

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ДВУХМЕРНОГО
ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ОБМОТКАХ И СЕРДЕЧНИКАХ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

Д. И. САННИКОВ

(Представлена научным семинаром кафедр электрических машин
и общей электротехники)

При тепловых расчетах электрических машин и трансформаторов оказывается необходимым знать во многих случаях характер распределения температуры внутри обмоток и сердечников. Большинство таких задач может быть сведено к расчету двухмерного температурного поля с использованием приближенных методов.

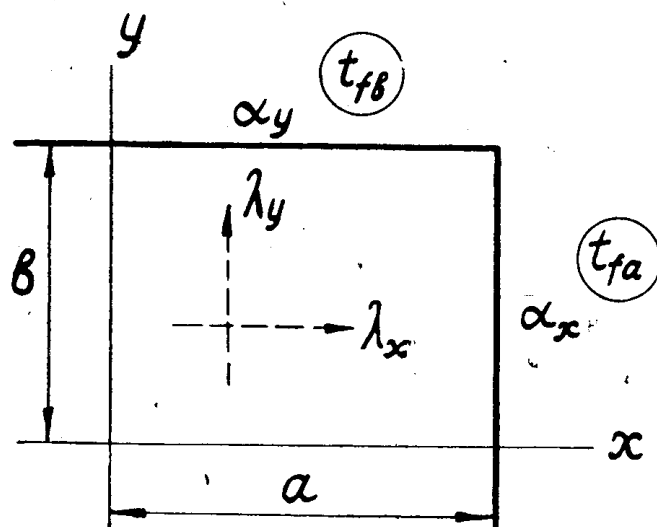


Рис. 1. Размеры и тепловые параметры тела.

Рассмотрим некоторые из этих методов на примере расчета температуры $t(x, y)$ бруса (рис. 1) с распределенными источниками тепла q , имеющего различные размеры (a, b) , коэффициенты теплопроводности (λ_x, λ_y) и теплоотдачи с поверхности (α_x, α_y) вдоль координатных осей при различной температуре охлаждающей среды у поверхностей $|x| = a - t_{fa}$ и $|y| = b - t_{fb}$. Данная задача имеет точное решение в виде функционального ряда, расчет которого представляет значительную трудоемкость.

Все приближенные методы основаны на введении упрощающих допущений при решении уравнения Пуассона

$$\lambda_x \frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial y^2} + q = 0, \quad (1)$$

с граничными условиями

$$-\lambda_x \frac{\partial t(a, y)}{\partial x} = \alpha_x [t(a, y) - t_{fa}], \quad (2)$$

$$-\lambda_y \frac{\partial t(x, b)}{\partial y} = \alpha_y [t(x, b) - t_{fb}].$$

1 метод. В случае $\lambda_x \gg \lambda_y$ возможно простейшее допущение $\lambda_y = 0$, в результате которого задача сводится к одномерной

$$\lambda_x \frac{d^2 t(x)}{dx^2} + q = 0, \quad (3)$$

$$-\lambda_x \frac{dt(a)}{dx} = \alpha_x [t(a) - t_{fa}], \quad (4)$$

решением которой служит парабола

$$t(x) = q \left(\frac{a^2 - x^2}{2\lambda_x} + \frac{a}{\alpha_x} \right). \quad (5)$$

Такое же допущение можно принять в одном из следующих случаев

$$b \gg a;$$

$$\alpha_x \gg \alpha_y;$$

$$t(a) - t_{fa} \gg t(b) - t_{fb},$$

если остальные параметры, отнесенные к направлениям обеих осей, имеют одинаковый порядок. Расчетная картина поля качественно отличается от действительной, поэтому данный метод позволяет рассчитывать только температуру средней точки тела; причем ее значение получается завышенным, поскольку не учитывается один из возможных путей отвода тепла. Точность расчета тем выше, чем больше соотношение

$$\frac{\bar{t} - t_{fa}}{\bar{t} - t_{fb}} \cdot \frac{b/\lambda_y + 1/\alpha_y}{a/\lambda_x + 1/\alpha_x}, \quad (6)$$

где $\bar{t}$ — средняя температура тела.

Расхождение между расчетной и действительной картиной поля уменьшается с уменьшением критерия Био для координаты y

$$Bi_y = \frac{\alpha_y b}{\lambda_y}.$$

2 метод. Приближенный учет теплового потока, отводимого в направлении оси y , дает картину поля, более близкую к реальной. В простейшем случае принимается

$$\begin{aligned} \lambda_x \frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial x^2} &= \frac{q_x}{q_y} = \xi = \text{const}, \\ \lambda_y \frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial y^2} &= q, \end{aligned} \quad (8)$$

$$q_x + q_y = q,$$

то есть тепловые потери, выделяющиеся в каждой единице объема, разделяются на две части, одна из которых q_x отводится в направлении, параллельном оси x , другая q_y — вдоль оси y , причем соотношение этих частей ξ для всех точек тела одинаково. При этом задача сводится к расчету двух одномерных полей. Решение имеет вид — для передачи тепла в направлении x

$$t(x, y) = q_x \frac{a^2 - x^2}{2\lambda_x} + t(a, y), \quad (10)$$

для передачи тепла в направлении y

$$t(x, y) = q_y \frac{b^2 - y^2}{2\lambda_y} + t(x, b).$$

Оба решения должны быть идентичными, следовательно,

$$t(a, y) = q_y \frac{b^2 - y^2}{2\lambda_y} + t(a, b), \quad (11)$$

$$t(x, b) = q_x \frac{a^2 - x^2}{2\lambda_x} + t(a, b).$$

Расчетная картина поля в сечениях $x = \text{const}$ имеет форму парабол одинаковой кривизны, то же самое справедливо и для сечений $y = \text{const}$. В этом состоит ее принципиальное отличие от действительной картины поля, для которой средняя кривизна профилей $t(x)$ при $y \rightarrow b$ и $t(y)$ при $x \rightarrow a$ уменьшается. Полученное искажение вызвано, главным образом, нарушением граничных условий. Плотность теплового потока через наружные поверхности тела в расчете считается постоянной

$$w_x = q_x a, \quad (12)$$

$$w_y = q_y b.$$

С другой стороны, на основании граничных условий

$$w_x(y) = \alpha_x [t(a, y) - t_{fa}] \neq \text{const}, \quad (13)$$

аналогично для $w_y(x)$. Таким образом, на поверхностях тела получается разрыв плотности теплового потока.

Упрощение граничных условий в целях разрешения данного противоречия производится двумя способами:

а) согласно [1], плотность теплового потока определяется по максимальной температуре на поверхности

$$q_x a = \alpha_x [t(a, 0) - t_{fa}], \quad (14)$$

$$q_y b = \alpha_y [t(0, b) - t_{fb}];$$

б) согласно [2] — по средней температуре

$$q_x a = \alpha_x \left[\frac{1}{b} \int_0^b t(a, y) dy - t_{fa} \right], \quad (15)$$

$$q_y b = \alpha_y \left[\frac{1}{a} \int_0^a t(x, b) dx - t_{fb} \right].$$

На основании выражений (11), (12), (14) и (15) выводится формула для расчета ξ : при первом способе

$$\xi = \frac{q \left(\frac{b^2}{2\lambda_y} + \frac{b}{\alpha_y} \right) + t_{fb} - t_{fa}}{q \left(\frac{a^2}{2\lambda_x} + \frac{a}{\alpha_x} \right) + t_{fa} - t_{fb}}, \quad (16)$$

при втором способе вместо 2 в знаменателях получается 3. Далее, определив

$$q_x = q \frac{\xi}{\xi + 1},$$

$$q_y = q \frac{1}{\xi + 1}, \quad (17)$$

можно рассчитать температурное поле

$$t(x, y) = t_0 - q_x \frac{x^2}{2\lambda_x} - q_y \frac{y^2}{2\lambda_y}, \quad (18)$$

где t_0 — температура в центре тела.

При первом способе

$$t_0 = q_x \left(\frac{a^2}{2\lambda_x} + \frac{a}{\alpha_x} \right) + t_{fa}, \quad (19)$$

при втором способе t_0 больше на величину $q_y b^2 / 6\lambda_y$.

Погрешность метода, основанного на допущении $\xi = \text{const}$ меньше, чем при допущении $\lambda_y = 0$ или $q_y = 0$, однако, чрезмерно велика при больших значениях критерия Био. Расчет теплоотдачи с поверхности по максимальной температуре (первый способ) дает заниженные результаты, расчет по средней температуре (второй способ) — завышенные. Наибольшее искажение поля получается в периферийных частях тела.

3 метод. Значительное повышение точности приближенного расчета обеспечивается при допущении

$$\frac{\lambda_x \frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial x^2}}{\lambda_y \frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial y^2}} = \frac{q_x(y)}{q_y(y)} = \xi(y), \quad (20)$$

при условии

$$Bi_y = \frac{\alpha_y b}{\lambda_y} > Bi_x = \frac{\alpha_x a}{\lambda_x}. \quad (21)$$

Таким образом, принимается, что соотношение между стоком тепла в направлениях x и y одно и то же для всех точек прямой $y = \text{const}$, проведенной в направлении наибольшей теплопроводности, но различно для различных положений этой прямой.

Для всех точек при $y = \text{const}$

$$q_x(y) = \text{const}.$$

Точно учитывая граничные условия на поверхности $x = a$, имеем

$$t(x, y) = q_x(y) \cdot \left(\frac{a^2 - x^2}{2\lambda_x} + \frac{a}{\alpha_x} \right) + t_{fa} \quad (22)$$

— параболическое распределение вдоль направления x , причем кривизна парабол различна для различных значений y .

На основании энергетического баланса для элементарного слоя dy получаем:

$$q_y(y) = -\lambda_y \frac{d^2 \bar{t}(y)}{dy^2}, \quad (23)$$

где

$$\bar{t}(y) = \frac{1}{a} \int_0^a t(x, y) dx$$

— средняя температура по линии $y = \text{const}$.

Из (22)

$$\bar{t}(y) = q_x(y) \cdot r + t_{fa}, \quad (24)$$

где

$$r = \frac{a^2}{3\lambda_x} + \frac{a}{\alpha_x}. \quad (25)$$

Отсюда

$$q_y(y) = q - q_x(y) = q - \frac{\bar{t}(y) - t_{fa}}{r}. \quad (26)$$

На основании выражений (23) и (26) задача сводится к расчету нагрева однородного стержня с распределенными по длине источниками тепла, охлаждаемого по длине и с торцов,

$$\lambda_y \frac{d^2 \bar{t}(y)}{dy^2} - \frac{\bar{t}(y)}{r} + \left(q + \frac{t_{fa}}{r} \right) = 0, \quad (27)$$

$$-\lambda \frac{d\bar{t}(y)}{dy} = \alpha_y [\bar{t}(b) - t_{fb}]. \quad (28)$$

Решение задачи

$$\bar{t}(y) = qr \left[1 - \left(1 + \frac{t_{fa} - t_{fb}}{qr} \right) \frac{\text{ch } \beta y}{N} \right] + t_{fa}. \quad (29)$$

Здесь

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{r\lambda_y}}, \quad (30)$$

$$N = \text{ch } \beta b + \frac{\lambda_y b}{\alpha_y} \text{ch } \beta b. \quad (31)$$

Определяя из (29) и (24) $q_x(y)$ и подставляя в (22), получаем полное приближенное решение

$$t(x, y) = q \left[1 - \left(1 + \frac{t_{fa} - t_{fb}}{qr} \right) \frac{\text{ch } \beta y}{N} \right] \cdot \left(\frac{a^2 - x^2}{2\lambda_x} + \frac{a}{\alpha_x} \right) + t_{fa}. \quad (32)$$

В отличие от двух предыдущих методов, граничные условия выполняются точно на поверхностях $|x| = a$, а при условии $t_{fa} = t_{fb}$ также и на поверхностях $|y| = b$.

На рис. 2 приводятся результаты расчета температурного поля в сечении бруса при $a = 15$ см, $b = 10$ см, $\lambda_x = 20$ Вт/см. град, $\lambda_y = 0,014$ Вт/см. град, $\alpha_x = \alpha_y = 0,01$ Вт/см². град, $q = 0,02$ Вт/см², $t_{fa} = t_{fb} = 0$.

Сплошные кривые представляют результат точного решения. Результаты приближенного расчета показаны точками.

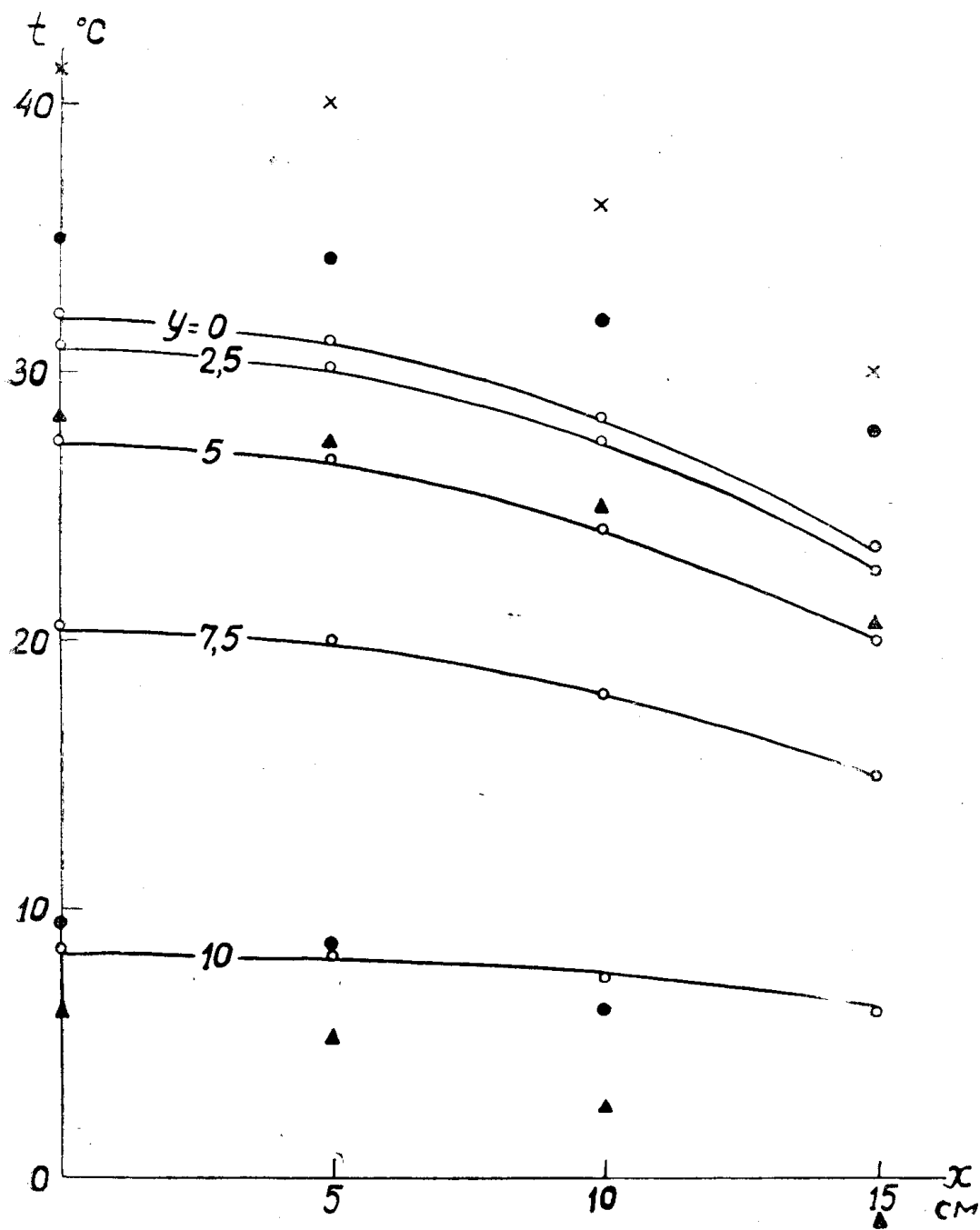


Рис. 2. Результаты расчета температурного поля.

- точное решение;
- × — 1 метод (при допущении $\lambda_{\psi} = 0$);
- Δ — 2 метод (при допущении $\xi = \text{const}$; граничные условия по [1]), $y = 0$ и 10;
- — 2 метод (граничные условия по [2]), $y = 0$ и 10;
- — 3 метод (при допущении $\xi = f(y)$).

Третий метод приближенного расчета — по формуле (32) обеспечивает наибольшую точность по сравнению с остальными. Максимальное отклонение от данных точного расчета в данном примере составляет $\pm 0,7\% t_0$; форма профилей температурного поля не искажена.

Таким образом, принцип приближенного расчета температурного поля, основанный на допущениях (20) и (23), является наиболее эффективным и может быть рекомендован для расчета в более сложных случаях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Готтер. Нагревание и охлаждение электрических машин. ГЭИ, 1961.
2. Г. П. Бойков, Ю. А. Короленко. К вопросу о температурном поле тел с внутренним тепловыделением. «Известия ТПИ», т. 110, Томск, 1962.