АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ МОМЕНТОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИРАЩЕНИЙ ЦЕН ПАРЫ USD/RUB

М.О. Кинева

Научный руководитель: доцент, к. ф-м. н. О.Л. Крицкий

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г.Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: mariakineva@mail.ru

ASYMPTOTIC ASSESSING OF MOMENTS OF THE PRICE DIFFERENCE DISTRIBUTION FOR PAIR USD/RUB

M.O. Kineva

Scientific Supervisor: As. Prof., Ph.D. O.L. Kritski

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: mariakineva@mail.ru

Annotation. *The method of assessing of expected value and volatility when time goes to infinity is considered. The dependences found allow us to reduce the problem of solving to the system of stochastic differential equations to the searching for an analytical solution of the Fokker–Planck–Kolmogorov asymptotic equation. The algorithm constructed applied to the econometric analysis of price pair USD/RUB for the period from 01.09.2014 till 02.02.2015.*

В последнее десятилетие отмечается значительный рост числа исследований, связанных с изучением поведения сложных экономических систем и флуктуаций финансовых рынков. Одним из способов их исследования является непосредственный анализ высокочастотных эмпирических данных с использованием теории случайных процессов, примененной к ценовым приращениям вида:

$$\Delta x(t) = x(t+\Delta t) - x(t) \tag{1}$$

где $x(t)$ – исходный стохастический процесс, Δt – временной лаг.

Определение статистических свойств приращений в (1) и имитационное моделирование их будущего поведения является центральной задачей динамики финансовых рынков. Для ее решения предложена теоретическая модель стохастической волатильности (SV) [6], включая модель Хестона [5].

В настоящей работе проводится асимптотическое оценивание и нахождение функциональной зависимости коэффициентов μ, σ, p, q модели стохастической волатильности вида:

$$d(\Delta x) = \mu(\Delta x, t)dt + \Delta\sigma(\Delta x, \Delta\sigma, t)dW_1,$$

$$d(\Delta\sigma) = g(\Delta x, \Delta\sigma, t)dt + q(\Delta x, \Delta\sigma, t)dW_2, \tag{2}$$

где Δx – ценовые приращения, удовлетворяющие (1), μ – коэффициент дрейфа, $\Delta\sigma=\sigma(t+\Delta t)-\sigma(t)$ – приращения волатильности, g, q – некоторые непрерывные функции, dW_i – приращения винеровских процессов, $i=1,2$ с корреляцией $\rho dt = \overline{dW_1, dW_2}$, $t \in [t_0, T]$.

Найденные таким образом параметры используются для нахождения асимптотического аналитического решения уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (УФПК).

Детерминация и нахождение функциональной зависимости данных коэффициентов является актуальной задачей, так как ни одна из известных моделей не описывает действительное поведение рынка, а учитывает только конечный набор его характеристик.

Построенный алгоритм позволяет описать поведение ценовых приращений и их волатильности для тиковых данных, зафиксированных в течение торговых сессий. При этом он применяется к анализу котировок пары USD/RUB. Были использованы тиковые десятиминутные и тридцатиминутные данные – всего 11580 значений рублевых цен доллара за период с 1 сентября 2014 г. по 2 февраля 2015 г. (данные предоставленые компанией Финам, http://finam.ru).

Статистический анализ эмпирических данных показывает наличие ненулевой автокорреляции временного ряда Δx_i, т.е. как правило, они являются зависимыми. Если $\Delta x(t)$ – марковский случайный процесс, то безусловная плотность $p(\Delta x_{i+1}, \Delta t_{i+1}, \Delta x_i, \Delta t_i)$ легко определяется через условную:

$$p(\Delta x_{i+1}, \Delta t_{i+1}, \Delta x_i, \Delta t_i) = p(\Delta x_i, \Delta t_i)\, p(\Delta x_{i+1}, \Delta t_{i+1} | \Delta x_i, \Delta t_i), \tag{3}$$

зная $p(\Delta x_{i+1}, \Delta t_{i+1} | \Delta x_i, \Delta t_i)$ и $p(\Delta x_i, \Delta t_i)$, $i = 1, \dots, N$, при Δt_i, $\Delta t_{i+1} \to \infty$, первое уравнение в (3) можно записать в виде УФПК [8]:

$$\frac{d}{d\tau} p(\Delta x, \tau) = \left[-\frac{\partial}{\partial(\Delta x)} D_1(\Delta x, \tau) + \frac{\partial^2}{\partial(\Delta x)^2} D_2(\Delta x, \tau) \right] p(\Delta x, \tau), \tag{4}$$

где $\tau = T / \Delta t$, $t \in [t_0, T]$, $D_1(\Delta x, \tau)$ и $D_2(\Delta x, \tau)$ – коэффициенты дрейфа и волатильности приращений цен модели (2), определяемые как моменты условного распределения $p(\Delta s, \tau + \Delta\tau, | \Delta x, \tau)$:

$$D_k(\Delta x, \tau) = \frac{1}{k!} \lim_{\Delta\tau \to 0} M^{(k)},$$

$$M^{(k)} = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\Omega} (\Delta x' - \Delta x)^k\, p(\Delta x', \tau + \Delta\tau, | \Delta x, \tau)\, d(\Delta x'), \tag{5}$$

где $k = 1, 2$, Ω – область изменения $\Delta x(t)$.

Пусть найдены оценки $D_1(\Delta x, \tau)$ и $D_2(\Delta x, \tau)$, которые в общем случае являются полиномами $P_1(\Delta x)$ и $P_2(\Delta x)$ степеней m и n соответственно. Подставляем их в УФПК (4). Тогда, если $m \ge n$, то решение УФПК при $t \to \infty$ выходит на стационарное решение ОДУ

$$\frac{\partial}{\partial \Delta x} \left(P_1(\Delta x) p(\Delta x, \tau) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \Delta x} P_2(\Delta x) p(\Delta x, \tau) \right) = 0,$$

которое имеет вид

$$p(\Delta x, \tau) = \frac{C}{P_2(\Delta x)} \exp\left\{ -\int \frac{P_1(\Delta x)}{P_2(\Delta x)} d\Delta x \right\}, \tag{6}$$

где C – константа, определяемая из эталонного условия

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} p(\Delta x, \tau) d\Delta x = 1.$$

Уравнение (6) описывает асимптотическое поведение плотности распределения случайного процесса Δx или поведение хвостов плотности распределения.

Проведено асимптотическое оценивание модели стохастической волатильности, для чего аналитически решается УФПК (4) с определенными численно коэффициентами (5) относительно приращений цен и волатильностей при временном лаге $\Delta\tau = 2$ и лагами при расчете волатильности $\Delta t_1 = 1$, $\Delta t_2 = 3$. Для упрощения функциональной зависимости параметров модели к ним применяется нелинейная полиномиальная регрессия и находится их полиномиальная аппроксимация. Предложенный метод оценивания параметров был применен для нахождения функциональной зависимости коэффициентов модели (2) для тиковых десятиминутных и тридцатиминутных данных – всего 11580 значений рублевых цен доллара за период с 1 сентября 2014 г. по 2 февраля 2015 г. (данные предоставленые компанией Финам, http://finam.ru).

В результате проведенных вычислений при реализации предложенного метода были получены массивы значений коэффициентов и найдены функциональные зависимости коэффициентов моделей (2) и (6).

Следует отметить, что предложенный алгоритм оценки параметров модели в виде полиномиальной зависимости, дает единственное решение УФПК [8] и не ограничивает выбор вероятностного закона распределения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бухбиндер Г.Л., Чистилин К.М. Стохастическая динамика котировок РАО ЕЭС // Математическое моделирование. – 2005. – Т. 17 - №2 – С. 119- 125.
2. Крицкий О.Л., Лисок Е.С. Асимптотическое оценивание коэффициентов модели стохастической волатильности // Прикладная эконометрика, 2007, т. 2, №2, с. 3 – 12.
3. Friedrich R. How to Quantify Deterministic and Random Influences on the Statistics of the Foreign Exchange Market // Physical Review Letters. – 2000. – V. 84 - № 22. – P. 5224.
4. Ait-Sahalia Y., Kimmel R. Maximum likelihood estimation of stochastic volatility models // Journal of Financial Economics. – 2007. - № 83 – P. 413- 452.
5. Moodley N. The Heston Model: A Practical Approach with Matlab Code: Bachelor of Sciene Honours, Faculty of Science. – Johannesburg, 2005. – 53 p.
6. Shepherd N., Harvey A. An assessing of stochastic volatility model coefficients // Journal of Business and Econ stat. – 1996. – v.14. – P. 429–434.
7. Gatheral J., Lynch M. Stochastic Volatility and Local Volatility: Case Studies in Financial Modelling Course Notes, Courant Institute of Mathematical Sciences, Fall Term, 2002 – 18 p.
8. Schobel R., Zhu J. Stochastic Volatility With an Ornstein–Uhlenbeck Process: An Extension // European Finance Review. – 1999 - №3 – P. 23.