T_3 \leq c'.$$

Б. Положим, что произведение $T_1 \cdot T_3 = c''$.

Рассмотрим тогда систему уравнений

$$\begin{cases} T_1 \cdot T_3 = c'', \\ T_1 + T_3 = a_1. \end{cases} \quad (6) \quad (4-в)$$

Выразим T_3 из уравнения (4—в) и подставим его в уравнение (6), тогда получим

$$\begin{aligned} T_1^2 - a_1 T_1 + c'' &= 0, \\ T_1 &= \frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - c''}, \end{aligned}$$

так как $T_1 > 0$ и действительное число, то

$$\frac{a_1^2}{4} - c'' \geq 0.$$

Отсюда

$$c'' \leq \frac{a_1^2}{4}. \quad (7)$$

Для того, чтобы выбрать первое приближение $T_1 \cdot T_3$, необходимо сравнить следующие неравенства:

$$0 < T_1 T_3 \leq c', \quad (8-a)$$

$$0 < T_1 T_3 \leq c''. \quad (8-b)$$

Из рассмотрения выражений (8 — а) и (8 — б) следует, что

$$0 < T_1 \cdot T_3' \leq c_1 \quad (8 - в),$$

где c_1 равно меньшему из чисел c' и c'' .

Когда найдены интервалы существования T_1 и $T_1 \cdot T_3$, можно данное характеристическое уравнение 3 степени разложить на множители. При этом возможны следующие случаи:

Случай 1

$$\frac{c'}{c''} < 1,$$

тогда

$$c_1 = a_2 - \frac{a_3}{a_1}.$$

Представим графически выражения (4 — в) и (8 — в) сплошными линиями на рис. 1. Из рисунка видно, что c может лишь уменьшаться или быть равным числу c_1 . Уменьшение числа c означает, что гипербола сдвигается к началу координат (см. пунктирную линию на рис. 1). Поэтому, если определить сейчас точку пересечения гипер-

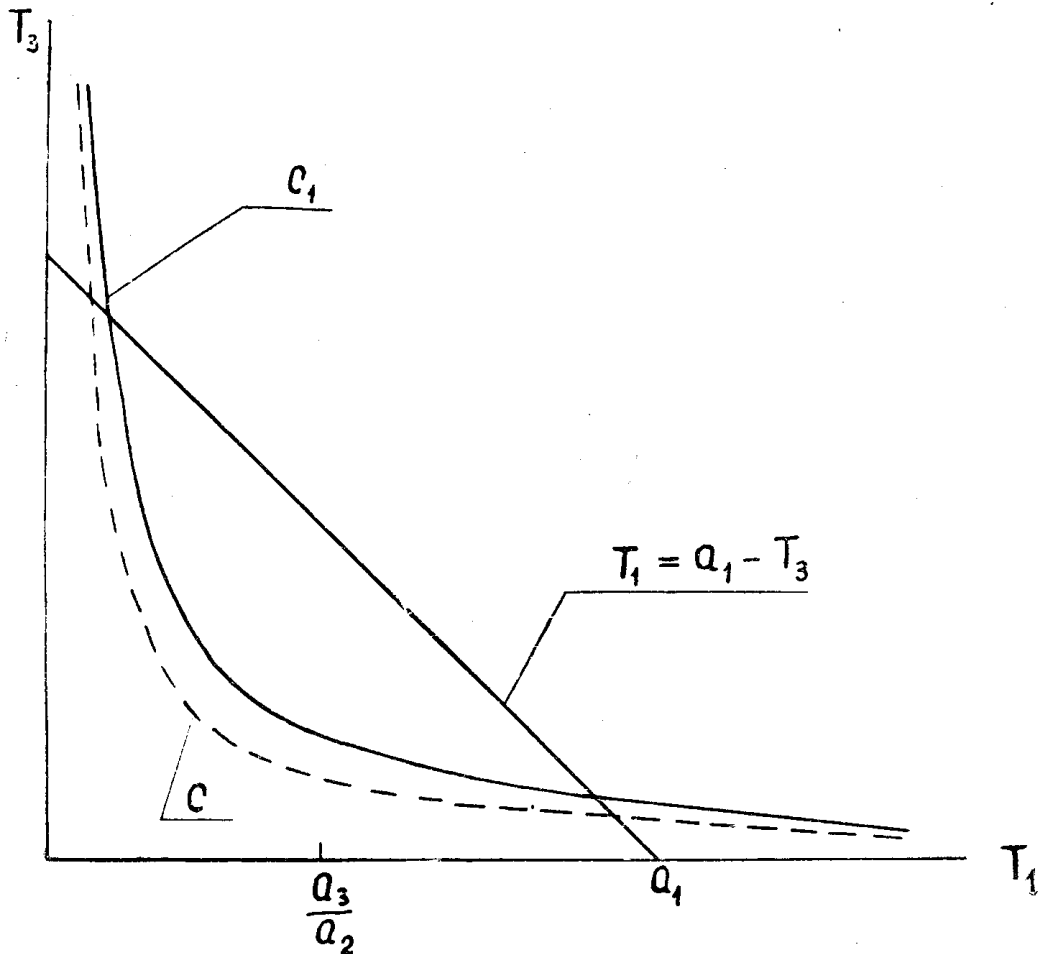


Рис. 1. Графическое представление уравнений (4—в) и (8—в).

болы c_1 с прямой, то тем самым значительно уменьшается интервал существования T_1 . Система уравнений (4 — в) и (8 — в) равносильна уравнению

$$T^2 - a_1 T + c_1 = 0,$$

из которого имеем

$$T_{1,3} = \frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - c_1}. \quad (9)$$

В первом приближении значения T_1 и T_3 равны

$$T'_1 = \frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - c_1},$$

$$T'_3 = \frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - c_1}.$$

Проверка. Подсчитываем значение $T'_1 T'_3 + T'_2 = a'_2$ и сравниваем с a_2 ; если a'_2 отличается от a_2 , то определяем c_2 по формуле

$$c_2 = a_2 - \frac{a_3}{T'_1}. \quad (10)$$

Затем снова определяем $T'_1 T'_3 + T'_2 = a'_2$ и делаем проверку. Расчет ведем до тех пор, пока не получим требуемой точности (пример № 1).

Случай 2.

$$\frac{c'}{c''} > 1.$$

В этом случае после определения интервалов существования T_1 и $T_1 \cdot T_3$ следует определить T'_1 по выражению

$$T'_1 = \frac{a_3}{a_2 - c_1}, \quad (11)$$

тогда из (4—а) и (4—в) получим:

$$T'_3 = a_1 - T'_1,$$

$$T'_2 = \frac{a_3}{T'_1}.$$

Проверка. Подсчитываем значение $T'_1 T'_3 + T'_2 = a'_2$ и сравниваем с a_2 . Если a'_2 отличается от a_2 , то определяем c_2 и по нему находим T'_1 . Формулу для определения c_2 получим после подстановки значения T'_1 в выражение (9).

$$T'_1 = \frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - c_2},$$

отсюда

$$c_2 = T'_1 (a_1 - T'_1). \quad (12)$$

Вычисления ведем до тех пор, пока $c_{n-1} - c_n \approx 0$ с требуемой точностью.

Пример 1.

Рассмотрим уравнение

$$7p^3 + 3p^2 + 5p + 1 = 0.$$

Согласно (1) имеем

$$a_3 = 7, \quad a_2 = 3, \quad a_1 = 5.$$

1 шаг. Проверим, выполняется ли условие Раусса-Гурвица

$$3 \cdot 5 > 7.$$

2 шаг. Определяем интервал существования постоянной времени T_1

$$\frac{7}{3} = 2,33 < T_1 < 5.$$

3 шаг. Определяем по выражению (8-в) интервал существования $T_1 \cdot T_3$

$$c' = a_2 - \frac{a_3}{a_1}, \quad c' = 3 - \frac{7}{5} = 1,6;$$

$$c'' = \frac{a_1^2}{4}, \quad c'' = \frac{5^2}{4} = 6,25.$$

Следовательно, $0 < T_1 \cdot T_3 \leq 1,6$.

4 шаг. Определяем отношение

$$\frac{c'}{c''} = \frac{1,6}{6,25} = 0,256.$$

Так как $\frac{c'}{c''} < 1$, то вычисление T_1 ведем по формуле (9)

$$T_1' = \frac{5}{2} + \sqrt{6,25 - 1,6} = 4,66;$$

$$T_3' = 5 - 4,66 = 0,34; \quad T_2' = \frac{7}{4,66} = 1,5.$$

Проверка. $a_2' = 4,66 \cdot 0,33 + 1,5 = 3,04$.

5 шаг. Проводим второе приближение

$$C_2 = 3 - \frac{7}{4,66} = 1,5,$$

тогда

$$T_1 = 4,7; \quad T_3 = 0,3; \quad T_2 = \frac{7}{4,7} = 1,49.$$

Проверка. $a_2'' = 4,7 \cdot 0,3 + 1,49 = 3,0$

Получили полное совпадение a_2'' с a_2 .

Пример 2.

Решим следующее уравнение:

$$0,025 p^3 + 0,225 p^2 + 0,75 p + 1 = 0.$$

Аналогично производим шаги 1, 2, 3.

1. $0,225 \cdot 0,75 > 0,025$.

$$2. \quad \frac{0,025}{0,225} = 0,111 < T_1 < 0,75.$$

$$3. \quad c' = 0,225 - \frac{0,025}{0,75} = 0,222; \quad c'' = \frac{0,75^2}{4} = 0,14; \quad \frac{c'}{c''} = 1,56.$$

Следовательно, $0 < T_1 \cdot T_3 < 0,14$.

4. Пользуемся формулами (11) и (12)

$$T_1' = \frac{0,025}{0,225 - 0,140} = 0,294; \quad c_2 = 0,294 (0,75 - 0,294) = 0,134;$$

$$T_1' = \frac{0,025}{0,225 - 0,134} = 0,275; c_3 = 0,275 (0,75 - 0,275) = 0,130;$$

$$T_1'' = \frac{0,025}{0,225 - 0,130} = 0,263; c_4 = 0,263 (0,75 - 0,263) = 0,128.$$

$$T_1^{IV} = \frac{0,025}{0,225 - 0,128} = 0,254; c_5 = 0,254 (0,75 - 0,254) = 0,126.$$

$$T_1^V = \frac{0,025}{0,225 - 0,126} = 0,253; c_6 = 0,253 (0,75 - 0,253) = 0,125.$$

$$T_1^{VI} = \frac{0,025}{0,225 - 0,125} = 0,25; c_7 = 0,25(0,75 - 0,25) = 0,125.$$

Проверка.

$$T_3 = 0,75 - 0,25 = 0,5; T_2 = \frac{0,025}{0,25} = 0,1,$$

$$a_2 = 0,25 \cdot 0,5 + 0,1 = 0,225.$$

Получили полное совпадение.

Сравним предложенный метод с методом итераций [2] для уравнений 3 порядка. В примере 2, сосчитанном методом итераций [1], решение получено после 10 итераций. При решении же этого примера данным методом результат получен после 6 приближений с той же точностью.

Вывод

Определение интервала существования постоянных времени еще до расчета уменьшает количество итераций, делает расчет более целенаправленным.

Сходимость вычислений тем большая, чем сильнее неравенство

$$\frac{c'}{c''} \geq 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Балансанов. Основы автоматизации технологических процессов гидрометаллургии редких и радиоактивных металлов. Атомиздат, 1960.
2. О. М. Крыжановский. Об итерационном методе определения приближенных значений корней уравнений. Автоматика и телемеханика, XI, № 3, 1950.
3. Б. Н. Наумов. Переходные процессы в линейных системах автоматического регулирования. Госэнергоиздат, 1960.
4. К. Ланцош. Практические методы прикладного анализа. Физматиздат, 1961.