ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 139. 1965

КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВИБРАТОРА, РАБОТАЮЩЕГО ОТ ИСТОЧНИКА СИНУСОИДАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ БЕЗ ВЫПРЯМИТЕЛЯ

Ю. Я. КОВЫЛИН

(Представлена научным семинаром кафедр факультета автоматических систем)

На рис. 1 показан простейший электромагнитный вибратор, состоящий из ферромагнитного якоря *1*, укрепленного на пружине *2*, и электромагнита *3*. Обмотка электромагнита питается от источника синусоидального напряжения.

Исходную систему дифференциальных уравнений можно записать в следующем виде:

$$U_M \cos(\omega t + \psi) = Ri + \frac{d}{dt}(Li), \tag{1}$$

$$iU_M \cos(\omega t + \psi)\, dt = Ri^2\, dt + d\,\frac{Li^2}{2} + P dY, \tag{2}$$

$$M\frac{d^2Y}{dt^2} + H\frac{dY}{dt} + CY = P. \tag{3}$$

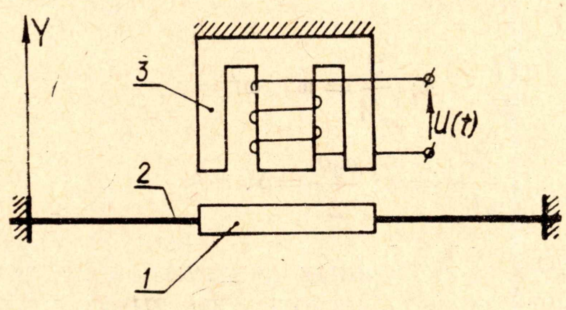

Рис. 1.

Здесь U_M — амплитуда напряжения сети;
ω — круговая частота сети,
t — время;
ψ — начальная фаза напряжения;
i — текущее значение силы тока в обмотке;
L — индуктивность обмотки магнита;
R — активное сопротивление электрического контура:
P — электромагнитная сила, приложенная к якорю;

Y—смещение якоря, измеряемое от положения его статического равновесия при $i=0$, причем положительным смещениям якоря отвечает уменьшение зазора в магнитной цепи;

M—приведенная масса подвижных частей вибратора;

H—коэффициент, учитывающий поглощение энергии в механической цепи;

C—приведенный к якорю коэффициент жесткости пружины.

Из совместного решения (2) и (3) в предположении линейности характеристики намагничивания магнита получим формулу для тяговой силы магнита

$$P = \frac{i^2}{2} \frac{dL}{dY}. \tag{4}$$

Общее решение уравнения (1) запишем в виде

$$i = \frac{U_M}{\omega L} e^{-\int \frac{R}{\omega L} d\omega t} \left[\int e^{\int \frac{R}{\omega L} d\omega t} \cos(\omega t + \psi)\, d\omega t + K_0 \right]. \tag{5}$$

Здесь K_0—постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий.

Индуктивность обмотки магнита можно приближенно выразить как

$$L = \frac{L_0}{1 - \frac{Y(t)}{S}}, \tag{6}$$

где L_0—индуктивность обмотки при $Y=0$;

S—приведенный воздушный зазор между якорем и статором.

Предположим, что закон движения якоря можно представить рядом Фурье

$$Y = A_0 + A_2 \sin 2\omega t - A_4 \sin (4\omega t - \varphi_4) + \ldots \tag{7}$$

Для упрощения выкладок введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} &\frac{Y}{S} = y;\ \frac{A_0}{S} = a_0;\ \frac{A_2}{S} = a_2;\ \frac{A_4}{S} = a_4; \ldots \\ &\frac{H}{M} = h;\ \frac{C}{M} = \omega_0^2;\ \omega t = x; \\ &\frac{R}{\omega L_0} = q;\ \frac{a_2 q}{2} = \Delta. \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

Если частота собственных незатухающих колебаний системы ω_0 не сильно отличается от частоты 2ω вынужденных колебаний, то

$$\int \frac{R}{\omega L} d\omega t \approx qx + \Delta \cos 2x.$$

Далее, так как обычно $\Delta < 0{,}2 \div 0{,}3$ даже в том случае, если амплитуда колебания регулируется с помощью реостата, то из (5) с достаточной для практических расчетов точностью имеем

$$i = \frac{U_M}{\omega L} e^{-\Delta \cos 2x} \left\{ \frac{I_0(\Delta)}{1+q^2} \left[q \cos(x+\psi) + \sin(x+\psi) \right] + K_0 e^{-qx} \right\}.$$

Здесь $I_0(\Delta)$—модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Для установившегося режима ($x \to \infty$), независимо от начальных условий, с учетом (6) получаем простую формулу для силы тока

$$i = (1-y)\frac{U_M}{\omega L_0} I_0(\Delta)\, e^{-\Delta\cos 2x}\, \xi \sin(x+\psi+\delta), \tag{9}$$

где

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}; \quad \delta = \text{arc tg}\, q.$$

Подставив (9) в (4), определим силу тяги электромагнита

$$P = \frac{L_0}{2S}\left(\frac{U_M}{\omega L_0}\right)^2 I_0^2(\Delta)\, e^{-2\Delta\cos 2x} \cdot \frac{\xi^2}{2}\left[1-\cos 2(x+\psi+\delta)\right]. \tag{10}$$

Множитель $e^{-2\Delta\cos 2x}$ в правой части (10) разложим в ряд Фурье

$$e^{-2\Delta\cos 2x} \sim I_0(2\Delta) - 2I_1(2\Delta)\cos 2x + \ldots, \tag{11}$$

в котором для упрощения дальнейших выкладок удержим всего два первых члена, поскольку при оговоренных выше значениях Δ этот ряд весьма быстро сходится. Теперь, подставив (11) в (10) с учетом (8), дифференциальное уравнение (3) можно представить в виде

$$\frac{d^2y}{dt^2} + h\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 y_C I_0^2(\Delta)\frac{\xi^2}{2}\left(Q + B_2\sin 2x + C_2\cos 2x + {} \right.$$

$$\left. {} + B_4\sin 4x + C_4\cos 4x\right), \tag{12}$$

где

$$y_C = \frac{L_0}{CS^2}\left(\frac{U_Э}{\omega L_0}\right)^2; \tag{13}$$

$U_Э$—эффективное напряжение сети, равное $\dfrac{U_M}{\sqrt{2}}$;

$$Q = I_0(2\Delta) + I_1(2\Delta)\cos 2(\psi+\delta); \tag{14}$$

$$B_2 = I_0(2\Delta)\sin 2(\psi+\delta); \tag{15}$$

$$C_2 = -2I_1(2\Delta) - I_0(2\Delta)\cos 2(\psi+\delta); \tag{16}$$

$$B_4 = -I_1(2\Delta)\sin 2(\psi+\delta); \tag{17}$$

$$C_4 = I_1(2\Delta)\cos 2(\psi+\delta). \tag{18}$$

Как видим, спектр возмущающего усилия согласуется с видом предполагавшегося ранее решения (7). Подставляя (7) в (12) и приравнивая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях слева и справа, получаем систему уравнений для определения неизвестных амплитуд и фаз:

$$a_0 = y_C I_0^2(\Delta)\frac{\xi^2}{2}Q; \tag{19}$$

$$a_2\left[1-\left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2\right] = y_C I_0^2(\Delta)\frac{\xi^2}{2}B_2; \tag{20}$$

$$a_2 h\frac{2\omega}{\omega_0^2} = y_C I_0^2(\Delta)\frac{\xi^2}{2}C_2; \tag{21}$$

$$a_4\left[1-\left(\frac{4\omega}{\omega_0}\right)^2\right]\cos\varphi_4+a_4h\,\frac{4\omega}{\omega_0^2}\sin\varphi_4=y_C I_0^2(\Delta)\,\frac{\xi^2}{2}\,B_4; \qquad (22)$$

$$-a_4\left[1-\left(\frac{4\omega}{\omega_0}\right)^2\right]\sin\varphi_4+a_4h\,\frac{4\omega}{\omega_0^2}\cos\varphi_4=y_C I_0^2(\Delta)\,\frac{\xi^2}{2}C_4. \qquad (23)$$

Из (20) и (21) с учетом (15) и (16) найдем формулу для определения частоты ω_0 при заданной амплитуде первой гармоники колебания и начальную фазу напряжения сети

$$\frac{2\omega}{\omega_0}=\sqrt{\left[1\mp\sqrt{\frac{y_C}{2a_2}I_0^2(\Delta)\,I_0(2\Delta)\,\xi^2}\right]^2-\left[\frac{y_C}{a_2}I_0^2(\Delta)\,I_1(2\Delta)\xi^2+\frac{h_0}{\omega_0}\right]^2}; \qquad (24)$$

$$\operatorname{tg}2(\psi+\delta)=\frac{\left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2-1}{\frac{y_C}{a_2}I_0^2(\Delta)\,I_1(2\Delta)\,\xi^2+\frac{h_0}{\omega_0}}. \qquad (25)$$

Последние две формулы выведены с привлечением известной гипотезы Бокка о независимости потерь энергии в механическом контуре от частоты колебания. Формула (24) позволяет построить амплитудно-частотную кривую вибратора в зоне главного резонанса в предположении $\omega=\mathrm{const}$ и $\omega_0=var$. Все значения суммы углов, определяемой из (25), заключены в пределах

$$45^\circ<\delta+\psi<135^\circ.$$

Постоянная слагающая смещения a_0 легко определяется непосредственно при помощи (19), (14) или через исходные величины:

$$a_0=y_C I_0^2(\Delta)\frac{\xi^2}{2}\left[I_0(2\Delta)-2\,\frac{I_1^2(2\Delta)}{I_0(2\Delta)}\right]-a_2\frac{h_0}{\omega_0}\,\frac{I_1(2\Delta)}{I_0(2\Delta)}. \qquad (26)$$

Из совместного решения (22) и (23) с учетом (17) и (18) определяются амплитуда второй гармоники колебания якоря и ее начальная фаза

$$a_4=\frac{y_C\,I_0^2(\Delta)I_1(2\Delta)\,\frac{\xi^2}{2}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{4\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2+\left(\frac{h_0}{\omega_0}\right)^2}}; \qquad (27)$$

$$\varphi_4=\gamma-90^\circ-2(\psi+\delta). \qquad (28)$$

Здесь

$$\gamma=\operatorname{arctg}\frac{\frac{h_0}{\omega_0}}{1-\left(\frac{4\omega}{\omega_0}\right)^2};\quad 0\leqslant\gamma\leqslant180^\circ. \qquad (29)$$

Из (24) нетрудно определить величину коэффициента силы y_C, потребную для поддержания заданной амплитуды колебания a_2:

$$\frac{y_C}{a_2}=\frac{\frac{h_0}{\omega_0}\,I_1(2\Delta)}{I_0^2(\Delta)\,\xi^2\left(\frac{I_0^2(2\Delta)}{4}-I_1^2(2\Delta)\right)}+$$

$$+\frac{\sqrt{\left(\frac{h_0}{\omega_0} I_1(2\Delta)\right)^2+\left(\frac{I_0^2(2\Delta)}{4}-I_1^2(2\Delta)\right)\left\{\left[1-\left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2+\left(\frac{h_0}{\omega_0}\right)^2\right\}}}{I_0^2(\Delta)\,\xi^2\left(\frac{I_0^2(2\Delta)}{4}-I_1^2(2\Delta)\right)}. \quad (30)$$

Эффективная сила тока, потребляемого из сети, определяется известной формулой

$$i_э=\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} i^2(x)\,dx}. \quad (31)$$

Подставив сюда значение i из (9), и заметив, что в зоне главного резонанса $a_4 \ll a_2$, получим в первом приближении без учета влияния второй гармоники колебания якоря

$$i_э=\frac{U_э}{\omega L_0} I_0(\Delta)\,\xi\,\sqrt{\left[(1-a_0)^2+\frac{a_2^2}{4}\right][I_0(2\Delta)+I_1(2\Delta)\cos 2(\psi+\delta)]-(1-a_0)\,a_2 I_0(2\Delta)\sin 2(\psi+\delta)+\frac{a_2^2}{4} I_0(2\Delta)}. \quad (32)$$

Активная мощность в электрической цепи определяется как

$$w_a=\frac{U_э^2}{\omega L_0} I_0(\Delta)\,\xi\left\{(1-a_0)[I_0(\Delta)\sin\delta-I_1(\Delta)\sin(2\psi+\delta)]-\frac{1}{2}\,a_2 I_0(\Delta)\cos(2\psi+\delta)\right\}, \quad (33)$$

где, как и в предыдущем случае, опущены малые члены, пропорциональные a_4.

Наконец, коэффициент мощности, $\cos\varphi$, электромагнитного вибратора при работе в зоне главного резонанса равен

$$\cos\varphi=\frac{(1-a_0)[I_0(\Delta)\sin\delta-I_1(\Delta)\sin(2\psi+\delta)]-\frac{1}{2}\,a_2 I_0(\Delta)\cos(2\psi+\delta)}{\sqrt{\left[(1-a_0)^2+\frac{a_2^2}{4}\right][I_0(2\Delta)+I_1(2\Delta)\cos 2(\psi+\delta)]-(1-a_0)\,a_2 I_0(2\Delta)\sin 2(\psi+\delta)+\frac{a_2^2}{4} I_0(2\Delta)}} \quad (34)$$

При наличии однополупериодного выпрямителя в цепи обмотки магнита задача решается, в общем, аналогичным методом. Однако ввиду возникающих особенностей эта задача рассматривается отдельно.