УДК 519.2

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ С УЧЕТОМ РАСХОДОВ НА РЕКЛАМУ В РАМКАХ КЛАССИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

В.М. Кац

Томский политехнический университет
E-mail: katz@tpu.ru

Исследуется работа страховой компании в рамках классической модели страхования с учетом расходов на рекламу. Методология исследования основана на использовании механизма теории управления. По результатам работы даны практические рекомендации по планированию рекламных кампаний.

В настоящее время большой интерес вызывают различные математические модели экономических процессов. Это утверждение справедливо для моделей связанных с проблемами так называемой актуарной математики, предметом изучения которой является страховое дело и работа страховых компаний в частности. С одной стороны существование рисков для жизни, собственности, окружающей среды вызвало бурное развитие страховой индустрии, которая должна обеспечивать финансовое покрытие непредсказуемых потерь своих клиентов. С другой стороны в центре всех выше перечисленных событий лежит неоспоримое присутствие случайности, что влечет за собой широкое применение методов теории вероятности и математической статистики в сфере моделирования процессов страхования. В частности для изучения некоторых общих вопросов функционирования страховых компаний и нахождения таких величин как вероятность разорения компании при известном стартовом капитале, распределения числа клиентов компании, функции корреляции числа клиентов, их математического ожидания и т. д. могут быть применены методы теории систем массового обслуживания.

Существующие решения задач актуарной математики, обычно, посвящены частным вопросам работы компании. Одним из таких вопросов является изучение влияния затрат на рекламу на деятельность страховой компании.

Свободный капитал страховой компании может быть в частности направлен на привлечение новых клиентов (рекламу). Это, с одной стороны, интенсифицирует поступление денежных средств в компанию, а другой стороны увеличивает количество страховых выплат и отвлекает часть средств собственно на рекламу. Поэтому возникает задача исследования влияния расходов на рекламу на характеристики деятельности страховой компании, в частности на ее средний капитал.

Предположим, что в отсутствии расходов на рекламу функционирование страховой компании описывается классической моделью с параметрами λ_0, a, C_0 [1]. Страховые премии поступают непрерывно, так что за время Δt капитал компании увеличивается на величину $C_0\Delta t$, страховые выплаты – независимые случайные величины со средним значением a, моменты страховых возмещений образуют пуассоновский поток интенсивности λ.

Пусть в момент времени t капитал компании равен $S(t)$, и в промежутке времени $[t,t+\Delta t]$ на привлечение новых клиентов расходуется часть капитала $u(t)S(t)\Delta t$, где $0\le u(t)\le u_0\le 1$. При $u_0<<1$ можно считать, что скорость поступления страховых выплат в компанию должна увеличиваться на величину пропорциональную $u(t)S(t)$. Однако, затраты на рекламу, не могут, во-первых, дать эффект ранее, чем через некоторое время τ, а, во-вторых, обладают эффектом последействия, т. е. после прекращения расходов на рекламу, она еще некоторое время продолжает действовать. Поэтому введем функцию $R(t)$, связанную с $S(t)$ соотношением [2, 3]

$$k\frac{dR}{dt} = -R(t) + u(t)S(t).$$

При $k=0$ $R(t)=u(t)S(t)$ последействие рекламы отсутствует. С ростом k отчисления на рекламу в момент времени t сказываются еще какое-то время после момента времени t.

Будем считать, что расходы на рекламу приводят к тому, что скорость потока страховых премий увеличивается с величины C_0 до величины $C_0+C_1R(t-\tau)$. Однако с увеличением числа клиентов компании увеличивается и число страховых случаев. Поэтому интенсивность потока страховых выплат должна увеличиться с величины λ_0 до некоторой величины $\lambda_0+\lambda_1R(t-\tau)$. Если нагрузка страховой премии остается постоянной, то величины C_0, C_1, λ_0, λ_1 связаны соотношением

$$\frac{C_0}{\lambda_0} = \frac{C_1}{\lambda_1}.$$

Откуда процесс изменения среднего капитала компании $\bar{S}(t)$ будет описываться уравнениями

$$\frac{d\bar{S}(t)}{dt} = -u(t)\bar{S}(t) + (C_0 - \lambda_0 a) + (C_1 - \lambda_1 a)R(t-\tau),$$

$$k\frac{dR(t)}{dt} = -R(t) + u(t)\bar{S}(t) \qquad (1)$$

с начальными условиями $S(0)=S_0$ и $R(t)=0$ при $t\in[-\tau,0]$.

Цель страховой компании состоит в том, чтобы, выбирая рекламную стратегию $u(t)$, максимизировать критерий качества

$$I = \int_0^\tau \rho(t)\bar{S}(t)dt,$$

где $\rho(t)$ – не отрицательная, монотонно возрастающая функция. При $\rho=\exp(-\delta(T-t))$, где δ – коэффициент дисконтирования, максимизируется средний капитал за время T, при $\rho(t)\delta(t-\tau)$ – капитал в некоторый момент времени T и т. д.

Получившаяся оптимизационная задача может быть решена с использованием принципа максимума для систем, описываемых уравнениями с запаздывающим аргументом [4]. Введем функцию $I(t)$ соотношением

$$\frac{dI(t)}{dt} = \rho(t)\bar{S}(t)$$

и, обозначая

$$\gamma = C_1 - \lambda_1 a,$$

$$x_1(t) = \frac{S(t)}{C_0 - \lambda_0 a},\ x_2(t) = \frac{R(t)}{C_0 - \lambda_0 a},\ x_3(t) = \frac{S(t)}{C_0 - \lambda_0 a}, \quad (2)$$

сведем поставленную задачу к стандартной форме. Необходимо максимизировать $x_3(T)$, где переменные $x_i(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -u(t)x_1(t) + \gamma x_2(t-\tau) + 1,$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{1}{k}x_2(t) + \frac{1}{k}u(t)x_1(t),$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = \rho(t)x_1(t),$$

с начальными условиями $x_1(0)=x_{10}$, $x_3(0)=0$, $x_2(t)=0$ при $t\in[-\tau,0]$.

Функция Гамильтона [4] для нашей задачи имеет вид

$$H = P_1(t)[-u(t)x_1(t) + \gamma x_2(t-\tau) + 1] +$$
$$+ P_2(t)\left[-\frac{1}{k}x_2(t) + \frac{1}{k}u(t)x_1(t)\right] + P_3(t)\rho(t)x(t),$$

где сопряженные переменные $P_i(t)$ определяются на отрезке времени $[T-\tau, T]$ системой уравнений

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \left[P_1(t) - \frac{1}{k}P_2(t)\right]u(t) - P_3(t)\rho(t),$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = \frac{1}{k}P_2(t), \quad (3)$$

с граничными условиями: $P_1(T)=0$, $P_2(T)=0$, $P_3(T)=1$, а на отрезке времени $[0, T-\tau]$ системой уравнений

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \left[P_1(t) - \frac{1}{k}P_2(t)\right]u(t) - P_3(t)\rho(t),$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} - \left.\frac{\partial H}{\partial x_2(t-\tau)}\right|_{t=t+\tau} = \frac{1}{k}P_2(t) - \gamma P_1(t+\tau),$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0. \quad (4)$$

Управление $u(t)$, максимизирующие функцию Гамильтона (5), имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} u_0, & \text{если} \quad x_1(t)\left[\frac{1}{k}P_2(t) - P_1(t)\right] > 0; \\ 0, & \text{если} \quad x_1(t)\left[\frac{1}{k}P_2(t) - P_1(t)\right] < 0. \end{cases}$$

Таким образом, управление является релейным, и задача построения оптимального управления сводится к нахождению точек переключения (точек включения и точек выключения рекламы), определяемых условием

$$x_1(t) = P_1(t) - \frac{1}{k}P_2(t) = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим вначале участок траектории $[T-\tau, T]$. Из граничных условий задачи и системы уравнений (6) следует, что в некоторой ε-окрестности точки T

$$P_1(T-\varepsilon) = P_1(T) - P_1(T)\varepsilon + o(\varepsilon) = \rho(\tau)\varepsilon + o(\varepsilon),$$
$$P_2(T-\varepsilon) = P_2(T) - \dot{P}_2(T)\varepsilon + o(\varepsilon) = o(\varepsilon).$$

Откуда в ε-окрестности точки T управление $u(t)=0$. Решая систему уравнений (3), получим

$$P_1(t) = \int_t^T \rho(\tau)d\tau; \quad P_2(t) = 0; \quad P_3(t) = 1. \quad (6)$$

Откуда на всем отрезке $[T-\tau, T]$ $u(t)=0$.

Рассмотрим участок траектории $[0, T-\tau]$, на котором переменные $P_i(t)$ определяются системой ур. (4) с граничными условиями (6). Имеем в некоторой ε-окрестности точки $T-\tau$

$$P_1(T-\tau-\varepsilon) = P_1(T-\tau) - \dot{P}_1(T-\tau)\varepsilon + o(\varepsilon) =$$
$$= P_1(T-\tau) + \rho(T-\tau)\varepsilon + o(\varepsilon),$$
$$P_2(T-\tau-\varepsilon) = P_2(T-\tau) - \dot{P}_2(T-\tau)\varepsilon + o(\varepsilon) = o(\varepsilon).$$

Отсюда в ε-окрестности точки $T-\tau$ управление $u(t)=0$. Решая систему ур. (4) с граничными условиями (6), получим, что в некоторой окрестности точки $T-\tau$

$$P_1(t) = \int_t^T \rho(z)dz;$$

$$P_2(t) = \gamma \int_t^{T-\tau} \exp\left(\frac{t-v}{k}\right) \int_{v+\tau}^T \rho(z)dz; \quad P_3(t) = 1. \quad (7)$$

Точка переключения управления (точка выключения рекламы) t^*, если она существует, определяется условием (4), которое с учетом (7) дает

$$\int_{t^*}^T \rho(z)dz = \gamma \int_{t^*+\tau}^T \left(1 - \exp\left(\frac{t^* + \tau - y}{k}\right)\right)\rho(y)dy. \quad (8)$$

При $t^* \ge t$ $u(t)=0$, при $t<t^*$ $u(t)=u_0$.

Уравнение (8) налагает определенные ограничения на параметр γ. Во-первых, параметр $\gamma>1$. Смысл условия очевиден. Из соотношений (1) и (2) следует, что параметр γ определяет приращение капитала компании за счет рекламы. Если $\gamma<<1$, то затраты на рекламу бессмысленны.

Если ур. (8) имеет решение, то затраты на рекламу начинаются в некоторый момент времени t_0 и заканчиваются в момент времени t^* ($0 \le t_0 < t^*$). Покажем, что $t_0=0$. Для этого нужно показать, что при $t<t^*$ функция $x(t)$ (5) не меняет знак. Так как $P_3(t)=1$ на отрезке $[0,t]$, то пара значений $P_1(t)$ и $x(t)$ удовлетворяет при $t\in[t_0, t^*]$ системе уравнений

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = u_0 x(t) - \rho(t),$$

$$k\frac{dx(t)}{dt} = (1+ku_0)x(t) - P_1(t) - k\rho(t) + \gamma P_1(t+\tau). \quad (9)$$

Разрешая систему (9) относительно $x(t)$ и учитывая, что $x^*(t)=0$, получим

$$x(t) = \frac{P_1(t^*) - \gamma P_1(t^*+\tau)}{1+u_0 k}\times$$
$$\times\left[\exp(-k_0(t^*-t)) - \exp\left(-\frac{t^*-t}{k}\right)\right]+$$
$$+\int_t^{t^*}\rho(z)\exp(-u_0(z-t))dz + \frac{\gamma}{1-u_0 k}+$$
$$+\int_t^{t^*}\dot{P}_1(t+\tau)\left[\exp(-u_0(z-t)) - \exp\left(-\frac{z-t}{k}\right)\right]dz.$$

Из первого ур. (9) следует, что при всех t $\dot{P}_1(t)\leq-\rho(t)$, где по условию $\rho(t)$ – монотонно возрастающая функция. Поэтому $x(t)$ имеет сумму сверху

$$x(t) \leq \frac{P_1(t^*) - \gamma P_1(t^*+\tau)}{1-u_0 k}\times$$
$$\times\left[\exp(-u_0(t^*-t)) - \exp\left(-\frac{t^*-t}{k}\right)\right] + \frac{k}{1-u_0 k}\times$$
$$\times\int_t^{t^*}\rho(z)\left[-u_0\exp(-u_0(z-t)) + \frac{1}{k}\exp\left(-\frac{z-t}{k}\right)\right]dz. \quad (10)$$

Беря входящий в (10) интеграл по частям, получим

$$x(t) \leq \frac{P_1(t^*) - \gamma P_1(t^*+\tau) + k\rho(t^*)}{1-u_0 k}\times$$
$$\times\left[\exp(-u_0(t^*-t)) - \exp\left(-\frac{t^*-t}{k}\right)\right] + \frac{k}{1-u_0 k}\times$$
$$\times\int_t^{t^*}\dot{\rho}(z)\left[-u_0\exp(-u_0(z-t)) + \frac{1}{k}\exp\left(-\frac{z-t}{k}\right)\right]dz. \quad (11)$$

Так как $\rho(z)$ монотонно возрастает, то $\dot{\rho}(z)\geq 0$, и интегралом, входящим в (11), можно пренебречь, усиливая неравенство. Поэтому

$$x(t) \leq \frac{P_1(t^*) - \gamma P_1(t^*+\tau) + k\rho(t^*)}{1-u_0 k}\times$$
$$\times\left[\exp(-u_0(t^*-t)) - \exp\left(-\frac{t^*-t}{k}\right)\right]. \quad (12)$$

Наконец, точка t^* – точка выключения рекламы. Поэтому в ε-окрестности точки t^* $x(t^*-\varepsilon)<0$. Раскладывая $x(t^*-\varepsilon)$ в ряд Тейлора, получим, учитывая, что $x(t^*)=0$,

$$x(t^*-\varepsilon) = -\dot{x}(t^*)\varepsilon + o(\varepsilon)$$

и из ур. (9)

$$k\dot{x}(t^*) = (1+ku_0)x(t^*) - P_1(t^*) - k\rho(t^*) + \gamma P_1(t^*+\tau).$$

Откуда должно выполнятся условие

$$\gamma P_1(t^*+\tau) - P_1(t^*) - k\rho(t^*) > 0. \quad (13)$$

Из (12) и (13) получаем, что при $t<t^*$ $x(t)<0$ и, таким образом, при $t<t^*$ точки переключения управления рекламой отсутствуют. Окончательно получаем, что оптимальное управление затратами на рекламу имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} u_0, & \text{при} \quad t\leq t^*; \\ 0, & \text{при} \quad t\geq t^*, \end{cases}$$

где точка переключения t^* определяется соотношением (8). Интересно отметить, что оптимальная рекламная стратегия не зависит от начального капитала компании.

Также для данной модели изменения капитала компании с учетом расходов на рекламу (постоянная доля капитала, затрачиваемого на рекламу) получены уравнения, определяющие вероятность выживания и разорения страховой компании и условное среднее время до разорения. Найдены преобразования Лапласа соответствующих характеристик и для случая малых отчислений на рекламу получены явные выражения, определяющие вероятность выживания и условное среднее время до разорения. Показано, что отчисления на рекламу приводят к уменьшению вероятности выживания и условного среднего времени до разорения [5].

Страховые компании используют в своей работе классическую модель страхования. Классическая модель страховой компании, благодаря ее относительной простоте, позволяет вычислить в явном виде вероятности разорения и выживания страховой компании, выработать рекомендации по определению необходимого начального капитала и назначению страховых премий. В тоже время эта модель не отражает многие черты деятельности страховой компании в реальной жизни.

Данная модель является уточнением классической модели, поэтому полностью подходит для внедрения, т. к. является ее дальнейшим развитием.

Предложенная модель прошла апробацию в реально действующей страховой компании и полностью подтвердила теоретические выкладки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Panjer H.H., Willmot G.E. Insurance Risk Model. Society of Actuaries. – Shaumburg, 1992. – 540 c.
2. Ахмедова Д.Д., Терпугов А.Ф. Математическая модель функционирования страховой компании с учетом расходов на рекламу // Известия вузов. Физика. – 2001. – № 1. – С. 25–28.
3. Kats V.M., Livshits K.I. Optimization of Advertising Expenses in the Functioning of an Insurance Company // Applied Stochastic Models and Information Processes. – Petrozavodsk, 2002. – P. 82–83.
4. Янушевский Р.Т. Управление объектами с запаздыванием. – М.: Наука, 1978. – 348 с.
5. Кац В.М. Исследование математических моделей страхования при нестационарных потоках страховых премий с интенсивностью, зависящей от капитала: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Томск, 2003. – 19 с.

Поступила 03.05.2006 г.