

УДК 519.2

ПОЛУРЕКУРРЕНТНЫЕ ЯДЕРНЫЕ ОЦЕНКИ БАЗОВЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ПО НЕЗАВИСИМЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ

А.В. Китаева*, Г.М. Кошкин

*Томский политехнический университет

Томский государственный университет

Отдел проблем информатизации ТНЦ СО РАН, г. Томск

E-mail: kit1157@yandex.ru

Рассматриваются оценки подстановки для широкого класса функционалов от многомерных плотностей распределений, содержащего функционалы от условных распределений. В качестве элементов подстановки предлагаются рекуррентные ядерные оценки с векторным параметром размытости (оценки базовых функционалов). Находится главная часть асимптотической среднеквадратической ошибки оценок базовых функционалов. Показывается, что в асимптотике при оптимальном выборе параметров размытости выбором ядра можно добиться неограниченного сближения скорости сходимости в среднеквадратическом предложенных непараметрических и обычных параметрических оценок.

Введение

Для широкого класса статистических задач при синтезе оптимальных процедур и отыскании их характеристик требуется оценивать различные выражения от многомерных распределений, которые можно представить в форме:

$$J(x) = H(\{a_i(x)\}, \{a_i^{(1j)}(x)\}, i = \overline{1, s+1}, j = \overline{1, m}) = H(x, \{a_i(x)\}, \{a_i^{(1j)}(x)\}). \quad (1)$$

Здесь $x \in R^m$, $H(t): R^{(m+1)(s+1)} \rightarrow R^1$ — заданная функция, а базовые функционалы определяются следующим образом:

$$a_i^{(0j)}(x) = a_i(x) = \int g_i(y) f(x, y) dy, \quad i = \overline{1, s+1}, \quad (2)$$

$$a_i^{(1j)}(x) = \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_j}, \quad i = \overline{1, s+1}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (3)$$

$$a^{(0j)}(x) = a(x) = (a_1(x), \dots, a_{s+1}(x)), \quad a^{(1j)}(x) = (a_1^{(1j)}(x), \dots, a_{s+1}^{(1j)}(x)),$$

где $g_1, \dots, g_s$ — известные измеримые по Борелю скалярные функции, причем $g_{s+1} \equiv 1$, $f(x, y)$ — неизвестная плотность распределения наблюдаемого случайного вектора $Z = (X, Y) \in R^{m+1}$. Интегрирование в (2) проводится на всей числовой оси, т. е. считается, что $\int \equiv \int_{R^1}$; далее в подобных случаях будет использоваться аналогичная замена. При фиксированном значении x будем называть $J(x)$ характеристическим функционалом.

Впервые выражения типа (1) без производных рассматривались в работах [1, 2] при изучении условных центральных моментов. Нетрудно видеть, что класс характеристических функционалов содержит важный класс функционалов от условных распределений

$$b_i^{(0j)}(x) = b_i(x) = a_i(x) / p(x) = a_i(x) / a_{s+1}(x) = \int g_i(y) f(y|x) dy, \quad i = \overline{1, s},$$

где $p(x)$ — плотность распределения вектора X , $f(y|x) = f(x, y) / p(x)$ — условная плотность распределе-

ния. Будем называть для краткости функционалы от условных распределений условными функционалами.

Условные функционалы обычно представляют собой отношения некоторых функций, что позволяет отнести их к классу функционалов с особенностями. При исследовании статистических свойств оценок отношений, например, сходимости в среднеквадратическом, приходится преодолевать дополнительные трудности, связанные с возможной неограниченностью оценок таких функционалов. Эти проблемы можно решать разными способами (см., например, [3–6]).

Ядерные оценки имеют непараметрический характер [7]. М. Розенблатт впервые в 1956 г. ввел класс ядерных оценок плотностей и исследовал их асимптотическую несмещенность и состоятельность [8]; позднее Е. Парзен (1962) доказал их асимптотическую нормальность [9]. Главная особенность непараметрического оценивания состоит в том, что класс распределений не определяется с точностью до конечного числа параметров. Несмотря на «бедность» исходной информации, непараметрические процедуры во многих случаях почти не проигрывают в эффективности параметрическим, когда оба типа процедур строятся по данным, соответствующим известной модели, и существенно выигрывают, если выбранная параметрическая модель неадекватно описывает реальность. Отметим, что в ряде случаев параметрические модели нельзя построить в принципе, либо это требует значительных затрат времени и средств [10]. Следует обратить внимание также и на то, что при решении целого класса задач нелинейной обработки сигналов непараметрические процедуры дают более обозримые результаты, чем параметрические рекуррентные процедуры, связанные с решением нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [11] или разложением плотности распределения в ряды.

Приведем ряд примеров характеристических функционалов, возникающих при математическом описании различных прикладных задач. Обозначим $Q(\{b_i(x)\}) = H(\{a_i(x)\})$.

Важнейшую роль, безусловно, играет функция регрессии

$$r(x) = E(Y | X = x) = E(Y | x) = \int yf(y | x)dy = \frac{\int yf(x, y)dy}{p(x)}, \quad (4)$$

минимизирующая среднеквадратическое отклонение (СКО) истинных выходов объекта и модели. В этом случае $H(a_1, a_2) = a_1/a_2$, $g_1(y) = y$, $g_2(y) = 1$.

В регрессионной модели (4) функция чувствительности по j -му входу имеет вид

$$T_j(x) = \frac{\partial r(x)}{\partial x_j}; \quad H(a_1, a_2, a_1^{(1j)}, a_2^{(1j)}) = \frac{a_1^{(1j)}}{a_2} - \frac{a_1 a_2^{(1j)}}{a_2^2},$$

$$g_1(y) = y, \quad g_2(y) \equiv 1, \quad (5)$$

и характеризует степень связи между изменениями входных и выходных характеристик объекта.

Погрешность регрессионной модели можно измерять остаточной или условной дисперсией (скедастическая кривая [12. С. 462])

$$D(Y | x) = \int y^2 f(y | x)dy - r^2(x);$$

$$Q(b_1, b_2) = b_2 - b_1^2, \quad g_1(y) = y, \quad g_2(y) = y^2$$

или условным стандартным отклонением

$$\sigma(x) = \sqrt{D(Y | x)}, \quad Q(b_1, b_2) = \sqrt{b_2 - b_1^2}.$$

Кроме того, остаточная дисперсия вместе с условными центральными моментами третьего и четвертого порядков определяют, соответственно, условный коэффициент асимметрии или клитическую кривую

$$\beta_1(x) = \frac{E((Y - r(x)) | x)^3}{[D(Y | x)]^{3/2}};$$

$$Q(b_1, b_2, b_3) = \frac{b_3 - 3b_2b_1 + 2b_1^3}{(b_2 - b_1^2)^{3/2}}$$

и куртическую кривую

$$\beta_2(x) = \frac{E((Y - r(x)) | x)^4}{[D(Y | x)]^2},$$

связанную с условным эксцессом [12. С. 462].

1. Постановка задачи

В качестве рекуррентных ядерных оценок базовых функционалов $a(x) = a^{(0j)}(x)$ и их производных $a^{(1j)}(x)$ в точке x возьмем объединенную статистику

$$a_n^{(rj)}(x) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \prod_{k=1}^m h_{lk}^{-1} g(Y_l) \mathbf{K}^{(rj)} \left(\frac{x - X_l}{h_{(l)}} \right) =$$

$$= a_{n-1}^{(rj)}(x) - \frac{1}{n} \left[a_{n-1}^{(rj)}(x) - \prod_{k=1}^m h_{nk}^{-1} g(Y_n) \mathbf{K}^{(rj)} \left(\frac{x - X_n}{h_{(n)}} \right) \right], \quad (6)$$

$$r = 0, 1,$$

где $Z = (X_l, Y_l)$, $l = \overline{1, n}$ – $(m+1)$ -мерная выборка, характеризующая плотностью $f(x, y)$,

$$\mathbf{K}^{(0j)}(u / h_{(l)}) = \mathbf{K}(u / h_{(l)}) = \prod_{i=1}^m \mathbf{K}(u_i / h_{li})$$

– m -мерное мультипликативное ядро, масштабированное по каждой компоненте,

$$\mathbf{K}^{(1j)}(u / h_{(l)}) = \frac{\partial \mathbf{K}(u / h_{(l)})}{\partial u_j} =$$

$$= K(u_1 / h_{l1}) \cdots K(u_{j-1} / h_{l(j-1)}) \times$$

$$\times K^{(1)}(u_j / h_{lj}) K(u_{j+1} / h_{l(j+1)}) \cdots K(u_m / h_{lm}),$$

$$K^{(1)}(u_j / h_{lj}) = \frac{dK^{(1)}(u_j / h_{lj})}{du_j},$$

последовательности чисел $(h_{nk}) \downarrow 0 \quad \forall k = \overline{1, m}$, $a_n^{(rj)}(x) = (a_{1n}^{(rj)}(x), \dots, a_{(s+1)n}^{(rj)}(x))$, $g(y) = (g_1(y), \dots, g_{s+1}(y))$.

Впервые рекуррентные ядерные оценки плотности были предложены и изучены в [13, 14]. Последовательные процедуры обладают рядом преимуществ: они, как правило, легко реализуются на компьютерах, экономя машинную память, на каждом такте работы алгоритма дают готовый результат, и поступление новых измерений не приводит к громоздким перерасчетам, что позволяет обрабатывать информацию в режиме реального времени.

Оценивание характеристических функционалов проводится методом подстановки, т. е. путем замены в (1) неизвестных базовых функционалов и их производных оценками (6). Метод подстановки прост, конструктивен и лежит в основе большинства приемов оценивания [15. С. 41]. Свойства таких оценок определяются отдельно свойствами статистик $a_n^{(rj)}(x)$ и преобразования H . Можно ожидать, что если оценки являются «хорошими», то получим также и «хорошую» оценку $J_n(x)$. Если мы знаем свойства оценок $a_n^{(rj)}(x)$, то теоремы непрерывности А.А. Боровкова [16. С. 34] позволяют получить и свойства оценки $J_n(x)$.

Например, в качестве полурекуррентных (числитель и знаменатель оцениваются рекуррентно) оценок подстановки условных функционалов $b(x) = (b_1(x), \dots, b_s(x))$ в точке x будем рассматривать

$$b_n(x) =$$

$$= \sum_{l=1}^n \prod_{k=1}^m h_{lk}^{-1} g(Y_l) \mathbf{K} \left(\frac{x - X_l}{h_{(l)}} \right) / \sum_{l=1}^n \prod_{k=1}^m h_{lk}^{-1} \mathbf{K} \left(\frac{x - X_l}{h_{(l)}} \right) =$$

$$= \frac{a_n(x)}{p_n(x)} = \frac{a_n^{(0j)}(x)}{a_{(s+1)n}^{(0j)}(x)}. \quad (7)$$

Заметим, что оценки (7) можно записать также в форме

$$b_n(x) = b_{n-1}(x) + (g(Y_n) - b_{n-1}(x)) \times$$

$$\times [1 + (n-1)p_{n-1}(x) \prod_{k=1}^m h_{nk} (\mathbf{K}((x - X_n) / h_{(n)}))^{-1}]^{-1},$$

где $p_{n-1}(x)$ – рекуррентная ядерная оценка многомерной плотности. Такое представление удобно в задачах прогнозирования, поскольку $g(Y_n) - b_{n-1}(x)$ – ошибка прогноза на n -ом шаге.

2. Асимптотические свойства ядерных рекуррентных оценок базовых функционалов

Будем считать для простоты обозначений, что $g(Y): R^l \rightarrow R^l$. Пусть $\|t\| = \max_{1 \leq i \leq l} |t_i|$ — норма вектора $t = (t_1, \dots, t_l)$, $a^{st}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} |g^s(y)| f(x, y) dy$, $b(t_n) = E t_n(x) - t(x)$ — смещение оценки $t_n(x)$, $\sup_x = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} T_j = \int_{\mathbb{R}^m} K(u) du$, $j=1, 2, \dots$

Для доказательства асимптотической несмещенности оценок воспользуемся утверждением [17]: если последовательность функций $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ в точке x при $n \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(x) = f(x). \quad (8)$$

Лемма 1 (асимптотическая несмещенность $a_n(x)$). Если функция $a(x)$ непрерывна в точке x и $\sup a^{1+}(x) < \infty$; ядро обладает свойствами: $\int K(u) du = 1$ и $\int |K(u)| du < \infty$; последовательность чисел $(h_{nk}) \downarrow 0 \forall k=1, m$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b(a_n(x)) = 0. \quad (9)$$

Доказательство. По определению математического ожидания и теореме Фубини

$$\begin{aligned} |E a_n(x)| &\leq \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \prod_{k=1}^m h_{lk}^{-1} \left| \int_{\mathbb{R}^{m+1}} g(y) \mathbf{K} \left(\frac{x-t}{h_{(l)}} \right) f(t, y) dt dy \right| = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \prod_{k=1}^m h_{lk}^{-1} \left| \int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{K} \left(\frac{x-t}{h_{(l)}} \right) \int g(y) f(t, y) dy dt \right| \leq \\ &\leq \sup_x a^{1+}(x) \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \prod_{k=1}^m h_{lk}^{-1} \left| \int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{K} \left(\frac{x-t}{h_{(l)}} \right) dt \right| < \infty. \end{aligned}$$

Сделав в повторных интегралах замену переменных $(x_i - t_i)/h_{li} = u_{li}$ и обозначив $u_{(l)} = (u_{l1}, \dots, u_{lm})$, $u_{(0)} h_{(0)} = (u_{l1} h_{l1}, \dots, u_{lm} h_{lm})$ получаем

$$\begin{aligned} E a_n(x) &= \\ &= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{K}(u_{(l)}) \int g(y) f(x - u_{(l)} h_{(l)}, y) dy du_{(l)} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \int_{\mathbb{R}^m} a(x - u_{(l)} h_{(l)}) \mathbf{K}(u_{(l)}) du_{(l)}. \quad (10) \end{aligned}$$

Разобьем пространство $\mathbb{R}^m$ для каждого $l = \overline{1, n}$ на два множества: $R_l(\delta) = \{u_{(l)}: \|u_{(l)} h_{(l)}\| < \delta\}$ и $\bar{R}_l(\delta) = \{u_{(l)}: \|u_{(l)} h_{(l)}\| \geq \delta\}$, $\delta > 0$ — произвольное. Тогда

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}^m} (a(x - u_{(l)} h_{(l)}) - a(x)) \mathbf{K}(u_{(l)}) du_{(l)} \right| \leq \\ &\leq \sup_{\|u_{(l)} h_{(l)}\| < \delta} |a(x - u_{(l)} h_{(l)}) - a(x)| \int_{R_l(\delta)} |\mathbf{K}(u)| du + \\ &\quad + 2 \sup_x a^{1+}(x) \int_{\bar{R}_l(\delta)} |\mathbf{K}(u)| du. \end{aligned}$$

Первое слагаемое выбором δ можно сделать сколь угодно малым вследствие непрерывности функции $a(x)$ в точке x . Второе слагаемое выбором достаточно большого n также можно сделать сколь угодно малым вследствие сходимости интеграла

$\int_{\mathbb{R}^m} |\mathbf{K}(u)| du$. Справедливость (9), учитывая вышеприведенное утверждение, показана.

Лемма 2 (асимптотическая несмещенность $a_n^{(1,j)}(x)$). Если функции $a^{(1,j)}(x)$ и $a(x)$ непрерывны в точке x , $\sup a^{1+}(x) < \infty$, $\sup |a^{(1,j)}(x)| < \infty$; ядро $K(u)$ удовлетворяет условиям леммы 1 и дополнительно $\int |K^{(1)}(u)| du < \infty$, $\lim_{|u| \rightarrow \infty} K(u) = 0$; последовательность векторов $(h_{(n)}) \downarrow 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b(a_n^{(1,j)}(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} E a_n^{(1,j)}(x) - a^{(1,j)}(x) = 0. \quad (11)$$

Доказательство, в сущности, аналогично предыдущему и здесь не приводится.

Обозначим

$$\omega_{vl}^{(rj)}(x) = \frac{T_v}{v!} \frac{\partial^{(v)} a^{(rj)}(x)}{\partial x_l^v}, \quad \omega_{vl}^{(0j)}(x) = \omega_{vl}(x).$$

Пусть последовательности $(h_{(n)})$ при $n \rightarrow \infty$ удовлетворяют следующему условию

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \prod_{j \in J} h_{ij}^{k_j} = S \left(\sum_{j \in J} k_j \right) \prod_{j \in J} h_{ij}^{k_j} + o \|h_{(n)}\|^{\sum_{j \in J} k_j}, \quad (12)$$

где множество $J \subset \{1, 2, \dots, m\}$, $k_j = 0, 1, 2, \dots$ постоянная S зависит от J и суммы показателей степеней $\{k_j\}$.

Замечание. Равенство (12) выполняется, например, для $h_{ij} = O(i^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 1$ (именно такой вид имеют оптимальные параметры размытости (14)), при этом постоянную S можно определить согласно формуле Эйлера-Маклорена [18. С. 544].

Лемма 3 (скорость сходимости смещения). Пусть выполняются условия леммы 1 (или 2), и для $r=0$ (или 1) функции $a^{(rj)}(x)$ непрерывны на $\mathbb{R}^m$ вместе со своими частными производными до v -го порядка включительно, причем

$$\sup_x \left| \frac{\partial^{(v)} a^{(rj)}(x)}{\partial x_l \partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_q}} \right| < \infty, \quad l, t, \dots, q = \overline{1, m}.$$

Ядро $K(u)$ дополнительно удовлетворяет условиям $\int |u^v K(u)| du < \infty$, $T_j = 0$, $j=1, \dots, v-1$, $T_v \neq 0$, $K(u) = K(-u)$, а последовательность $(h_{(n)}) \downarrow 0$ — соотношению (12). Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\left| b(a_n^{(rj)}(x)) - S(v) \sum_{l=1}^m \omega_{vl}^{(rj)}(x) h_{nl}^v \right| = o \|h_{(n)}\|^v$$

соответственно для $r=0$ (или 1).

Доказательство ($r=0$). Для простоты обозначений без ограничения общности будем считать $v=m$. В формуле (10) разложим функцию $a(x - u h_{(l)})$ по формуле Тейлора в точке x с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\begin{aligned} E a_n(x) &= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \int_{\mathbb{R}^m} a(x - u_{(l)} h_{(l)}) \mathbf{K}(u_{(l)}) du_{(l)} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \left[a(x) + \sum_{i=1}^m h_{li} \frac{\partial a^{(rj)}(x)}{\partial x_i} \int u_i K(u) du + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2!} \sum_{i, t=1}^m h_{li} h_{lt} \frac{\partial^2 a(x)}{\partial x_i \partial x_t} \int u_i u_t K(u) du + \dots + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{(v-1)!} \sum_{l, j, \dots, p=1}^m h_{il} h_{ij} \dots h_{ip} \frac{\partial^{v-1} a(x)}{\partial x_l \partial x_j \dots \partial x_p} \times \\
 & \times \int_{R^{m-1}} u_l u_j \dots u_p K(u_l) K(u_j) \dots K(u_p) du_l du_j \dots du_p + \\
 & + \frac{1}{v!} \sum_{l, j, \dots, p, q=1}^m h_{il} h_{ij} \dots h_{ip} h_{iq} \frac{\partial^v a(x + u_{(i)} h_{(i)} \theta)}{\partial x_l \partial x_j \dots \partial x_p \partial x_q} \times \\
 & \times \int_{R^m} u_l u_j \dots u_p u_q K(u_l) \dots K(u_q) du_l \dots du_q \Big] = \\
 & = a(x) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m h_{il}^v \omega_{vl}(x) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \gamma_i, \\
 & \text{где } \gamma_i = \frac{1}{v!} \int_{R^m} \left[\sum_{l, j, \dots, p, q=1}^m h_{il} h_{ij} \dots h_{ip} h_{iq} \frac{\partial^v a(x + u_{(i)} h_{(i)} \theta)}{\partial x_l \partial x_j \dots \partial x_p \partial x_q} \times \right. \\
 & \left. \times u_l u_j \dots u_p u_q - \sum_{l=1}^m h_{il}^v \frac{\partial^v a(x)}{\partial x_l^v} u_l^v \right] \mathbf{K}(u) du, \quad 0 < \theta < 1.
 \end{aligned}$$

Применив теорему Лебега о мажорируемой сходимости, видим, что последовательность $\gamma_i = o(\|h_{(i)}\|^v)$. Учитывая (12), а именно

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_{il}^v = S(v) h_{nl}^v + o(\|h_{(n)}\|^v),$$

и то, что $T_j=0$ для $j=1, \dots, v-1$, получаем требуемый результат. Для $r=1$ доказательство проводится аналогично.

Вернемся к векторной функции $g(y)$. Обозначим

$$\begin{aligned}
 L^{(r,q)}(c) &= \int K^{(r)}(u) K^{(q)}(cu) du, \quad r, q = 0, 1, \quad c \in R^1; \\
 a_{i,p}(x) &= \int g_i(y) g_p(y) f(x, y) dy;
 \end{aligned}$$

$$a_{i,p}^{1+}(x) = \int |g_i(y) g_p(y)| f(x, y) dy, \quad i, p = \overline{1, s+1};$$

$$B_{i,p}^{(r,q)} = L^{(r,q)}(1) (L^{(0,0)}(1))^{m-1} a_{i,p}(x).$$

Лемма 4 (ковариация). Пусть функции $a_{i,p}(x)$, $a_i(x)$, $a_p(x)$ непрерывны на R^m ,

$$\sup_x a_{i,p}^{1+}(x) < \infty, \quad \sup_x a_i^{1+}(x) < \infty, \quad \sup_x a_p^{1+}(x) < \infty;$$

$$\int |K^{\max(r,q)}(u)| du < \infty, \quad \int K(u) du = 1;$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \left[\prod_{s=1}^m h_{ls} + \left(l \prod_{s=1}^m h_{ls} h_{lj}^r h_{lk}^q \right)^{-1} \right] = 0$$

и выполняется (12). Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 & \text{cov}(a_m^{(rj)}(x), a_{pn}^{(qk)}(x)) = \\
 & = B_{i,p}^{(r,q)} S(-m-r-q) \left(n \prod_{s=1}^m h_{ns} h_{nj}^r h_{nk}^q \right)^{-1} + \\
 & + o(n^{-1} \|h_{(n)}\|^{-(m+r+q)}).
 \end{aligned}$$

Доказательство. По определению ковариации, основываясь на независимости выборки $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$, находим

$$\begin{aligned}
 & n^2 \text{cov}(a_m^{(rj)}(x), a_{pn}^{(qk)}(x)) = \\
 & \sum_{l=1}^n \sum_{s=1}^m h_{ls}^{-2} \text{cov} \left(g_i(Y_l) \mathbf{K}^{(r)} \left(\frac{x - X_l}{h_{(l)}} \right), g_p(Y_l) \mathbf{K}^{(q)} \left(\frac{x - X_l}{h_{(l)}} \right) \right) = \\
 & = \sum_{l=1}^n \sum_{s=1}^m h_{ls}^{-2} \left[\int_{R^{m+1}} g_i(y) g_p(y) \mathbf{K}^{(r)} \left(\frac{x-t}{h_{(l)}} \right) \mathbf{K}^{(q)} \left(\frac{x-t}{h_{(l)}} \right) f(t, y) dt dy - \right. \\
 & \left. - \int_{R^{m+1}} g_i(y) \mathbf{K}^{(r)} \left(\frac{x-t}{h_{(l)}} \right) f(t, y) dt dy \int_{R^{m+1}} g_p(y) \mathbf{K}^{(q)} \left(\frac{x-t}{h_{(l)}} \right) f(t, y) dt dy \right] = \\
 & = \sum_{l=1}^n \sum_{s=1}^m h_{ls}^{-2} \left[\int_{R^m} a_{i,p}(t) \mathbf{K}^{(r)} \left(\frac{x-t}{h_{(l)}} \right) \mathbf{K}^{(q)} \left(\frac{x-t}{h_{(l)}} \right) dt - \right. \\
 & \left. - \int_{R^m} a_i(t) \mathbf{K}^{(r)} \left(\frac{x-t}{h_{(l)}} \right) dt \int_{R^m} a_p(t) \mathbf{K}^{(q)} \left(\frac{x-t}{h_{(l)}} \right) dt \right] = \\
 & = \sum_{l=1}^n \sum_{s=1}^m h_{ls}^{-1} h_{lj}^{-r} h_{lk}^{-q} \left[\int_{R^m} a_{i,p}(x - u_{(l)} h_{(l)}) \mathbf{K}^{(r)}(u_{(l)}) \mathbf{K}^{(q)}(u_{(l)}) du_{(l)} - \right. \\
 & \left. - \int_{R^m} a_i(x - u_{(l)} h_{(l)}) \mathbf{K}^{(r)}(u_{(l)}) du_{(l)} \int_{R^m} a_p(x - u_{(l)} h_{(l)}) \mathbf{K}^{(q)}(u_{(l)}) du_{(l)} \right] = \\
 & = \sum_{l=1}^n \sum_{s=1}^m h_{ls}^{-1} h_{lj}^{-r} h_{lk}^{-q} a_{i,p}(x) L^{(r,q)}(1) L^{(0,0)}(1)^{m-1} + \sum_{l=1}^n \gamma_l, \\
 & \gamma_l = \sum_{s=1}^m h_{ls}^{-1} h_{lj}^{-r} h_{lk}^{-q} \left[\int_{R^m} [a_{i,p}(x - u_{(l)} h_{(l)}) - a_{i,p}(x)] \mathbf{K}^{(r)}(u_{(l)}) \mathbf{K}^{(q)}(u_{(l)}) du_{(l)} - \right. \\
 & \left. - \int_{R^m} a_i(x - u_{(l)} h_{(l)}) \mathbf{K}^{(r)}(u_{(l)}) du_{(l)} \int_{R^m} a_p(x - u_{(l)} h_{(l)}) \mathbf{K}^{(q)}(u_{(l)}) du_{(l)} \right].
 \end{aligned}$$

По теореме Лебега о мажорируемой сходимости при $l \rightarrow \infty$ $\gamma_l = o(1)$.

Согласно условию (12)

$$\begin{aligned}
 & \sum_{l=1}^n \sum_{s=1}^m h_{ls}^{-1} h_{lj}^{-r} h_{lk}^{-q} = \\
 & = S(-m-r-q) \prod_{s=1}^m h_{ns}^{-1} h_{nj}^{-r} h_{nk}^{-q} + o(\|h_{(n)}\|^{-(m+r+q)}).
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следствие (дисперсия). Пусть $i=p$, $j=k$, $r=q$; функции $a_{i,i}(x)$ непрерывны на R^m ,

$$\sup_x a_{i,i}^{1+}(x) < \infty, \quad \sup_x a_i^{1+}(x) < \infty;$$

$$\int |K^{(r)}(u)| du < \infty, \quad \int K(u) du = 1;$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \left[\prod_{s=1}^m h_{ls} + \left(l \prod_{s=1}^m h_{ls} h_{lj}^{2r} \right)^{-1} \right] = 0.$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 D(a_m^{(rj)}(x)) &= B_{i,i}^{(r,r)} S(-m-2r) \left(n \prod_{s=1}^m h_{ns} h_{nj}^{2r} \right)^{-1} + \\
 &+ o(n^{-1} \|h_{(n)}\|^{-(m+2r)}).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Из полученных результатов видно, что выбором последовательности векторов $(h_{(n)})$ можно повысить скорость сходимости СКО оценок $a_m^{(rj)}(x)$ к нулю. В этом случае $(h_{(n)})$, вообще говоря, будут зависеть от $i=\overline{1, s+1}$, $j=\overline{1, m}$, $r=0, 1$. Обозначим СКО оценок базовых функционалов и их производных $u^2(a_m^{(rj)}(x)) = D(a_m^{(rj)}(x)) + b^2(a_m^{(rj)}(x))$.

Теорема (СКО). Если выполнены условия леммы 3 и следствия, то для оптимальных по скорости сходимости последовательности $(h_{(n)}^{(rj)})$ и СКО

$$u^2 \left(a_m^{(rj)}(x) \Big|_{h_{(n)}^{(rj)} = h_{(n)}^{(rj)o}} \right) = u^2(a_{in}^{(rj)o}(x))$$

справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \|h_{(n)}^{(rj)o}\| &= O \left(n^{-\frac{1}{m+2(v+r)}} \right), \\ u^2(a_{in}^{(rj)o}(x)) &= O \left(n^{-\frac{2v}{m+2(v+r)}} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\begin{aligned} u^2(a_m^{(rj)}(x)) &= B_{t,t}^{(r,x)} S(-m-2r) \left(n \prod_{l=1}^m h_{nl} h_{nj}^{2r} \right)^{-1} + \\ &+ \left(\sum_{l=1}^m S(v) \omega_{nl}^{(rj)}(x) h_{nl}^v \right)^2 + \\ &+ o(n^{-1} \|h_{(n)}\|^{-(m+2r)} + \|h_{(n)}\|^{2v}). \end{aligned} \quad (15)$$

Дифференцируя главную часть СКО по h_{nl} и приравнявая полученные выражения к нулю, получаем первую формулу (14); учитывая полученный результат в (15), получаем вторую формулу (14).

Из теоремы следует, что при $v \rightarrow \infty$ среднеквадратическое отклонение для оптимальных по скорости сходимости оценок ведет себя так же, как для параметрических оценок. Таким образом, выбором ядра можно улучшать скорость сходимости в среднеквадратическом оценок (6) за счет повышения скорости сходимости к нулю смещения. Впервые эту проблему для ядерных оценок плотностей поставил и решил М. Бартлетт [19]. Заметим, что при $v > 2$ ядра будут знакопеременными, т. е. не обладающими характеристическими свойствами плотности (неотрицательность и нормировка на 1).

Асимптотические свойства полурекуррентных ядерных оценок подстановки функционалов (1) будут рассмотрены далее.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Конаков В.Д. Непараметрическое оценивание условных и частных моментов // Теория вероятностей и ее применения. – 1973. – Т. 18. – Вып. 2. – С. 440–442.
2. Konakov V.D. Asymptotic properties of some functions of nonparametric estimates of a density function // J. Multiv. Anal. – 1973. – V. 3. – № 4. – P. 454–468.
3. Алексеев В.Г. О непараметрических оценках кривых и поверхностей регрессии // Автоматика и телемеханика. – 1988. – № 7. – С. 81–87.
4. Надарая Э.А. Об оценке регрессии // Теория вероятностей и ее применения. – 1964. – Т. 19. – Вып. 1. – С. 147–149.
5. Bosq D., Cheze-Payaud N. Optimal Asymptotic Quadratic Error of Nonparametric Regression Function Estimates for a Continuous-Time Process from Sampled-Data // Statistics. – 1999. – V. 32. – P. 229–247.
6. Добровидов А.В., Кошкин Г.М. Непараметрическое оценивание сигналов. – М.: Наука, Физматлит, 1997. – 336 с.
7. Wand M.P., Jones M.C. Kernel Smoothing. – London: Chapman & Hall, 1995. – 210 p.
8. Rosenblatt M. Remarks on some nonparametric estimates of a density function // Ann. Math. Statist. – 1956. – V. 27. – № 3. – P. 832–837.
9. Parzen E. On estimation of a probability density function and mode // Ann. Math. Statist. – 1962. – V. 33. – № 3. – P. 1065–1076.
10. Jianqing Fan, Qiwei Yao. Nonlinear Time Series: Nonparametric and Parametric Methods. – New York: Springer-Verlag, 2003. – 577 p.
11. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Наука, 1979. – 496 с.
12. Кендалл М., Стьюарт Дж. Статистические методы и связи. – М.: Наука, 1973. – 900 с.
13. Wolverton C.T., Wagner T.J. Asymptotically optimal discriminant functions for pattern classification // IEEE Trans. – 1969. – V. IT-15. – № 2. – P. 258–266.
14. Banon G. Sur un estimateur non parametrique de la densite de probabilite // Rev. Statist. appl. – 1976. – V. 24. – № 4. – P. 61–73.
15. Боровков А.А. Математическая статистика. – Новосибирск: Наука, 1997. – 772 с.
16. Симахин В.А. Непараметрическая статистика. Ч. 1. Теория оценок. – Курган: Изд-во Курганского гос. ун-та, 2004. – 216 с.
17. Ahmad J.A., Lin P.E. Nonparametric sequential estimation of a multiple regression function // Bull. Math. Statist. – 1976. – V. 17. – № 1–2. – P. 63–75.
18. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. – М.: Наука, 1966. – 800 с.
19. Bartlett M.S. Statistical Estimation of Density Function // Indian. J. Statist. – 1963. – V. A25. – № 3. – P. 245–254.

Поступила 17.12.2007 г.