

УДК 658.512.2.012.122

## КВАДРАТИЧНЫЕ ИНВОЛУЦИИ ПЛОСКОСТИ КАК БАЗОВЫЙ МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ КРИВЫХ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО КОНСТРУИРОВАНИЯ

И.Ф. Боровиков, Е.Г. Фисоченко

Юргинский технологический институт ТПУ

E-mail: bif1986@mail.ru

*Предлагается способ задания нецентральных квадратичных инволюций плоскости, основанный на использовании пучков окружностей, выводятся операторы преобразования, приводятся примеры рациональных циркулярных кривых, конструируемых с использованием данного способа.*

Конструирование технических кривых (всевозможные аэро- и гидродинамические профили, оси трубопроводов, шпангоуты, линии-параметроносители) сводится к построению кривых, сопрягающих точки заданного дискретного массива с выполнением некоторого набора краевых условий (фиксированные касательные, круги кривизны и т. д.). В свою очередь, технические поверхности (различные зализы, воздухозаборники, лонжероны, лопатки турбин) можно трактовать как поверхности, сопрягающие по определенному порядку гладкости исходные кривые. В настоящее время технические кривые в большинстве случаев представляются в виде составных обводов определенного порядка гладкости. Несмотря на то, что при этом используется большая номенклатура функций (показательные, степенные, логарифмические и др.), составляющие обводов зачастую выбираются без необходимого геометрического обоснования. В результате этого обвод не отвечает своему функциональному назначению, а число составляющих является завышенным. Кроме того, в различных расчетах важно иметь кривые, которые описываются одним уравнением. Поэтому поиск базового метода получения кривых в системах автоматизированного конструирования, который был бы достаточно универсальным и простым, остается актуальным.

При конструировании кривых целесообразно использовать нелинейные преобразования [1, 2]. Причем желательно, чтобы аппарат преобразования включал в себя простые геометрические образы, например, прямые и окружности. В этом плане интерес могут представлять предлагаемые квадратичные преобразования, для задания которых используются пучки окружностей.

Пусть на плоскости задан эллиптический пучок окружностей двумя базисными точками  $F_1(0, a)$ ,  $F_2(0, -a)$  (рис. 1). Тогда произвольная точка  $A(x_A, y_A)$  выделяет из пучка единственную окружность  $k$ , уравнение которой имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ a^2 & 0 & a & 1 \\ a^2 & 0 & -a & 1 \\ x_A^2 + y_A^2 & x_A & y_A & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

После преобразования получаем:

$$\left( x + \frac{a^2 - x_A^2 - y_A^2}{2x_A} \right)^2 + y^2 = a^2 + \frac{(a^2 - x_A^2 - y_A^2)^2}{4x_A^2}.$$

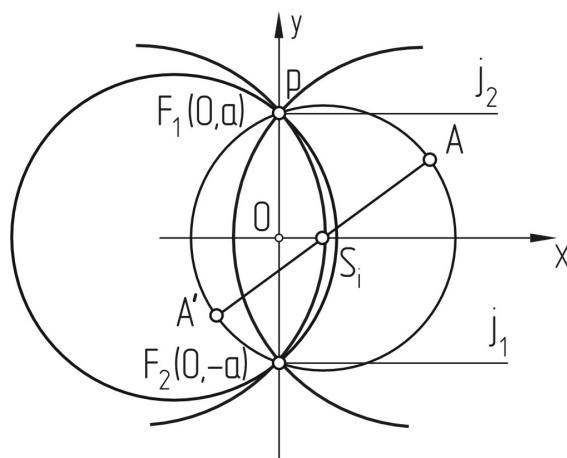


Рис. 1. Задание инволюции с помощью эллиптического пучка окружностей

Центром окружности является точка

$$S_i \left( \frac{x_A^2 + y_A^2 - a^2}{2x_A}, 0 \right),$$

ее радиус определяется выражением

$$R_i = \sqrt{a^2 + \frac{(a^2 - x_A^2 - y_A^2)^2}{4x_A^2}}.$$

Диаметрально противоположную точку  $A'(x'_A, y'_A)$  будем считать соответственной точке  $A$ . Таким образом, на плоскости индуцируется нелинейное преобразование, расщепляющееся в пучке окружностей на центральные симметрии. Нетрудно показать, что координаты точки  $A'$  определяются выражениями:

$$x'_A = \frac{y_A^2 - a^2}{x_A}, \quad y'_A = -y_A.$$

Так как в качестве точки-прообраза  $A$  может быть выбрана любая точка плоскости, то индексы в последних выражениях можно опустить. В результате этого получаем операторы прямого преобразования:

$$x' = \frac{y^2 - a^2}{x}, \quad y' = -y.$$

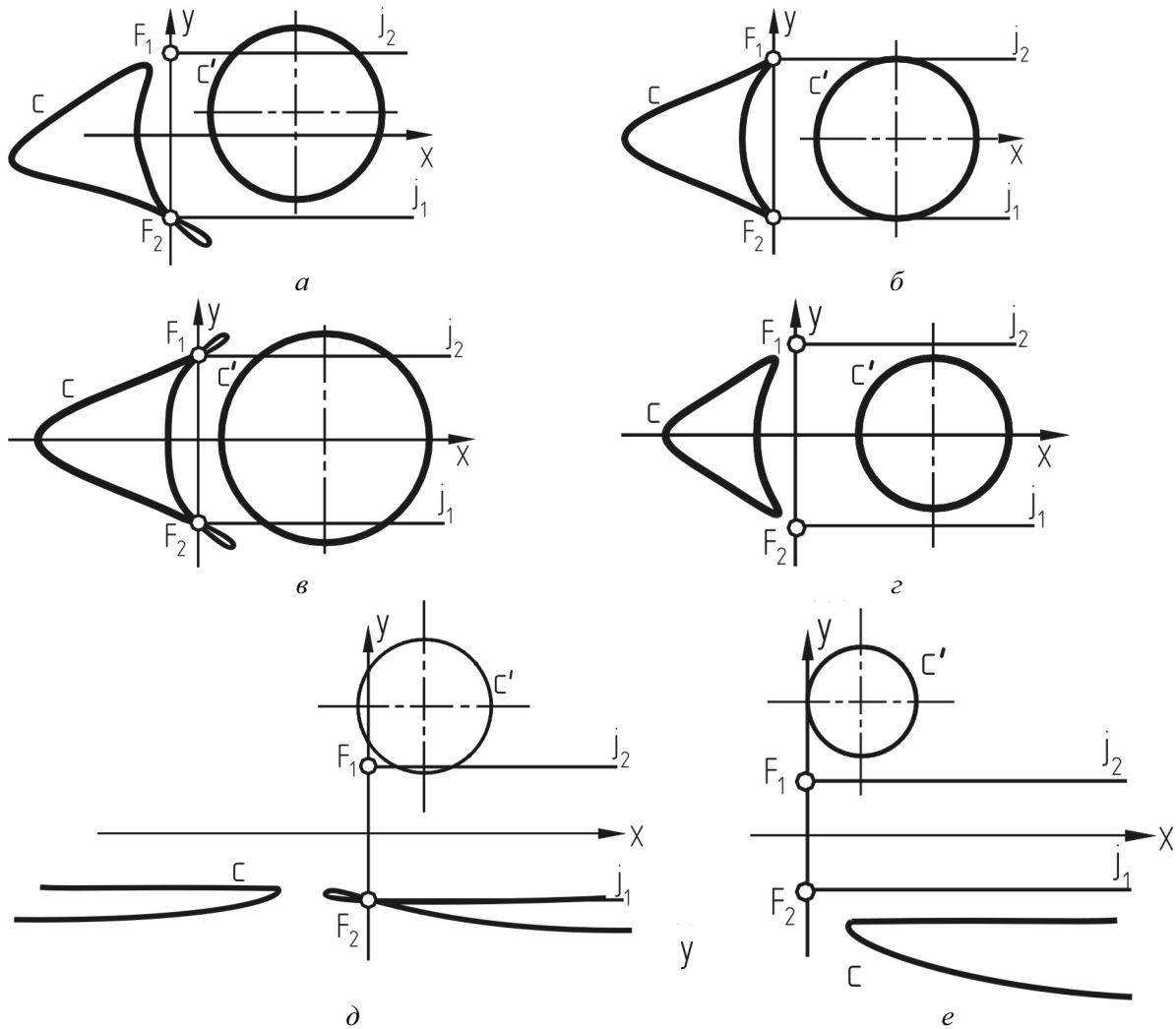


Рис. 2. Различные формы кривых для эллиптического пучка окружностей

Операторы обратного преобразования имеют симметричный вид.

Образом прямой  $m'$ , описываемой уравнением  $Ax'+Bx'+1=0$ , будет являться кривая второго порядка  $m$ , уравнение которой имеет вид:  $Ay^2 - Bxy + x - Aa = 0$ . Таким образом, получаем квадратичную инволюцию с пучком слабоинвариантных окружностей. Точки  $F_1, F_2$  являются простыми  $F$ -точками. Им соответствуют  $p$ -прямые, уравнения которых имеют вид:  $y=a, y=-a$ . Предельной прямой является ось  $Oy$ . Уже на стадии задания прообраза можно иметь представление о форме конструируемой кривой. Так, например, кратность точек кривой в фундаментальных  $F$ -точках определяется количеством точек пересечения прообраза с  $p$ -прямыми, наличие несобственных точек – расположением прообраза относительно предельной прямой. Если в качестве прообраза взять окружность, то ее образом будет являться кривая четвертого порядка, уравнение которой имеет вид:

$$y^4 + y^2x^2 - 2x_0xy^2 + 2y_0yx^2 - 2a^2y^2 + y_0^2x^2 - R^2x^2 + x_0^2x^2 + 2a^2x_0x + a^4 = 0,$$

где  $x_0, y_0$  – координаты центра окружности,  $R_0$  – радиус окружности.

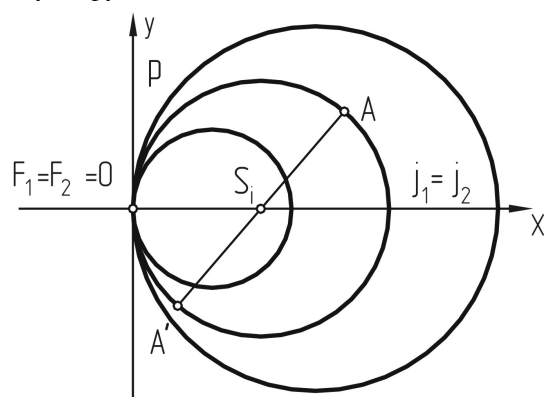


Рис. 3. Задание инволюции с помощью параболического пучка окружностей

В однородной форме его можно представить следующим образом:

$$x_2^4 + x_1^2x_2^2 - 2x_0x_1x_2^2x_3 + 2y_0x_2x_1^2x_3 - 2a^2x_2^2x_3^2 + y_0^2x_1^2x_3^2 - R^2x_1^2x_3^2 + x_0^2x_1^2x_3^2 + 2a^2x_0x_1x_3^3 + a^4x_3^4 = 0.$$

Координаты циклических точек  $I_1(1, i, 0)$ ,  $I_2(1, -i, 0)$  удовлетворяют этому уравнению, следовательно, полученная кривая является циркулярной кривой. Причем форма кривой зависит от положения образа относительно фундаментальных точек, принципиальных кривых и предельной прямой (рис. 2).

В случае параболического пучка окружностей, когда  $a=0$  (рис. 3), операторы преобразования имеют вид:

$$x' = \frac{y^2}{x}, \quad y' = -y.$$

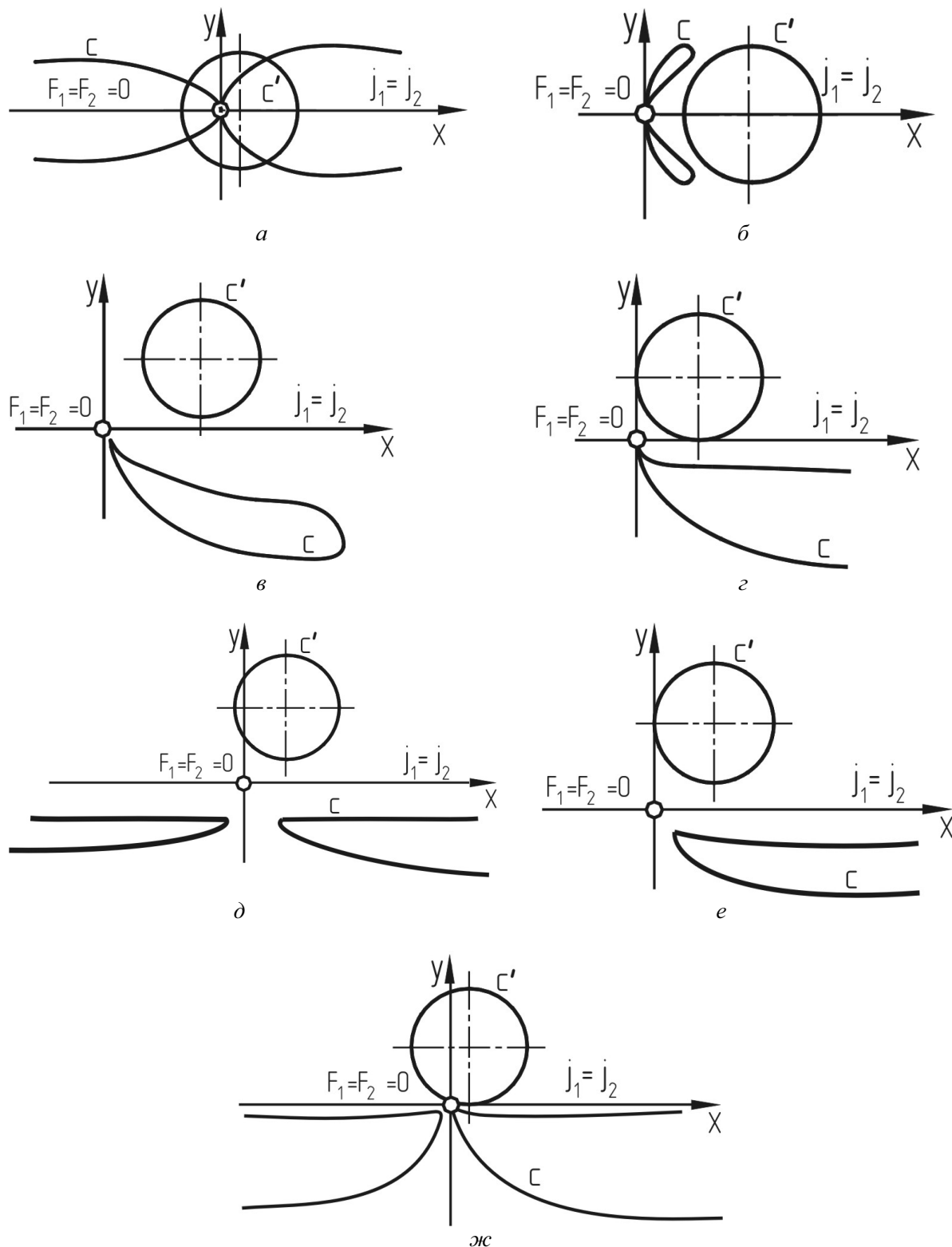


Рис. 4. Различные формы кривых для параболического пучка окружностей

Все гомолоиды в этом случае в точке  $F_1 \equiv F_2 = 0$  касаются оси  $Oy$ . Обе принципиальные  $p$ -прямые совпадают с осью  $Ox$ . Образами окружностей, имеющих уравнение  $(x'-x_0)^2 + (y'-y_0)^2 = R^2$ , являются кривые четвертого порядка. Они описываются уравнением:

$$y^4 + y^2x^2 - 2x_0xy^2 + 2y_0yx^2 + y_0^2x^2 - R^2x^2 + x_0^2x^2 = 0$$

или в однородной форме:

$$x_2^4 + x_1^2x_2^2 - 2x_0x_1x_2^2x_3 + 2y_0x_2x_1^2x_3 + y_0^2x_1^2x_3^2 - R^2x_1^2x_3^2 + x_0^2x_1^2x_3^2 = 0.$$

Возможные формы кривых в зависимости от положения окружности-прообраза относительно элементов фундаментальной и принципиальной систем, а также оси  $Oy$ , являющейся предельной прямой, представлены на рис. 4.

Рассмотрим преобразования, индуцированные гиперболическим пучком окружностей (рис. 5).

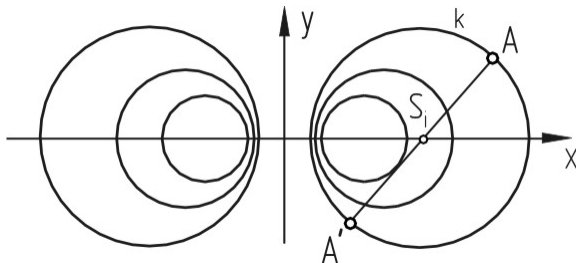


Рис. 5. Задание инволюции с помощью гиперболического пучка окружностей

Такой пучок удобно задать нулевой окружностью  $N(m,0)$  и радикальной осью, в качестве которой принимаем ось  $Oy$ . Решая систему уравнений

$$\begin{cases} (x-m)^2 + y^2 = 0, \\ x = 0 \end{cases},$$

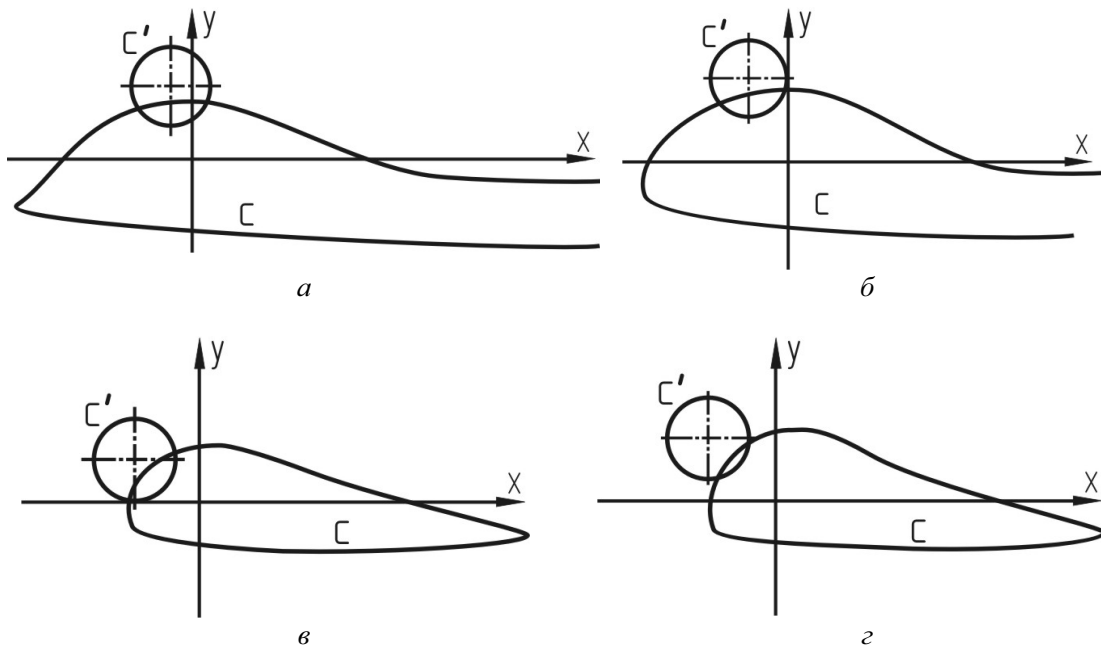


Рис. 6. Различные формы кривых для параболического пучка окружностей

получаем координаты мнимых базисных точек  $U(0,mi)$ ,  $V(0,-mi)$ . Точка  $A(x_A, y_A)$  выделяет из пучка окружность  $k$ , описываемую уравнением:

$$\left(x - \frac{x_A^2 + y_A^2 + m^2}{2x_A}\right)^2 + y^2 = \frac{(x_A^2 + y_A^2 + m^2)^2}{4x_A^2} - m^2.$$

Точку  $A'(x'_A, y'_A)$ , диаметрально противоположную точке  $A$ , будем считать образом точки  $A$  в нелинейной инволюции, индуцируемой на плоскости. Используя операторы преобразования для эллиптического пучка при  $a=mi$ , получаем операторы преобразования для рассматриваемого случая:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{y^2 + m^2}{x}, \\ y' &= -y. \end{aligned}$$

Прообразом окружности с уравнением  $(x'-x_0)^2 + (y'-y_0)^2 = R^2$  является кривая четвертого порядка:

$$y^4 + y^2x^2 - 2x_0xy^2 + 2y_0yx^2 + 2m^2y^2 + (y_0^2 - R^2 + x_0^2)x^2 + 2m^2x_0x - m^4 = 0.$$

В однородном виде уравнение имеет вид:

$$x_2^4 + x_1^2x_2^2 - 2x_0x_1x_2^2x_3 + 2y_0x_2x_1^2x_3 + 2m^2x_2^2x_3^2 + (y_0^2x_3^2 - R^2x_3^2 + x_0^2x_3^2)x_1^2 + 2m^2x_0x_1x_3^2 - m^4x_3^4 = 0.$$

Это рациональная циркулярная кривая, различные формы которой представлены на рис. 6.

Предлагаемый способ позволяет конструировать кривые в широком диапазоне изменения форм и параметров. Уже на стадии задания прообраза можно иметь представление о форме конструируемой кривой. Так, например, кратность точек кривой в фундаментальных  $F$ -точках определяется количеством точек пересечения прообраза с  $p$ -пря-

мыми, наличие несобственных точек – расположением прообраза относительно предельной прямой. Для того, чтобы конструируемая кривая была замкнутой, необходимо, чтобы окружность-прообраз не пересекала предельную прямую.

Для использования данного способа в практике реального конструирования на алгоритмическом языке Турбо Паскаль разработана программа, которая позволяет строить кривые, отвечающие наперед заданным требованиям.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов Г.С. Конструирование технических поверхностей (математическое моделирование на основе нелинейных преобразований). – М.: Машиностроение, 1987. – 192 с.
2. Sturm R. Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. – Leipzig und Berlin: Druck und Verlag von B.G. Teubner, 1908. – Bd. 4. – 484 S.

Поступила 02.06.2006 г.

УДК 629.11.012(075.8)

### ОБОСНОВАНИЕ ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТИ ОСНАЩЕНИЯ КАРЕТОК ТРАКТОРА ДТ-75М РЕКУПЕРАТИВНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В.И. Посметьев, Е.А.Тарасов, Е.В. Снятков, М.А. Латышева

Воронежская государственная лесотехническая академия  
E-mail: bertolt@mail.ru

*С помощью имитационной динамической модели лесного почвообрабатывающего агрегата изучена возможность оснащения кареток трактора ДТ-75М рекуперативными элементами. При этом отбор энергии в каждой каретке до 0,7 кВт не ухудшает спектры колебаний корпуса трактора.*

Снижение потерь энергии на преодоление инерционных и сил тяжести при вертикальных и горизонтальных перемещениях лесных почвообрабатывающих агрегатов – одно из перспективных и актуальных направлений повышения их эффективности. Наиболее целесообразным способом снижения указанных потерь является рекуперация (возвращение) в энергетическую установку машины той части потенциальной и кинетической энергии, которая бесполезно рассеивается в окружающую среду при непроизводительных холостых перемещениях рабочих органов и машины в целом. В этой связи подвижные элементы ходовой части гусеничного трактора могут быть оснащены рекуперативными элементами [1]. Рекуперативный элемент здесь играет роль демфера и уменьшает горизонтальные и вертикальные колебания корпуса трактора в процессе движения по лесным объектам с большим количеством препятствий и неровностями поверхности.

Для того, чтобы в модели наиболее полно учесть все особенности работы агрегата изучался не изолированный трактор, а агрегат полностью в снаряженном состоянии – вместе с навешенным на него дисковым орудием (рис. 1).

Имитационная модель была построена в соответствии с методикой [2]. В основе математической модели лежит система из 34-х дифференциальных уравнений. Для составления системы уравнений на основе уравнений Лагранжа I рода с неопределенными множителями использован конечноэлементный подход [3]. При этом агрегат рассматривался как совокуп-

ность семи плоских твердых тел, соединенных между собой в некоторых контактных точках связями в виде шарниров, невесомых нерастяжимых тяг и пружин. Для численного интегрирования полученной системы дифференциальных уравнений использовался модифицированный метод Эйлера. Компьютерные эксперименты проводились с помощью специально составленной программы в среде Borland Delphi 7.

Внешние возмущения в системе задавались через силы, действующие со стороны почвы и препятствий на катки кареток, ведущий и направляющий катки и на дисковый рабочий орган. Так как в рамках модели гусеница непосредственно не рассматривается, для генерации возмущающей функции  $q(x)$ , т. е. рельефа поверхности был использован алгоритм позволяющий получить достаточно плавную  $q(x)$ . В частности, функция  $q(x)$  являлась суперпозицией гауссовских пиков с параметрами  $x_i$  (положение препятствия),  $H_i$  (высота препятствия) и  $\sigma_i$  (среднеквадратичное отклонение, задающее ширину препятствия).

Гауссовские пики распределялись по длине контрольного участка случайным образом по равномерному закону. При этом параметры  $H_i$  и  $\sigma_i$  также выбирались случайным образом по равномерному закону из интервалов:  $[0; 0,1 \text{ м}]$  для  $H_i$  и  $[0,05 \text{ м}; 0,15 \text{ м}]$  для  $\sigma_i$ . Представленные в данной работе результаты соответствуют линейной плотности препятствий 1000 шт./км и скорости движения агрегата 2 м/с. При вычислении сил, действующих на тела агрегата со стороны поверхности, была использована общепринятая вязкоупругая модель почвы [4].