УДК 517.3

ДРОБНЫЙ АНАЛИЗ НА ОСНОВЕ ОПЕРАТОРА АДАМАРА

В.А. Чуриков

Томский политехнический университет
E-mail: vachurikov@list.ru

Показана возможность создания на основе оператора Адамара построения анализа, в котором порядки производных и интегралов могут принимать любые конечные вещественные значения. Рассмотрены свойства оператора Адамара. Получена общая экспонента для любых порядков интегрирования и дифференцирования с помощью оператора Адамара. Предложены формулы для обобщения тригонометрических и гиперболических функций в рамках развиваемого дробного анализа.

1. Введение

Под дробным анализом будем понимать обобщение «обычного» анализа на случай производных и интегралов любого вещественного порядка, как целочисленного, так и нецелочисленного.

Строить дробный анализ, можно используя различные подходы, многие из которых описаны в литературе [1].

Один из наиболее простых способов построения дробного анализа предложил Адамар с помощью введённого им оператора дробного дифференцирования степенных рядов [2]. Подход Адамара, названный *программой Адамара*, не получил развития, хотя он представляется более естественным и интуитивно понятным, чем многие другие подходы.

Оператор Адамара можно использовать для получения, как производных, так и интегралов любого конечного вещественного порядка и действует над некоторым классом функций. Более того, простота и логичность подхода Адамара даёт основание предполагать, что в нём заложен большой потенциал для построения *самодостаточных* направлений дробного анализа, таких же полноценного, как и традиционный анализ. Причём, возможных направлений в дробном анализе, которые можно развивать, бесконечное множество (мощности континуума), среди которых «обычный» анализ является лишь частным, вырожденным случаем, что делает его одним из самых простых вариантов дробного анализа.

2. Оператор Адамара

Определение. Оператор $d^s x$ порядка s, $s\in\mathbf{R}$ будем называть *оператором Адамара* порядка s, действующим над множеством степенных функций x^q, s, x, $q\in\mathbf{R}$, s, q=const [2]

$$d^s x : x^q = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1+s)} x^{q+s}. \qquad (1)$$

Величину $\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1+s)}$ будем называть *коэффициентом оператора Адамара*, в котором $\Gamma(...)$ гамма-функция Эйлера [3].

Такие операторы обычно называют операторами дробного интегрирования или дробного дифференцирования. Операторы Адамара тоже являются операторами дробного интегрирования или дробного дифференцирования в зависимости от значения порядка $s\in\mathbf{R}$.

Случаи $s<0$ соответствует операторам дробного дифференцирования порядка s, которые будем обозначать, как $d^{-s}x$;

Для $s>0$, будут операторы дробного интегрирования порядка s, которые будем обозначать, как $d^{+s}x$ или $d^s x$.

В дальнейшем под дробными порядками дифференцирования и интегрирования будем понимать любые вещественные порядки $s\in\mathbf{R}$.

Определение. Операторы дифференцирования $d^{-s}x$ и интегрирования $d^q x$ будем называть *обратными* друг другу, если модули их порядков равны, $|s|=|q|$, а сами порядки имеют противоположные знаки, $s=-q$.

Из пары обратных операторов один является оператором дифференцирования, а другой оператором интегрирования.

Очевидно, что оператор нулевого порядка d^0x является обратным для самого себя, или *самообратным*.

В частности справедливо равенство $d^{-s}x\cdot d^s x=d^0x=\mathbf{1}$.

Рассмотрим важные частные случаи операторов Адамара, в зависимости от s.

В задачах с дробными операторами могут участвовать операторы с различными сочетаниями порядков операторов Адамара.

Определение. Если в рассматриваемых задачах дробного анализа участвует только обратные операторы порядков s и $-s$, или хотя бы один из них, то будем говорить о *ветви дробного анализа порядка s*.

Определение. Задачи, в которых имеют место несколько различных ветвей $\psi>1$ дробного анализа, тогда будем говорить о *смешанном дробном анализе с ψ ветвями*.

Кратко рассмотрим некоторые важные ветви дробного анализа.

Ветвь дробного анализа с оператором нулевого порядка $s=0$, представляет вырожденный случай, когда имеет место только единичный оператор $\mathbf{1}$, переводящий функции сами в себя d^0x: $x^q=\mathbf{1}\cdot x^q=x^q$.

Очевидно, что порядки операторов Адамара могут иметь как целочисленные, так и нецелочисленные значения, которые, в свою очередь могут быть рациональными и иррациональными.

Определение. Если порядки дифференцирования и интегрирования в рассматриваемой ветви дробного анализа будут принадлежать только множеству натуральных чисел $s \in \mathbf{R}$, то такой анализ будем называть *целочисленным дробным анализом*, ветви которого могут принимать чётные и нечётные значения порядков.

Важный частным случаем целочисленного дробного анализа является анализ с единичным порядком интегрирования и дифференцирования, $s=\pm 1$, т. е. традиционный анализ.

В этом случае из оператора Адамара получаются формулы дифференцирования и интегрирования степенных функций традиционного анализа: $d^{-1}x$: $x^q = qx^{q-1}$, d^1x: $x^q=(q+1)^{-1} \cdot x^{q+1}$.

Случай, когда степень функции равна -1, а порядок оператора 1, определяется, как обычно d^1x: $x^{-1}=\ln x + \mathrm{const}$.

Другие целочисленные ветви дробного анализа является ветвями целочисленных порядков оператора Адамара $s=\pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots$ Данные ветви анализа аналогичны случаю традиционного анализа ($s=\pm 1$), но не тождественны ему.

В этом случае, используя формулу $\Gamma(q+n)=q(q+1)(q+2)\ldots(q+n-1)\Gamma(q)$, $q \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, получим формулу для интегрирования

$$d^n x : x^q = ((q+1)(q+2)\ldots(q+n))^{-1} x^{q+n}.$$

Формулу дифференцирования легко получить, используя формулу $\Gamma(q-n)=\Gamma(q)(q(q-1)(q-2)\ldots(q-n))^{-1}$, тогда получим

$$d^{-n} x : x^q = q(q-1)(q-2)\ldots(q-n)x^{q-n}.$$

Важными случаями дробного анализа являются ветви с рациональными порядками $s \in \mathbf{Q}$.

Определение. Операторы Адамара d^sx, у которых порядки являются рациональными числами, $s \in \mathbf{Q}$, называются *рациональными дробными операторами*.

Определение. Если порядки дифференцирования и интегрирования в рассматриваемой ветви дробного анализа будут принадлежать только множеству рациональных чисел $\mathbf{Q}$, то такой анализ будем называть *рациональным дробным анализом*.

Интересными и наиболее простыми случаями рационального анализа представляются ветви, в которых порядки операторов обратно пропорциональны натуральным числам $s=1/\lambda$, $\lambda \in \mathbf{N}$. В данном случае знаменатели λ значений порядков операторов является основным параметром данных ветвей дробного анализа.

Общими и более сложными случаями рационального анализа являются ветви, в которых порядки операторов можно представить как отношение натуральных чисел $s=\chi/\lambda$, $\chi, \lambda \in \mathbf{N}$.

Наибольшее количество ветвей дробного анализа будет в случае иррациональных порядков оператора Адамара s.

Определение. Операторы Адамара d^sx, у которых порядки s являются иррациональными числами, называются *иррациональными дробными операторами*.

Определение. Операторы Адамара, в котором действуют иррациональные дробные операторы, будем называть *иррациональным дробным анализом*.

Иррациональные ветви дробного анализа представляются наиболее сложными для исследований.

Важно так же рассматривать отдельно модули порядков операторов, а именно, больше или меньше единицы $|s|>1$ или $|s|<1$.

Определение. Два оператора порядков s и $1/q$ называются *обратными по порядку*, если произведение их порядков даёт единицу $sq^{-1}=1$.

Каждый оператор порядка s имеет *обратный по порядку оператор* со значением порядка $1/s$.

Операторы традиционного анализа $d^{\pm 1}x$ ($s=\pm 1$) являются обратными по порядку сами для себя.

Любая пара взаимно обратных по порядку операторов являются одновременно операторами дифференцирования или операторами интегрирования.

Определение. Для оператора d^sx имеется противоположный $-d^sx$, такой, что в сумме они дают нулевой оператор

$$d^sx+(-d^sx)=d^sx-d^sx=\mathbf{0}.$$

3. Свойства оператора Адамара

Производная дробного порядка от константы. В общем случае в дробном анализе производная константы не равна нулю. Константу можно представить как полином нулевой степени, или как степенную функцию, с порядком равным нулю Cx^0, где C вещественное число ($C \in \mathbf{R}$), тогда производная константы будет

$$d^{-s} x : Cx^0 = C(-s\Gamma(-s))^{-1} x^{-s}.$$

Заметим, что дробная производная константы, в общем случае, не равна нулю.

Производная дробного порядка от степенной функции. Рассмотрим некоторые важные случаи соотношений значений порядков операторов и степенных функций, когда при дробном дифференцировании получаются константы.

В случае, когда порядок оператора дифференцирования и показатель степени функции равны и имеет порядок α, $\alpha \in \mathbf{R}$

$$d^{-\alpha} x : x^{\alpha} = \alpha\Gamma(\alpha) = \mathrm{const}.$$

Интеграл дробного порядка от константы и интегральные полиномы

$$d^s x : Cx^0 = C(s\Gamma(s))^{-1} x^s + C_s(x).$$

Здесь введены функции $C_s(x) \neq 0$, которые появляются как слагаемые при интегрировании функций и являются обобщением констант интегрирования стандартного анализа.

Определение. Функции $C_s(x)$ будем называть *интегральным полиномом порядка s* для пары обратных операторов $d^s x$ и $d^{-s}x$.

Основным свойством интегральных полиномов $C_s(x)$ должно быть то, что при действии на них оператором дифференцирования $d^{-s}x$ должен получаться ноль

$$d^{-s}x\colon C_s(x)=0.$$

Используя это равенство, найдём степени членов интегрального полинома $C_s(x)$ произвольного вещественного порядка s

$$d^{-s}x : x^q = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1-s)} x^{q-s} = 0.$$

Выполнение этого равенства возможно при соблюдении двух условий

$$\Gamma(q+1)\neq 0 \text{ и } \Gamma(q+1-s)=\infty.$$

Первое выполняется при $q\neq -1, -2, -3, -4 \ldots$

Для выполнения второго условия необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$q+1-s=0, -1, -2, -3, -4 \ldots$$

Тогда получим $q=-1+s, -2+s, -3+s, -4+s \ldots = -n+s$.

Окончательно интегральный полином $C_s(x)$ для произвольных вещественных порядков s будет

$$C_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{-n+s} =$$

$$= a_1 x^{-1+s} + a_2 x^{-2+s} + a_3 x^{-3+s} + a_4 x^{-4+s} + \ldots + a_n x^{-n+s} + \ldots$$

У полиномов дробного интегрирования $C_s(x)$ бесконечное счётное множество констант интегрирования $a_1, a_2, a_3, \ldots$, которые, в общем случае, являются вещественными (или комплексными) числами.

Для произвольных целочисленных порядков операторов дифференцирования $m=1, 2, 3, \ldots$ и целочисленных показателей степеней степенных функций с показателями $k\geq 0$ и $k=0, 1, 2, 3, \ldots$, полиномы интегрирования $C_m(x)$ будут

$$d^{-m}x : x^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-m)} x^{k-m} = 0.$$

Выполнение этого равенства возможно при соблюдении двух условий.

Первое условие $\Gamma(k+1)\neq 0$ выполняется при $k\neq -1, -2, -3, -4 \ldots$

Для выполнения второго условия $\Gamma(k+1-m)=\infty$ необходимо, чтобы выполнялось равенство $k+1-m=0, -1, -2, -3, -4 \ldots$, которое можно переписать так $k=-1+m, -2+m, -3+m, -4+m \ldots$

В случае, когда выполняется условие $k+1-m\leq 0$ или когда $k\leq m-1$, тогда значения переменной в этих точках соответствуют полюсам гамма-функции, и поэтому она обращается в бесконечность. Это значит, что для случаев целочисленных порядков показателей операторов дифференцирования и полиномы интегрирования будут обрываться в случае, когда $k\leq m-1$, а степени будут ограничиваться целочисленными значениями при $k\leq m-1, m-2, m-3, \ldots 2, 1, 0$.

Окончательно получим, что для любого оператора целочисленного порядка $d^{-m}x$ полиномы интегрирования $C_m(x)$ будут иметь конечное число m слагаемых, равное порядку оператора интегрирования

$$C_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k =$$

$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_{m-2} x^{m-2} + a_{m-1} x^{m-1}.$$

Здесь даны m констант интегрирования $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{m-2}, a_{m-1} \in \mathbf{R}$.

В случае традиционного анализа, для оператора дифференцирования $d^{-1}x$ равенство выполняется для случая $k=0$. Тогда полином интегрирования будет константой $C_1(x)=a_0=\text{const}$, $a_0\in\mathbf{R}$.

В полиномах интегрирования с нецелым порядком необходимо задавать бесконечное счётное множество констант интегрирования, которые в различных зачах необходимо находить или задавать. Ряд $C_s(x)$ может быть расходящимся или сходящими, а скорости сходимости и расходимости могут быть разными. Чем быстрей сходимость, то в зависимости от условий задачи, можно ограничиться несколькими первыми членами ряда $C_s(x)$.

В случае нецелочисленных порядков s члены ряда $C_s(x)$ могут обращаться в бесконечность в точке $x=0$.

Интегральным полиномом для оператора нулевого порядка (единичного или самообратного оператора) d^0x является ноль.

В полиномах интегрирования $C_s(x)$ и $C_m(x)$ соседние слагаемые имеют показатели степеней, которые отличаются на единицу (с шагом 1).

Неопределённый интеграл дробного порядка

Из всего вышеизложенного можно ввести понятие неопределённого интеграла любого вещественного порядка от функции $f(x)$

$$d^s x : f(x) = F^{(s)}(x) + C_s(x).$$

Здесь $F^{(s)}(x)$ – первообразная порядка s функции $f(x)$.

4. Экспоненты дробных операторов

Представляется очень важным, для построения полноценного дробного анализа наличие функций имеющих при дробном интегрировании и дробном дифференцировании такие же свойства, как и экспоненты в традиционном анализе.

Традиционная экспонента, для дробных порядков оператора Адамара уже теряет своё главное свойство – не меняться при воздействии оператора дифференцирования или интегрирования (с точностью до сложения с полиномом интегрирования). В этом легко убедиться, например, продифференцировав экспоненту $\exp x$ оператором Адамара порядка 1/2, т. е., $d^{-1/2}x\colon \exp x \neq \exp x$.

Из данного примера можно сделать важный вывод, что дробный анализ, если его развивать, как полноценную математическую теорию должен иметь свои экспоненты для всех пар обратных друг другу операторов Адамара.

Прежде, чем получить экспоненты для операторов Адамара любого порядка, обратим внимание на свойства традиционной экспоненты $\exp x$.

Свойство членов ряда $a_i(x)$ экспоненты $\exp x$ при обычном дифференцировании и интегрировании (порядки операторов $s=\pm 1$) имеют следующие свойства:

При интегрировании каждый член ряда переводится в последующий d^1x: $a_i(x)=a_{i+1}(x)$.

При дифференцировании все члены ряда, кроме первого, переводятся в предыдущий $d^{-1}x$: $a_{i+1}(x)=a_i(x)$, $i\neq 1$.

Производная первого члена ряда экспоненты равна нулю $d^{-1}x$: $a_1(x)=0$, что легко получить, расписав это более подробно

$$d^{-1}x : a_1(x) = \frac{1}{\Gamma(0)}x^{-1} = \frac{x^{-1}}{\infty} = 0.$$

Последнее свойство говорит о том, что первый член ряда экспоненты пропорционален первому члену полинома интегрирования. Но ввиду того, что в традиционном анализе полиномом интегрирования является константа, то тогда первый член ряда пропорционален константе. Данной константой должна быть единица, чтобы обеспечить равенство d^1x: $a_1(x)=a_2(x)$.

Для задания экспоненты достаточно задать первый член ряда и последовательно интегрируя, получим при каждом интегрировании последующий член ряда. Описанным способом получим традиционную экспоненту

$$\exp x = (d^0x + d^1x + d^2x + d^3x + \ldots + d^nx + \ldots)x^0 =$$
$$= (1 + d^1x + d^2x + d^3x + \ldots + d^nx + \ldots)1 =$$
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} d^nx\right) : 1 = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Распространим аналогичные свойства на экспоненты любого вещественного порядка s, которые в дальнейшем будем обозначать как $\exp_s x$.

В степенном ряде экспоненты $\exp_s x$ для пары обратных дробных операторов Адамара $d^{\pm s}x$, между соседними членами имеют место соотношение при дробном интегрировании d^sx: $a_i(x)=a_{i+1}(x)$. Первым членом ряда является ненулевая функция $a_1(x)=\Gamma^{-1}(s)x^{-1+s}$, которая пропорциональна первому члену ряда полинома интегрирования $C_s(x)$, при действии на который оператора дифференцирования порядка s $d^{-s}x$, должно выполняться равенство, справедливое для традиционной экспоненты, а именно

$$d^{-s}x : \frac{x^{-1+s}}{\Gamma(s)} = \frac{1}{\Gamma(s)}\frac{\Gamma(1-1+s)}{\Gamma(1-1+s-s)}x^{-1+s-s} = \frac{1}{\infty}x^{-1} = 0.$$

Используя определение экспоненты любого вещественного порядка $s\neq 0$ можно получить, используя первый член разложения интегрального полинома $C_s(x)$, т. е. функцию $\Gamma^{-1}(s)x^{-1+s}$, которую назовём *стартовой функцией*.

Найдём экспоненты $\exp_s x$ для всех пар обратных операторов $d^{\pm s}x$ любого вещественного порядка $s\neq 0$

$$\exp_s x = (d^0x + d^sx + (d^sx)^2 + (d^sx)^3 + \ldots +$$
$$+ (d^sx)^n + \ldots)\frac{x^{-1+s}}{\Gamma(s)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(d^sx)^n\right)\frac{x^{-1+s}}{\Gamma(s)}.$$

Здесь введён символ $(d^sx)^n \equiv d^sx{:}d^sx{:}d^sx{:}\ldots d^sx{:}d^sx$, который обозначает последовательное действие n операторов дробного интегрирования на одну функцию.

После почленного дробного интегрирования получим ряд для экспоненты $\exp_s x$

$$\exp_s x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-1+ns}}{\Gamma(ns)} =$$
$$= \frac{x^{-1+s}}{\Gamma(s)} + \frac{x^{-1+2s}}{\Gamma(2s)} + \frac{x^{-1+3s}}{\Gamma(3s)} + \ldots + \frac{x^{-1+ns}}{\Gamma(ns)} + \ldots$$

Определение. Экспоненту $\exp_s x$ будем называть *дробной экспонентой*.

Дробная экспонента, по сути, представляет бесконечное множество экспонент любого конечного вещественного порядка s. Мощность этого множества равна мощности множества всех возможных порядков оператора Адамара, или мощность континуума.

Определение. Для конкретных вещественных порядков s дробную экспоненту будем называть *частными экспонентами порядка s*.

С помощью дробной экспоненты можно получить экспоненту любого вещественного порядка для любой пары обратных операторов, подставив вместо s конкретное значение модуля их порядков $|s|$ обратных операторов.

Теорема. Для каждой пары обратных операторов Адамара $d^{\pm s}x$ имеется своя частная экспонента $\exp_s x$, причём единственная и, отличная от экспонент других пар обратных операторов, или $\exp_s x=\exp_q x$, $s=q$ и $\exp_s x\neq\exp_q x$, $s\neq q$.

Интеграл порядка s от экспоненты $\exp_s x$ будет $d^{-s}x{:}\exp_s x=\exp_s x+C_s(x)$.

Дифференцируя правую часть оператором $d^{-s}x$, получим $d^{-s}x{:}(\exp_s x+C_s(x))=\exp_s x$, и в частности $d^{-s}x{:}\exp_s x=\exp_s x$.

Рассмотрим свойства дробной экспоненты.

Теорема. Ряд дробной экспонента $\exp_s x$ с порядками $s\geq 1$ является сходящимся, с радиусом сходимости R равным бесконечности ($R=\infty$).

Теорема. Ряд дробной экспоненты $\exp_s x$ с порядками $s<1$ имеют особую точку $x=0$, в которой ряд расходится, а в остальных точках являются сходящимися рядом, с радиусом сходимости R, равным бесконечности ($R=\infty$).

Заметим, что все степенные ряды с положительными целочисленными степенями в точке $x=0$ всегда сходятся [4].

На основе дробной экспоненты можно вводить функции, которые являются обобщением функций используемых в традиционном анализе. Простым примером могут служить тригонометрические и гиперболические функций, которые можно обобщить для любых конечных вещественных порядков дробного анализа s. Это можно сделать разными способами. В частности тригонометрические функции можно ввести следующим образом

$$\cos_\alpha x = \frac{1}{2}(\exp_\alpha(ix) + \exp_\alpha(-ix)),$$

$$\sin_\alpha x = \frac{1}{2i}(\exp_\alpha(ix) - \exp_\alpha(-ix)),$$

$$\mathrm{tg}_\alpha x = \frac{\sin_\alpha x}{\cos_\alpha x}, \ \mathrm{ctg}_\alpha x = \frac{\cos_\alpha x}{\sin_\alpha x},$$

$$\sec_\alpha x = \frac{1}{\cos_\alpha x}, \ \mathrm{cosec}_\alpha x = \frac{1}{\sin_\alpha x}.$$

Здесь даны обозначения тригонометрических функций порядка s: $\cos_s x$, $\sin_s x$, $\mathrm{tg}_s x$, $\mathrm{ctg}_s x$, $\sec_s x$, $\mathrm{cosec}_s x$ соответственно косинус, синус, тангенс, котангенс, секанс, косеканс.

Гиперболические функции можно ввести так

$$\mathrm{ch}_\alpha x = \frac{1}{2}(\exp_\alpha(x) + \exp_\alpha(-x)),$$

$$\mathrm{sh}_\alpha x = \frac{1}{2}(\exp_\alpha(x) - \exp_\alpha(-x)),$$

$$\mathrm{th}_\alpha x = \frac{\mathrm{sh}_\alpha x}{\mathrm{ch}_\alpha x}, \ \mathrm{cth}_\alpha x = \frac{\mathrm{ch}_\alpha x}{\mathrm{sh}_\alpha x},$$

$$\mathrm{sch}_\alpha x = \frac{1}{\mathrm{ch}_\alpha x}, \ \mathrm{csch}_\alpha x = \frac{1}{\mathrm{sh}_\alpha x}.$$

Здесь гиперболические функции порядка s: $\mathrm{ch}_s x$, $\mathrm{sh}_s x$, $\mathrm{th}_s x$, $\mathrm{cth}_s x$, $\mathrm{sch}_s x$, $\mathrm{csch}_s x$, соответственно косинус, синус, тангенс, котангенс, секанс, косеканс.

Определение. Функции $\cos_s x$, $\sin_s x$, $\mathrm{tg}_s x$, $\mathrm{ctg}_s x$, $\sec_s x$, $\mathrm{cosec}_s x$ будем называть дробными тригонометрическими функциями, а $\mathrm{ch}_s x$, $\mathrm{sh}_s x$, $\mathrm{th}_s x$, $\mathrm{cth}_s x$, $\mathrm{sch}_s x$, $\mathrm{csch}_s x$ – дробными гиперболическими функциями порядка s.

При таком определении дробные тригонометрические и гиперболические функции в частном случае, когда порядок их $s=1$, дают соответствующие традиционные тригонометрические и гиперболические функциям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сашко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка. – Минск: Наука и техника, 1987. – 687 с.
2. Hadamar J. Essai sur l'etude des fonctions donnees par leur development de Taylor // J. math. pures et appl. – 1892. – V. 8. – Ser. 4. – P. 101–186.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. – М.: Наука, 1973. – 295 с.
4. Кудявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1. – М.: Высшая школа, 1981. – 687 с.

Поступила 07.11.2007 г.