Малышенко Александр Максимович, д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой интегрированных компьютерных систем управления Института кибернетики ТПУ.
E-mail: mam@tpu.ru
Область научных интересов: теория автоматического управления, управление подвижными объектами, моделирование и реинжиниринг бизнес-процессов, диагностика технологического оборудования.

УДК 681.51.01

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНДЕКСОВ КАУЗАЛЬНОСТИ, СТРУКТУРНЫХ УПРАВЛЯЕМОСТИ, НАБЛЮДАЕМОСТИ, ДОСТИЖИМОСТИ И ВОССТАНАВЛИВАЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.М. Малышенко

Томский политехнический университет
E-mail: mam@tpu.ru

Предложен способ определения структурных инвариантов (индексов) таких фундаментальных свойств управляемых линейных динамических систем как каузальность, управляемость, наблюдаемость, восстанавливаемость и достижимость, базирующийся на использовании формируемых для этих систем матриц достижимости.

Ключевые слова:
Динамическая система, каузальность, управляемость, наблюдаемость, восстанавливаемость, достижимость, структурные инварианты, индексы, определение, матрицы достижимости.

Key words:
Dynamic system, causality, controllability, observebility, restorebility, reachability, structural invariant, indices, definition, matrix of reachability.

Введение

Практический интерес к таким фундаментальным свойствам управляемых объектов и систем как управляемость, наблюдаемость, достижимость и восстанавливаемость (УНДВ) и каузальность обусловлен их явно выраженным влиянием на разрешимость многих задач управления динамическими объектами (системами) и максимально возможные при этом результаты.

Оценка структурных свойств УНДВ и каузальности объектов и систем представляет практический интерес и все чаще используется в исследовательских работах на этапах предпроектных исследований или схемотехнического и параметрического синтеза. То есть, когда имеется возможность изменять (подстраивать) параметры, и важно знать, можно ли в принципе выбрать их так, чтобы обеспечивалась полная управляемость, достижимость, наблюдаемость и восстанавливаемость системы, минимизировалось временное запаздывание в ее реакциях на управляющие воздействия. В подобных случаях оценка структурных свойств УНДВ позволяет получить необходимые сведения о системе при относительно небольших затратах на вычисления, избежать тех сложностей, с которыми часто приходится сталкиваться при использовании для этого алгебраических ранговых критериев, связанных с плохой обусловленностью используемых при этом матриц управляемости, наблюдаемости, достижимости и восстанавливаемости. Заметим также, что количественные оценки вышеуказанных структурных свойств управляемых объектов широко используются в настоящее время при формировании специализированных форм математических моделей, используемых при исследовании свойств этих объектов и синтезе управляющих устройств в создаваемых для них системах автоматического управления.

1. Основные определения

Каузальность (от англ. слова causality) характеризует вход-выходную (причинную) взаимообусловленность и инерционность процессов в управляемых объектах и системах. Связанные с каузальностью публикации в основном фиксируют наличие этого свойства у управляемого объекта или системы. Для квалиметрии этого свойства у линейных дискретных по времени и одномерных по входу и выходу динамических систем используется так называемое *характеристическое число системы* [1] равное числу тактов запаздывания выходного сигнала системы от начала изменения входного сигнала. Для аналогичных непрерывных по времени систем используют количественный показатель каузальности, получивший название *дифференциальная степень системы.*

Указанные выше показатели, как и индексы управляемости, наблюдаемости, достижимости и восстанавливаемости [2], характеризуют структурные и динамические свойства систем и имеют близкую с ними природу. В этой связи в [3, 4] автором было предложено для квалиметрии каузальности динамических систем использовать *индексы каузальности*.

Рассмотрим класс многомерных по входу и/или выходу динамических систем с дискретным временем, уравнениями динамики

$$\mathrm{x}(\mathrm{t}+1)=\mathrm{g}(\mathrm{x}(\mathrm{t}),\ \mathrm{u}(\mathrm{t})),\qquad \mathrm{y}(\mathrm{t})=\mathrm{h}(\mathrm{x}(\mathrm{t}),\ \mathrm{u}(\mathrm{t})), \tag{1}$$

в которых $x\in R^n$ – вектор состояния системы; $y\in R^p$ – вектор ее выхода; $u\in R^m$ – вектор управления; начальное состояние

$$x(0)=0;\ y(0)=0; \tag{2}$$

$g:R^n\times R^m\times R^r\to R^n$; $h:R^n\times R^m\times R^r\to R^p$ – гладкие вектор-функции, причем $g(0,0,0)=0$; $h(0,0,0)=0$. Если воспользоваться обозначениями: $x_0\triangleq x(0)$; $u_\nu\triangleq u(\nu)$; $f_\nu\triangleq f(\nu)$, $g^\nu\triangleq g\Big(g\big(\ldots(\ g\big(g\big(x_0,u_0,\ f_0\big),u_1,\ f_1\big),u_2,\ f_2\big)\ldots\big),u_{\nu-1},\ f_{\nu-1}\Big)$

$h_i(\cdot)$ – i-я строка вектор-функции $h(\cdot)$ и допущением, что $\mathrm{h}\circ\mathrm{g}^\nu$ – однозначное (сюрьективное) вход-выходное отображение такой системы на интервале $0\le t\le \nu$, то индекс каузальности k_{ij}^u системы (1) по выходу $y_i, i\in\overline{1,p}$ и управлению $u_j,\ j\in\overline{1,m}$ – это наименьшее целое t, для которого при начальном состоянии (2)

$$\frac{\partial}{\partial u_j}\left(h_i\circ g^t\right)\ne 0.$$

Пусть динамическая система линейна и описывается математической моделью в форме «вход-состояние-выход» вида

$$\sigma x(t)=Ax(t)+Bu(t),\qquad y(t)=Cx(t)+Du(t), \tag{3}$$

в которой использованы те же обозначения, что и в (1). При этом $\sigma x(t)$ в случае непрерывных систем означает dx/dt, а в случае дискретных по времени систем соответствует $x(t+1)$, причем в последнем случае t представляет собой относительное время. Тогда под индексом каузальности k_{ij}^u по выходу $y_i, i\in\overline{1,p}$ и управлению $u_j,\ j\in\overline{1,m}$ для такой непрерывной системы следует понимать минимально возможный порядок $\alpha\ge 0$ отличной от нуля в момент

$t=0_+$ производной $y_i^{(\alpha)}(t)$ реакции системы на управление $u_j(t)$ при начальном условии (2). В случае дискретной по времени системы указанный индекс каузальности k_{ij}^u равен числу тактов запаздывания начала изменения y_i от начала изменения управления u_j при том же начальном условии.

Для многомерных по входу и выходу систем каузальность следует характеризовать матрицей индексов каузальности, сформированной из индексов каузальности k_{ij}^u между всеми входами и выходами системы.

2. Вычисление индексов каузальности

Процедура вычисления индексов каузальности для линейных динамических систем, описываемых моделью «вход-состояние-выход» (3), может быть проведена по диграфу системы (что эффективно лишь при относительно небольшой суммарной размерности ее векторов u, x, y). В противном случае она согласно [3] может быть заменена вычислением этих показателей по *матрицам достижимости* S_N, $N=\overline{1,n}$, которые для рассматриваемого класса систем определяются как

$$S_N \overset{\Delta}{=} \left[s_{ij}\right]_{\alpha\alpha} = \left(\left(I_l+E\right)^N\right)^* = \left(\left(S_1\right)^N\right)^*, \tag{4}$$

где I_l – единичная $\alpha\times\alpha$ матрица, где $\alpha = n+m+p$, а символ «$*$» здесь и далее означает, что соответствующие преобразования выполняются по правилам булевой алгебры. Используемая в (4) матрица смежности системы

$$E=\begin{bmatrix} \overline{A}_{nn} & \vdots & \overline{B}_{nm} & \vdots & 0_{np} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0_{mn} & \vdots & 0_{mm} & \vdots & 0_{mp} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ \overline{C}_{pn} & \vdots & \overline{D}_{pm} & \vdots & 0_{pp} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Последняя для систем класса (3) представляет собой квадратную булеву матрицу размера $\alpha\times\alpha$, и формируется по матрицам параметров A, B, C, D системы (3) путем замены этих матриц на эквивалентные им (0,1)-матрицы $\overline{A}_{nn}, \overline{B}_{nm}, \overline{C}_{pn}, \overline{D}_{pm}$, отличающихся от A, B, C, D тем, что в них заменены единицами все их ненулевые элементы. Индексы в (5) указывают на размерность соответствующих блочных матриц. В случае, когда в (3) $D\equiv 0$, вместо матрицы $\overline{D}_{pm}$ в (4) вводится нуль-матрица 0_{pm}.

Индексы каузальности системы могут быть определены и непосредственно по матрице смежности, точнее по множеству

$$EN=\left(\left(E\right)^N\right)^*,\ N=\overline{1,n}\cdot \tag{6}$$

Если представить EN как блочную матрицу вида

$$EN=\begin{bmatrix} EN_{nn} & \vdots & EN_{nm} & \vdots & 0_{np} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0_{mn} & \vdots & I_{mm} & \vdots & 0_{mp} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ EN_{pn} & \vdots & EN_{pm} & \vdots & I_{pp} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

то индексы каузальности системы будут определяться блочными матрицами EN_{pm}, $N=1,2,3,\ldots,n$. В частности, индекс каузальности системы по входу u_j и выходу y_i

определяется как $k_{ij} = q-1$, где q – наименьшая степень в ряду (6), при которой в матрице Eq_{pm} (i, j)-ый элемент равен единице. Индексом каузальности k_i системы по выходу y_i будет уменьшенное на единицу значение q, при котором в i-й строке Eq_{pm} впервые появится единица, а индексом каузальности всей системы в целом – уменьшенное на единицу значение q, при котором в ряду Eq_{pm} впервые появится отличный от нуля элемент.

3. Определение индексов структурных управляемости, наблюдаемости, достижимости и восстанавливаемости

Структурная управляемость (это понятие введено в теорию динамических систем, по-видимому, С.Т. Лином (C. T. Lin) в [5] и распространено на многомерные по входу и выходу системы в [6]), а также *структурные наблюдаемость, достижимость, восстанавливаемость* характеризуют соответствующие свойства не при фиксирован-ных параметризациях математических моделей систем, а на всем многообразии численных значений всех их параметров. В частности, для систем (3) это соответствует оценке данных свойств при условии замены всех ненулевых элементов матриц A, B, C, D единичными значениями, т. е. замене этих матриц на эквивалентные им (0,1)-матрицы $\overline{A}_{nn}, \overline{B}_{nm}, \overline{C}_{pn}, \overline{D}_{pm}$.

Описанные выше матрицы смежности (5) динамических систем могут успешно использоваться не только при определении индексов каузальности таких систем, но и при исследовании их структурных УНДВ. Если предположить, что процессы в исследуемом управляемом объекте описываются моделью (3) и он является строго каузальным ($D \equiv 0$), то блок-матрицы EN_{nm} матриц смежности EN, определенных по (6) и (7) при $N = \overline{1, n}$ в совокупности формируют матрицу структурной достижимости

$$\overline{P} = \left[\overline{B},\ \overline{A}\cdot\overline{B}, \dots, \overline{A}^{n-1}\cdot\overline{B}\right]^{*} = \left[E1_{nm}, E2_{nm}, E3_{nm}, \dots,\ En_{nm}\right], \tag{8}$$

а блок-матрицы SN_{pn} – матрицу структурной наблюдаемости

$$\overline{Q} = \left[\overline{C}^T,\ \overline{A}^T\cdot\overline{C}^T, \left(\overline{A}^T\right)^2\overline{C}^T, \dots, \left(\overline{A}^T\right)^{n-1}\overline{C}^T\right]^{*} = \left[E1^T_{pn},\ E2^T_{pn},\ E3^T_{pn}, \dots,\ En^T_{pn}\right]. \tag{9}$$

Для обратимых систем структурная управляемость может быть определена по матрице $\overline{P}$ в соответствии с (8), а структурная восстанавливаемость – по матрице (9).

Таким образом, вычислив матрицы EN, $N = \overline{1, n}$ и сформировав по ним матрицы структурных УНДВ согласно (8), (9), можно в дальнейшем по ним проверить, выполняются ли у исследуемого объекта ранговые условия структурных УНДВ. Для этого необходимо вычислить структурные ранги матриц соответственно (8), (9). По этим же матрицам могут быть определены и индексы структурных управляемости, достижимости, наблюдаемости и восстанавливаемости.

Выводы

Определение структурных инвариантов (индексов) каузальности, управляемости, достижимости, наблюдаемости и восстанавливаемости обратимых линейных динамических систем, описываемых моделью (3), может быть сведено к формированию для этих систем матриц смежности (5), а затем по ним – матриц достижимости (4), структурных управляемости и наблюдаемости (соответственно, (8) и (9)) и рангов последних. Этим самым обеспечивается единообразие определения указанных инвариантов и сокращение необходимых для этого вычислительных процедур.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lee H.G., Aropostathis A., Markus S.I. Linearisation of discrete-time systems // International Journal of Control. – 1987. – V. 45. – № 5. – P. 1803–1822.
2. Стрейц В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем. – М.: Наука, 1985. – 296 с.
3. Малышенко А.М. Определение индексов каузальности управляемых динамических систем // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1990. – Т. 36. – № 1.– С. 32–36.
4. Малышенко А.М. Системы автоматического управления с избыточной размерностью вектора управления. – Томск: Изд-во ТПУ, 2005. – 302 с.
5. Lin C. T. Structural controllability // IEEE Transactions Automatic Control. – 1974. – V. AC-19. – № 3. – P. 201–208.
6. Shields R.W., Pearson J.B. Structural controllability of multi-input linear systems // IEEE Transactions Automatic Control. – 1976. – V. AC-21. – № 2. – P. 203–212.

Поступила 08.11.2011