ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 138 1965

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ УСТРОЙСТВ РЕГИСТРАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ

И. Э. НААЦ

(Представлена объединенным научным семинаром кафедр физико-технического факультета)

При регистрации пространственно распределенных параметров (например, температуры вдоль оси цементнообжигательной печи и т. д.) с помощью точечных датчиков становится задача представления непрерывной кривой распределения параметра по дискретным отсчетам с целью определения значений параметра в любой точке поля. Вычерчивание кривой распределения может быть выполнено вручную, т. е. путем нанесения показаний отдельных датчиков на общий график и соединения этих точек отрезками прямых (при линейном интерполировании). Такой способ контроля пространственного распределения параметра является мало оперативным и неудобным.

Автоматизация представления кривой распределения по значениям параметра в отдельных точках приводит к необходимости применения специализированных вычислительных устройств — интерполяторов. В данной работе рассматриваются вопросы проектирования устройств регистрации пространственно распределенных параметров с помощью равноотстоящих точечных датчиков для случая линейно распределенного поля, когда интерполяция кривой осуществляется тригонометрическими многочленами.

1. Принцип построения устройств регистрации, реализующих тригонометрическое интерполирование в равноотстоящих точках

Пространственное распределение параметра можно характеризовать функцией пространственного распределения $f(l)$, определяющей значение параметра в любой точке контролируемого поля. Когда регистрация пространственного распределения осуществляется с помощью группы датчиков, равномерно распределенных в поле с интервалом $h = l_к - l_{к-1}$, то представление $f(l)$ по совокупности отсчетов $\{f(l_к)\}$ может быть осуществлено с помощью следующей интерполяционной формулы [1]:

$$f(l) = \sum_{к=0}^{2n} f(l_к) \cdot \varphi_к(l), \tag{1.1}$$

при этом базисные функции представления

$$\varphi_\kappa(l) = \frac{\sin\frac{\pi N}{L}(l - kh)}{N\sin\frac{\pi}{L}(l - kh)}, \qquad (1.2)$$

где N — число точек отсчета (датчиков), $n = \frac{N-1}{2}$ — порядок интерполяционного многочлена и L — длина поля. Рассмотрим один из возможных способов построения устройств регистрации, реализующей представление функции распределения параметра в форме (1.1). Он состоит в том, что специальным образом формируется временная функция $f(t)$, рельеф которой на временном интервале $[0, T]$ совпадает с рельефом $f(l)$ на интервале $[0, L]$. Формально такая временная функция может быть получена путем замены переменных

$$l = \frac{L}{T}\cdot t \qquad (1.3)$$

в выражении (1.1), т. е.

$$f(t) = \sum_{\kappa=0}^{2n} a_k\varphi_k(t), \qquad (1.4)$$

при этом

$$a_k = f(l_k) \qquad (1.5)$$

и базисные функции

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin\frac{\pi N}{T}(t - k\tau)}{N\sin\frac{\pi}{T}\cdot(t - k\tau)}. \qquad (1.6)$$

Временные функции $\varphi_k(t)$ могут рассматриваться как периодические с периодом T, параметр τ определяется выражением

$$\tau = \frac{T}{L}\cdot h. \qquad (1.7)$$

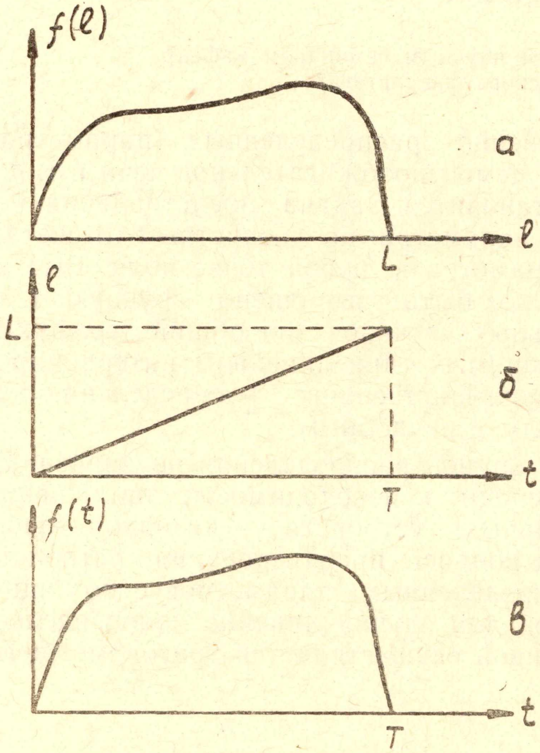

Рис. 1. а) кривая распределения параметра по длине поля L; б) движение датчика по длине поля L в системе регистрации с циклическим сканированием; в) временной сигнал $f(t)$ в тракте системы регистрации.

Примером реализации преобразования (1.3) может служить временное развертывание изображения поля в системах непрерывного сканхирования, когда регистрация распределения осуществляется датчиком, движущимся в поле с постоянной скоростью (рис. 1).

В случае, когда регистрация осуществляется точечными датчиками, равномерно установленными в поле, временное развертывание распределения параметра может быть реализовано с помощью многофазного генератора периодических колебаний $\varphi_k(t)$ (рис. 2). Структурная схема такого устройства регистрации приведена на рис. 3. С генератора колебания $\varphi_k(t)$ $(k = 0,1...N-1)$ единичной амплитуды поступают на вход соответствующих устройств, осуществляющих посредством амплитудной модуляции формирование составляющих

$a_k \cdot \varphi_k(t)$ временного сигнала $f(t)$. Суммирование всех составляющих временной функции $f(t)$ осуществляется на общем входе регистрирующего устройства РУ. Многофазный генератор колебаний $\varphi_k(t)$

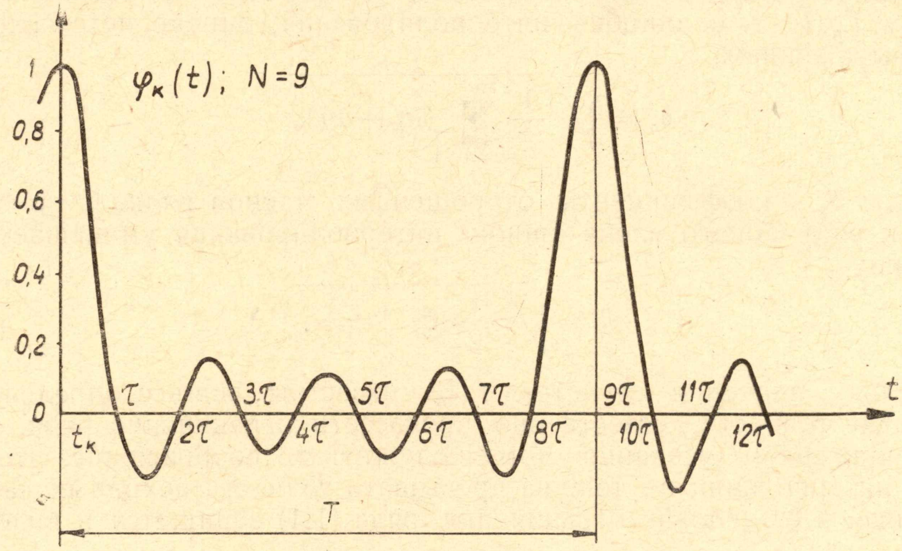

Рис. 2. Периодическая функция φ_k (t).

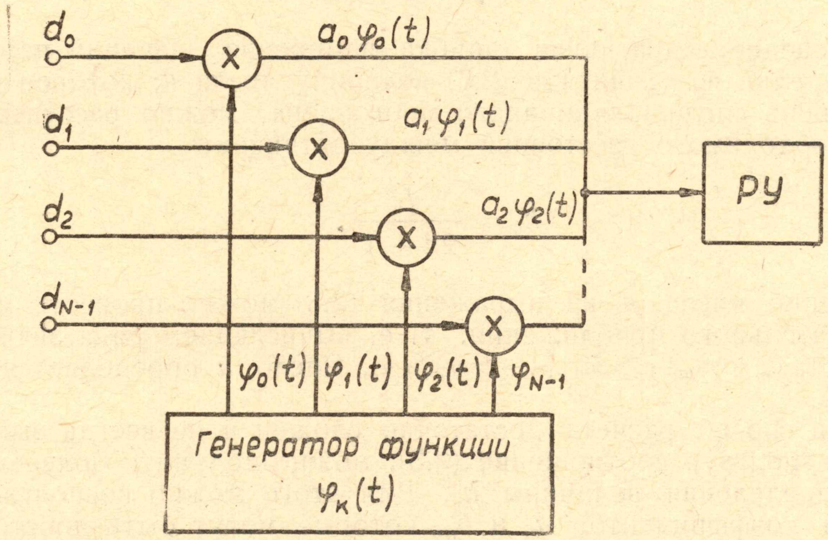

Рис. 3. Структурная схема устройства регистрации.

может быть реализован методами, описанными в работе [2]. Полное время регистрации кривой распределения в такой системе равно T.

2. Определение основных характеристик устройства регистрации

Одним из основных вопросов при проектировании устройств регистрации пространственно распределенных параметров является определение соответствующего расстояния между датчиками в поле, необходимое для регистрации распределения с той или иной степенью точности.

При решении данной задачи естественно полагать, что расстояние между датчиками (интервал квантования) определяется следующими данными: структурными свойствами параметрического поля (поле параметра считается случайным), погрешностью средств регистрации и способом представления непрерывной кривой распределения по дискретным отсчетам (видом интерполирования).

Ошибка представления функции $f(l)$ тригонометрическим многочленом $T_n(l)$, т. е. ошибка интерполирования, определяется следующим выражением:

$$\delta_n = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)}, \tag{2.1}$$

где a_k и b_k — коэффициенты отброшенных членов ряда. С прибавлением к ряду нового члена ошибка интерполирования уменьшается на величину

$$\delta_k = \sqrt{\frac{1}{2}(a_k^2 + b_k^2)}. \tag{2.2}$$

Поскольку значения отсчетов $f(l_k)$ известны лишь с определенной степенью точности, естественно произвести ограничение ряда, и при этом критерием усечения может служить то соображение, что точность интерполяции не должна превышать точности исходных данных. Учитывая это, условие ограничения ряда (1.1) запишется в виде

$$\delta_n = \delta_0 = \sqrt{\frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)}, \tag{2.3}$$

где δ_0 — среднеквадратичная ошибка измерения значений параметра.

Определив из уравнения (2.3) величину числа n, которое определяет степень интерполяционного многочлена, можно рассчитать значение необходимого расстояния между датчиками

$$h_0 = \frac{L}{2n+1}. \tag{2.4}$$

Определение числа n из выражения (2.3) можно провести методом последовательного приближения, т. е. вычислением ряда значений δ_n так, чтобы $\delta_m > \delta_{m+1} > \delta_{m+2} \ldots > \delta_0 \geqslant \delta_n$. Число n определяется из условия $\delta_0 \geqslant \delta_n$.

Такой способ расчета достаточно сложен и не всегда выполним, однако, используя соотношение (2.3), можно получить более простой метод определения величины h_0. Для этого можно воспользоваться оценками коэффициентов a_n и b_n, которые могут быть просто получены, если заранее сделать предположения об аналитических свойствах функции $f(l)$. При контроле пространственного параметрического поля естественно сделать следующие предположения: функция распределения $f(l)$ непрерывна на отрезке $[0, L]$ вместе с первой производной $f'(l)$, обладающей ограниченной вариацией V_1.

Условие непрерывности $f'(l)$ означает непрерывность градиента в любой точке физического поля, а наличие ограниченной вариации V_1 означает, что градиент поля имеет конечное число минимумов и максимумов на отрезке $[0, L]$. Далее полагая, что функции $f(l)$ и $f'(l)$ удовлетворяют граничным условиям

$$f(0) = f(L),$$

$$f'(0) = f'(L),$$

для коэффициентов Фурье могут быть получены следующие оценки [3]:

$$|a_n| < \frac{LV_1}{2\pi^2 n^2},$$
$$|b_n| < \frac{LV_1}{2\pi^2 n^2}, \tag{2.5}$$

и уравнение (2.3) запишется в виде

$$\delta_0^2 = \frac{L^2 V_1^2}{4\pi^4 n^4}. \tag{2.6}$$

Для случайного параметрического поля полное изменение градиента V_1 также является случайной функцией, поэтому выражение (2.6) можно переписать в виде

$$\delta_0^2 = \frac{L^2 \overline{V}_1^2}{4\pi^4 n^4}. \tag{2.7}$$

Введем относительную среднеквадратичную ошибку регистрации

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\overline{[\bar{f}(l) - f(l)]^2}}{\overline{[\bar{f}(l)^2]}}} = \frac{\delta_0}{\sqrt{\overline{[\bar{f}(l)^2]}}}, \tag{2.8}$$

где $\bar{f}(l)$ — истинное значение функции распределения, $f(l)$ — регистрируемое значение. Для однородного случайного поля

$$[\bar{f}(l)^2] = K(0), \tag{2.9}$$

где $K(0)$ — корреляционная функция в точке $h = 0$. При этом предполагается, что корреляционная функция определена с ошибкой, не большей ε.

Используя определение полной вариации функции на отрезке $[0, L]$ [4] и свойства корреляционной функции однородного случайного поля [5], для среднего квадрата вариации градиента поля $f'(l)$ можно получить выражение

$$\overline{V}_1^2 = 8n^2 [K^{(2)}(0) - K^{(2)}(h_0)]. \tag{2.10}$$

Учитывая соотношения (2.8), (2.9) и (2.10), уравнение (2.7) запишется в виде

$$h_0^2 \frac{K^{(2)}(0) - K^{(2)}(h_0)}{K(0)} = \frac{\varepsilon^2 \pi^4}{8}. \tag{2.11}$$

В частном случае, когда корреляционная функция поля может быть представлена в виде

$$K(h) = K(0) \cdot e^{-\alpha |h|}, \tag{2.12}$$

уравнение (2.11) примет вид

$$h_0^2 (1 - e^{-\alpha h_0}) = \frac{\pi^4 \varepsilon^2}{8\alpha^2}. \tag{2.13}$$

Уравнение (2.13) так же, как и уравнение (2.11), относительно h_0 является транцендентным и может быть просто решено графически. Введем следующие обозначения:

$$g_1(h) = 1 - e^{-\alpha |h|} \tag{2.14}$$

и

$$g_2(h) = g_0 / h^2, \tag{2.15}$$

где

$$g_0 = \frac{\pi^4 \varepsilon^2}{8\alpha^2}. \tag{2.16}$$

Тогда решение уравнения (2.13) определяется из равенства этих функций в точке $h = h_0$, т. е.

$$g_1(h_0) = g_2(h_0).$$

Графически точка h_0 определяется пересечением на графике функций $g_1(h)$ и $g_2(h)$.

Теперь рассмотрим задачу определения цикла T развертывания $f(l)$ способом временного преобразования. При этом будем исходить из следующего положения: цикл полного развертывания T должен быть выбран столь малым, чтобы временными изменениями в поле за время T можно было пренебречь [6]. Это требование может быть записано в виде неравенства, справедливого для любой точки поля

$$\sqrt{\overline{[P(t) - P(t+T)]^2}} \leqslant \delta_0, \tag{2.17}$$

где δ_0 — среднеквадратичная ошибка измерения средств регистрации.

Считая, что временное поведение параметра $P(t)$ для любой точки поля можно рассматривать как стационарный случайный процесс, неравенство (2.17) можно привести к виду

$$K_t(0) - K_t(T) = \frac{\delta_0^2}{2}, \tag{2.18}$$

где $K_t(\tau)$ — временная корреляционная функция параметрического поля.

Оценка величины T может быть просто осуществлена графически, поскольку корреляционная функция $K_t(\tau)$, как правило, определяется экспериментально и дается в виде графика.

Выводы

1. Рассмотрены вопросы представления кривой пространственного распределения технологических параметров по дискретным отсчетам с точечных датчиков с помощью тригонометрических интерполяционных многочленов. Приведена структурная схема устройства, реализующая такое представление путем формирования соответствующего временного сигнала.

2. Дается методика расчета основных параметров устройства регистрации по статистическим характеристикам параметрического поля: расстояния между датчиками в поле и временного цикла развертки кривой распределения.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. П. Натонсон. Конструктивная теория функций. Гостехиздат, стр. 509, 1949.

2. А. И. Ставицкий. Многофункциональный преобразователь «политрон» и его применение для апериодического умножения частоты. Труды научно-технической конференции ЛЭИС, 1962.

3. Ш. Е. Микеладзе. Численные методы математического анализа. Гостехиздат, стр. 190, 1953.

4. Г. Е. Шилов. Математический анализ. Физматгиз, стр. 256, 1960.

5. А. М. Яглом. Введение в теорию стационарных функций. Успехи математических наук, т. VII, вып. 5, 1952.

6. Э. Л. Ицкович. Определение необходимой частоты измерения при дискретном контроле. Автоматика и телемеханика, т. XXII, № 2, 1961.