УДК 541.127

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЛИПСОВ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРИ ДВУХ ИЗМЕРЕНИЯХ ОБОБЩЕННЫМ МЕТОДОМ ЦЕНТРА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В.М. Белов, С.А. Гончаров, Е.В. Рябова, В.В. Евстигнеев

Алтайский государственный технический университет им И.И. Ползунова, г. Барнаул
E-mail: sim_64@mail.ru

Рассмотрено определение параметров эмпирической зависимости при двух измерениях с использованием алгоритма эллипса неопределенности в обобщенном методе центра неопределенности. Предложен алгоритм оптимального определения параметров.

Для установления закономерностей каких-либо явлений проводят экспериментальные исследования, в ходе которых измеряют значение тех или иных физико-химических величин. При обработке физического эксперимента часто используют эмпирические модели или формулы, которые включают экспериментально неточно измеренные величины, как правило, неточность учитывают в выходных переменных. Случай, когда выходные и входные переменные модели измеряют интервально, особенно в плане разработки конкретных методик анализа данных физического эксперимента, в литературе отражен недостаточно и является актуальным. Постановка и исследование разрешимости задачи погружения множества неопределенности параметров двумерной линейной параметрической модели при точном измерении входных переменных и неточном измерении выходных переменных подробно были рассмотрены в работах [1–4].

Алгоритм погружения множества неопределенности параметров двумерной линейной зависимости в эллипс неопределенности при интервальном задании входных и выходных переменных был рассмотрен в [5–8], где при определении параметров эллипса неопределенности обобщенным методом центра неопределенности были допущены неточности, которые повлияли на результат работы алгоритма.

Рассмотрим алгоритм [5–8] подробнее. При двух измерениях экспериментальные точки должны удовлетворять системе интервальных уравнений

$$[y]_1=[a]+[b][x]_1,$$
$$[y]_2=[a]+[b][x]_2.$$

Область возможного измерения параметров линейной функции имеет вид неправильного четырехугольника, угловые точки которого можно определить, используя правила интервальной арифметики. В случае возрастающей функции $[y]=[a]+[b][x]$, т. е. при $x_1^+<x_2^- \Rightarrow y_1^+<y_2^-$, угловые точки четырехугольника неопределенности определяем как

$$A_1=(a_1,\ b_1)=\left(\frac{y_1^- x_2^- - y_2^+ x_1^+}{x_2^- - x_1^+};\ \frac{y_2^+ - y_1^-}{x_2^- - x_1^+}\right);$$

$$A_2=(a_2,\ b_2)=\left(\frac{y_1^- x_2^+ - y_2^- x_1^+}{x_2^+ - x_1^+};\ \frac{y_2^- - y_1^-}{x_2^+ - x_1^+}\right);$$

$$A_3=(a_3,\ b_3)=\left(\frac{y_1^+ x_2^- - y_2^+ x_1^-}{x_2^- - x_1^-};\ \frac{y_2^+ - y_1^+}{x_2^- - x_1^-}\right);$$

$$A_4=(a_4,\ b_4)=\left(\frac{y_1^+ x_2^+ - y_2^- x_1^-}{x_2^+ - x_1^-};\ \frac{y_2^- - y_1^+}{x_2^+ - x_1^-}\right). \qquad (1)$$

В случае, если функция вида $y=[a]+[b][x]$ является убывающей, т. е. при $x_1^+<x_2^- \Rightarrow y_1^+>y_2^-$, то угловые точки четырехугольника неопределенности определяем из соотношений

$$A_1=(a_1,\ b_1)=\left(\frac{y_1^- x_2^- - y_2^- x_1^-}{x_2^- - x_1^-};\ \frac{y_2^- - y_1^-}{x_2^- - x_1^-}\right),$$

$$A_2=(a_2,\ b_2)=\left(\frac{y_1^- x_2^+ - y_2^+ x_1^-}{x_2^+ - x_1^-};\ \frac{y_2^+ - y_1^-}{x_2^+ - x_1^-}\right),$$

$$A_3=(a_3,\ b_3)=\left(\frac{y_1^+ x_2^+ - y_2^+ x_1^+}{x_2^+ - x_1^+};\ \frac{y_2^+ - y_1^+}{x_2^+ - x_1^+}\right),$$

$$A_4=(a_4,\ b_4)=\left(\frac{y_1^+ x_2^- - y_2^- x_1^+}{x_2^- - x_1^+};\ \frac{y_2^- - y_1^+}{x_2^- - x_1^+}\right). \qquad (2)$$

Для определения центра тяжести четырехугольника неопределенности используем метод наименьших квадратов. Тогда, для нахождения координат центра тяжести, получаем соотношение

$$\bar{a}_0=\frac{\bar{x}_2\bar{y}_1-\bar{x}_1\bar{y}_2}{\bar{x}_2-\bar{x}_1};\ \bar{b}_0=\frac{\bar{y}_2-\bar{y}_1}{\bar{x}_2-\bar{x}_1},$$

где $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ – средние значения измеряемых входных и выходных переменных соответственно.

Центр тяжести исходного четырехугольника неопределенности можно определять и другими способами. Любая комбинация из трех угловых точек, определяемых соотношениями (1) и (2), образует треугольник неопределенности. Таких треугольников будет четыре: $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_2A_3A_4$. Известно, что центр тяжести любого треугольника находится на пересечении его медиан. Таким образом, для координат центров тяжести треугольников, имеем соотношение

$$B_1=\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3};\ \frac{b_1+b_2+b_3}{3}\right);$$

$$B_2=\left(\frac{a_1+a_2+a_4}{3};\ \frac{b_1+b_2+b_4}{3}\right);$$

$$B_3=\left(\frac{a_1+a_3+a_4}{3};\ \frac{b_1+b_3+b_4}{3}\right);$$

$$B_4=\left(\frac{a_2+a_3+a_4}{3};\ \frac{b_2+b_3+b_4}{3}\right).$$

В итоге получаем четыре точки B_1, B_2, B_3, B_4, которые определяют новый четырехугольник неопределенности. Полагаем $A_1=B_1$, $A_2=B_2$, $A_3=B_3$, $A_4=B_4$. Далее процедуру определения центров тяжести новых четырехугольников неопределенности повторяем до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность определения центра тяжести исходного четырехугольника неопределенности.

Обозначим центр тяжести четырехугольника через a_0, b_0. При погружении множества неопределенности параметров линейной параметрической функции в эллипс неопределенности считаем, что центр тяжести исходного четырехугольника неопределенности совпадает с центром описанного вокруг него эллипса неопределенности. Далее угловые точки четырехугольника неопределенности располагаем в порядке возрастания параметра b, т. е. $b_1<b_2<b_3<b_4$.

Отрезок A_3A_4 является хордой эллипса неопределенности. Тогда параметры прямой A_3A_4

$$k_{34}=\frac{a_4-a_3}{b_4-b_3};\ \alpha_{34}=\frac{a_3b_4-a_4b_3}{b_4-b_3}.$$

Проводим прямую $A_1^*A_2^*$, параллельную A_3A_4. Для этого определяем координаты середины отрезка A_3A_4:

$$a_{34}=\frac{a_3+a_4}{2};\ b_{34}=\frac{b_3+b_4}{2}.$$

Параметры прямой $a=kb+\alpha$, проходящей через середину отрезка A_3A_4 и центр эллипса, находим как

$$k=\frac{a_0-a_{34}}{b_0-b_{34}};\ \alpha=\frac{\alpha_{34}b_0-a_0b_{34}}{b_0-b_{34}}. \qquad (3)$$

Далее определяем расстояние от середины хорды A_3A_4 до центра эллипса неопределенности

$$l=\sqrt{a_{01}^2+b_{01}^2}.$$

где $a_{01}=a_0-a_{34}$; $b_{01}=b_0-b_{34}$.

Хорда эллипса $A_1^*A_2^*$ параллельна хорде A_3A_4 и симметрична ей относительно центра эллипса [5–8]. Середина хорды $A_1^*A_2^*$ лежит на прямой с параметрами (3), ее координаты определяем соотношениями:

$$a_{12}=a_0+a_{01};\ b_{12}=b_0+b_{01}.$$

Так как хорды $A_1^*A_2^*$ и A_3A_4 симметричны относительно центра эллипса, то для определения координат точек A_1^* и A_2^* вычисляем вспомогательные величины

$$\Delta a_{34}=\Delta a_{12}=a_4-a_{34}=\frac{a_4-a_3}{2},$$

$$\Delta b_{34}=\Delta b_{12}=b_4-b_{34}=\frac{b_4-b_3}{2}.$$

Тогда, координаты точки A_1^* рассчитываем как

$$a_1^*=a_{12}-\Delta a_{12};\ b_1^*=b_{12}-\Delta b_{12},$$

а координаты точки A_2^*

$$a_2^*=a_{12}+\Delta a_{12};\ b_2^*=b_{12}+\Delta b_{12}.$$

Таким образом, параллелограмм $A_1^*A_2^*A_3A_4$ описывает четырехугольник неопределенности параметров a, b. Центр тяжести параллелограмма $A_1^*A_2^*A_3A_4$ совпадает с центром содержащего его эллипса.

Эллипс неопределенности, описанный около параллелограмма $A_1^*A_2^*A_3A_4$, находим в виде

$$F(a-a_0)^2+2D(a-a_0)(b-b_0)+Q(b-b_0)^2=1,$$

где a_0, b_0 – координаты центра эллипса неопределенности параметров.

Для определения параметров эллипса неопределенности составляем систему уравнений

$$\begin{aligned}&F\Delta a_1^2+2D\Delta a_1\Delta b_1+Q\Delta b_1^2=1,\\ &F\Delta a_2^2+2D\Delta a_2\Delta b_2+Q\Delta b_2^2=1,\end{aligned} \qquad (4)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\Delta a_1=\frac{a_1^*-a_4}{2};\ \Delta a_2=\frac{a_2^*-a_3}{2};$$

$$\Delta b_1=\frac{b_4-b_1^*}{2};\ \Delta b_2=\frac{b_3-b_2^*}{2}.$$

Переписываем систему (4) в виде

$$\begin{aligned}&F\Delta a_1^2+Q\Delta b_1^2=1-2D\Delta a_1\Delta b_1,\\ &F\Delta a_2^2+Q\Delta b_2^2=1-2D\Delta a_2\Delta b_2.\end{aligned} \qquad (5)$$

В работах [5–8] были неточно определены параметры Q и F. Решим систему (5) относительно Q и F:

$$Q=Q_0+Q_1D;\ F=F_0+F_1D, \qquad (6)$$

где

$$Q_0=\frac{\Delta a_2^2-\Delta a_1^2}{\Delta a_2^2\Delta b_1^2-\Delta a_1^2\Delta b_2^2};\ Q_1=\frac{-2\Delta a_1\Delta a_2}{\Delta a_2\Delta b_1+\Delta a_1\Delta b_2};$$

$$F_0=\frac{\Delta b_2^2-\Delta b_1^2}{\Delta a_1^2\Delta b_2^2-\Delta a_2^2\Delta b_1^2};\ F_1=\frac{-2\Delta b_1\Delta b_2}{\Delta a_1\Delta b_2+\Delta a_2\Delta b_1}.$$

Площадь эллипса неопределенности с параметрами F, Q, D вычисляем как

$$v=\frac{\pi}{\sqrt{FQ-D^2}}. \qquad (6)$$

Для определения эллипса минимальной площади находим максимум функции f_D

$$f_D(F,Q,D)=FQ-D^2. \qquad (7)$$

С учетом (6), выражение (7) можно представить в виде

$$f_D(F,Q,D)=F_0Q_0+(F_0Q_1+F_1Q_0)D+D^2(F_1Q_1-1).$$

Вычисляем производную $f_D'(F,Q,D)$:

$$f_D'(F,Q,D)=F_0Q_1+F_1Q_0+2D(F_1Q_1-1).$$

Затем

$$f_D'(F,Q,D)=0.$$

Решив это уравнение относительно параметра D, получаем выражение

$$D=\frac{F_0Q_1+F_1Q_0}{2(F_1Q_1-1)}.$$

В этом случае, при использовании полученных соотношений для параметров F, Q, D, площадь эллипса неопределенности, будет минимальной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белов В.М., Суханов В.А., Унгер Ф.Г. Теоретические и прикладные аспекты метода центра неопределенности. – Новосибирск: Наука, 1995. – 144 с.
2. Белов В.М., Унгер Ф.Г., Карбаинов Ю.А., Пролубников В.И., Тубалов Н.П. Оценивание параметров эмпирических зависимостей методом центра неопределенности. – Новосибирск: Наука, 2001. – 175 с.
3. Белов В.М., Суханов В.А., Унгер Ф.Г. Аппроксимация эллипсом множества неопределенности параметров зависимостей, сводящихся к линейным. – Томск, 1990. – 28 с. Препринт ТНЦ СО АН СССР; № 45.
4. Белов В.М. Оценивание параметров линейных химико-аналитических и физико-химических зависимостей методом центра неопределенности: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Томск, 1992. – 166 с.
5. Белов В.М., Гончаров С.А., Гончарова Н.Л. Рекуррентный алгоритм оценивания параметров линейной двухпараметрической функции // Физико-химические процессы в неорганических материалах: 8-я Междунар. конф. – Т. 2. – Кемерово, 2001. – С. 134–135.
6. Гончаров С.А. Обобщенный метод центра неопределенности для оценивания параметров линейных экспериментальных физических зависимостей. Дис. ... канд. тех. наук. – Барнаул, 2003. – 160 с.
7. Гончаров С.А., Белов В.М., Гончарова Н.Л. Оценка области неопределенности параметров линейных функций эллипсом неопределенности // Валихановские чтения – 7: Междунар. науч.-практ. конф. – Т. 7. – Кокшетау, 2002. – С. 3–5.
8. Гончаров С.А., Дудник Е.А, Шарапов С.В. Оценка параметров линейной функции эллипсом неопределенности // IV Науч.-техн. конф. студентов и аспирантов. – Рубцовск, 2002. – С. 5–9.

Поступила 14.11.2006 г.

УДК 621.0

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО ВРАЩЕНИЯ НЕУРАВНОВЕШЕННОГО РОТОРА С ЖИДКОСТНЫМ АВТОБАЛАНСИРУЮЩИМ УСТРОЙСТВОМ НА ГИБКОМ ВАЛУ

В.А. Дубовик, Е.Н. Пашков

Томский политехнический университет
E-mail: epashkov@rambler.ru

Получено условие устойчивости вращения ротора с жидкостным автобалансирующим устройством, состоящим из камеры, поплавка и несжимаемой однородной жидкости, заполняющей пространство между ними. На ротор действуют восстанавливающая сила, силы внутреннего и внешнего трения. Последние линейно зависят соответственно от скорости деформации и абсолютной скорости точки крепления ротора к валу.

Для устранения дисбаланса вращающихся тел применяют различные жидкостные балансировочные устройства (АБУ) [1]. В процессе эксплуатации таких систем необходимо знать критические угловые скорости, при которых нарушается устойчивость стационарных вращений. В ряде работ, например в [2, 3], получены приближённые условия устойчивости установившегося вращения уравновешенного цилиндра, частично заполненного жидкостью, которые трудно применить к системам с АБУ. Непосредственное исследование устойчивости вращения роторов с жидкостными АБУ в литературе не описано.

В предлагаемой работе, по аналогии с [4] для неуравновешенных дисков на гибком валу, изучается устойчивость вращения ротора с жидкостным АБУ без свободной поверхности при действии сил внешнего и внутреннего трения. Природа этих сил подробно изложена в [4]. Так, силы внешнего трения вызываются вязким сопротивлением внешней среды, опор, специальных демпферов и зависят от скоростей абсолютных перемещений точек ротора и вала; силы внутреннего трения порождаются сопротивлением частиц материала и в первом приближении принимаются пропорциональными скорости деформации вала. Представляет интерес исследовать влияние соотношения рассмотренных сил на устойчивость вращения ротора с АБУ. Решение такой задачи для неуравновешенного диска без АБУ приведено в [4]. Пусть ротор с АБУ закреплён симметрично относительно опор вертикального гибкого вала, проходящего через его геометрический центр O_1 (рисунок).

АБУ состоит из балансировочной камеры – 1 высотой h, поплавка – 2 и однородной несжимаемой жидкости – 3, заполняющей пространство между их стенками. Центр масс ротора (точка P) смещён от O_1 на расстояние $O_1P=e$. Точка O_2 проекция оси опор вала на плоскость движения. При вращении системы вал прогибается в месте крепления ротора на величину O_2O_1, поплавок, для которого геометрическая и материальная оси симметрии совпадают, так же как в поплавковых гироскопах [5] центрируется на оси вращения O_2 за счёт сил давления, а жидкость перетекает в сторону прогиба. Предполагаем, что при возмущённом движении ротора отрыв жидкости от стенок не происходит и центрирование поплавка сохраняется. В этом случае центр масс слоя жидкости расположен на линии центров O_2O_1 в точке G. Сформулированные предположения позволяют исключить из рассмотрения гидродинамическую задачу.