ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ ИЛИ ПЛАТОНОВЫ ТЕЛА

Кузнецов М.Т., Озга А.И.
Национальный исследовательский Томский политехнический университет
mtk1@tpu.ru

Правильными многогранниками - выпуклые многогранники, у которых все грани являются равными правильными многоугольниками и в каждой вершине сходится одно и то же количество ребер. У таких многогранников все ребра равны и центры описанной и вписанной сфер совпадают. У каждого правильного многогранника есть еще и срединная сфера: она касается каждого его ребра в середине.

Каждый правильный многогранник является симметричной фигурой. Количество вершин(В), граней (Г) и ребер (Р) любого выпуклого правильного многогранника задается формулой, выведенной Эйлером: (В+Г=Р+2).

Тетра́эдр — простейший многогранник, гранями которого являются четыре треугольника. Октаэдр — один из пяти выпуклых правильных многогранников, так называемых Платоновых тел.

Икосаэдр — правильный выпуклый многогранник, двадцатигранник. Каждая из 20-ти граней представляет собой равносторонний треугольник. Икосаэдр имеет 59 звёздчатых форм.

Куб или правильный гексаэдр — правильный многогранник, каждая грань которого представляет собой квадрат.

Додека́эдр — один из пяти возможных правильных многогранников. Додекаэдр составлен из двенадцати правильных пятиугольников, являющихся его гранями.

Правильные многогранники глубоко интересовали древних греков (хотя они были уже известны в период неолита; это примерно 9500 лет до н.э.) Тетраэдр, куб и додекаэдр были известны на тот момент Пифагору, а октаэдр и икосаэдр «появились» как объекты для изучения во времена Платона. Древнегреческий математик Теэтет Афинский (современник Платона) доказал, что существует пять, и только пять, правильных многогранников (Начала, Книга XIII).

Платон подошёл к изучению правильных многогранников не только с геометрической точки зрения, но и философски (поэтому правильные многогранники называют еще и Платоновы тела).

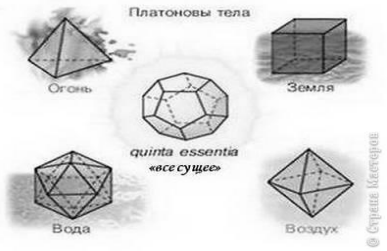


Рис . 1

Каждую из четырех стихий(землю, воздух, воду, огонь) он ассоциировал с правильным многогранником .

В соответствии с философскими воззрениями Платона Земля сопоставлялась кубу, воздух- октаэдру, вода- икосаэдру, а огонь – тетраэдру. Додекаэдр был для Платона аналогом Вселенной и воспринимался в качестве идеала-образца.

Полное математическое описание правильных многогранников или Платоновых тел сделал Евклид.

У тетраэдера параллельные плоскости, проходящие через пары скрещивающихся рёбер тетраэдра, определяют описанный около тетраэдра параллелепипед. Плоскость, проходящая через середины двух скрещивающихся рёбер тетраэдра, делит его на две равные по объёму части.

Октаэдр можно вписать в тетраэдр, притом четыре из восьми граней октаэдра будут совмещены с четырьмя гранями тетраэдра, все шесть вершин октаэдра будут совмещены с центрами шести ребер тетраэдра.

Октаэдр можно вписать в куб, притом все шесть вершин октаэдра будут совмещены с центрами шести граней куба.

В октаэдр можно вписать куб, притом все восемь вершин куба будут расположены в центрах восьми граней октаэдра.

Правильный октаэдр имеет симметрию, совпадающую с симметрией куба. Все двенадцать вершин икосаэдра лежат по три в четырёх параллельных плоскостях, образуя в каждой из них правильный треугольник.

Десять вершин икосаэдра лежат в двух параллельных плоскостях, образуя в них два правильных пятиугольника, а остальные две — противоположны друг другу и лежат на двух концах диаметра описанной сферы, перпендикулярного этим плоскостям.

Икосаэдр можно вписать в куб, при этом шесть взаимно перпендикулярных рёбер икосаэдра будут расположены соответственно на шести гранях куба, остальные 24 ребра внутри куба, все двенадцать вершин икосаэдра будут лежать на шести гранях куба

В икосаэдр может быть вписан тетраэдр, так что четыре вершины тетраэдра будут совмещены с четырьмя вершинами икосаэдра.

Икосаэдр можно вписать в додекаэдр, при этом вершины икосаэдра будут совмещены с центрами граней додекаэдра.

В икосаэдр можно вписать додекаэдр с совмещением вершин додекаэдра и центров граней икосаэдра.

Усечённый икосаэдр может быть получен срезанием 12 вершин с образованием граней в виде правильных пятиугольников. При этом число вершин нового многогранника увеличивается в 5 раз (12×5=60), 20 треугольных граней превращаются в правильные шестиугольники (всего граней становится 20+12=32), а число рёбер возрастает до 30+12×5=90.

Собрать модель икосаэдра можно при помощи 20 тетраэдров.

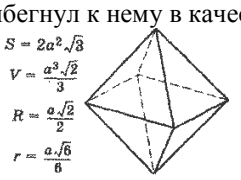
Невозможно собрать икосаэдр из правильных тетраэдров, так как радиус описанной сферы вокруг икосаэдра, соответственно и длина бокового ребра (от вершины до центра такой сборки) тетраэдра меньше ребра самого икосаэдра.

Куб. Четыре сечения куба являются правильными шестиугольниками — эти сечения проходят через центр куба перпендикулярно четырём его главным диагоналям. В куб можно вписать тетраэдр двумя способами. В обоих случаях четыре вершины тетраэдра будут совмещены с четырьмя вершинами куба и все шесть рёбер тетраэдра будут принадлежать граням куба. В первом случае все вершины тетраэдра принадлежат граням трехгранного угла, вершина которого совпадает с одной из вершин куба. Во втором случае попарно скрещивающиеся ребра тетраэдра принадлежат попарно противолежащим граням куба. Такой тетраэдр является правильным, а его объём составляет 1/3 от объёма куба. В куб можно вписать октаэдр, притом все шесть вершин октаэдра будут совмещены с центрами шести граней куба.

Куб можно вписать в октаэдр, притом все восемь вершин куба будут расположены в центрах восьми граней октаэдра.

В куб можно вписать икосаэдр, при этом шесть взаимно параллельных рёбер икосаэдра будут расположены соответственно на шести гранях куба, остальные 24 ребра — внутри куба. Все двенадцать вершин икосаэдра будут лежать на шести гранях куба.

Додекаэдр рассматривали в своих сочинениях древнегреческие учёные. Платон сопоставлял с правильными многогранниками различные классические стихии. О додекаэдре Платон писал, что «…его бог определил для Вселенной и прибегнул к нему в качестве образца.



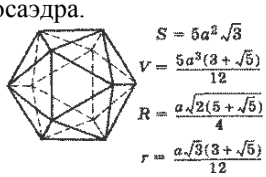
Все двадцать вершин додекаэдра лежат по пять в четырёх параллельных плоскостях, образуя в каждой из них правильный пятиугольник.

В додекаэдр можно вписать куб так, что стороны куба будут диагоналями додекаэдра.

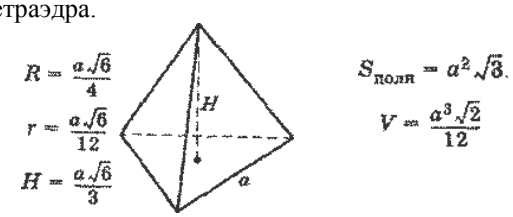
Додекаэдр имеет три звёздчатые формы.

Чертеж и формула октаэдра. Расчетные формулы октаэдра.

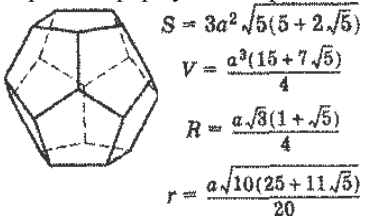
Чертеж и формулы для ИКОСАЭДРА. Расчетные формулы правильного многогранника - икосаэдра.



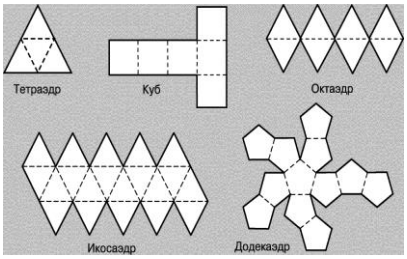
Чертеж и формулы расчета правильного тетраэдра.



Чертеж и формулы для расчета додекаэдра.



Развертки многогранников:



Литература:

1. Селиванов Д. Ф., Тело геометрическое //Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона: В 86 томах (82 т. и 4 доп.). — СПб., 1890—1907.

2. Герман Вейль. «Симметрия». Перевод с английского Б.В. Бирюкова и Ю.А. Данилова под редакцией Б.А. Розенфельда. Издательство «Наука». Москва. 1968. стр. 101

3. Смирнов Е. Ю. Группы Кокстера и правильные многогранники//Летняя школа «Современная математика». — Дубна, 2008.

4. Венниджер Магнус. Модели многогранников. — Москва: Мир, 1974. — 236 с.

5. Гончар В. В. Модели многогранников. — Москва: Аким, 1997. — 64 с. — ISBN 5-85399-032-2.