$C_{-s_i}(x_i)$ - *полиномы дифференцирования* порядка s_i по переменной x_i, а $C_{s_i}(x_i)$ - *полиномы интегрирования* порядка s_i по переменной x_i. Полиномы интегрирования являются обобщениями констант интегрирования классического анализа, а полиномы дифференцирования аналогами полиномов интегрирования для операции дробного дифференцирования.

Если такой оператор действует в пространстве одномерных степенных функций, то он совпадает с *d*-оператором комплексных порядков вещественной переменной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чуриков В.А. Многомерный локальный оператор дробного интегрирования и дробного дифференцирования вещественных порядков вещественных переменных // Сборник научных трудов X Международной конференции студентов и молодых учёных: Перспективы развития фундаментальных наук. Россия, Томск, НИ ТПУ, 23 – 26 апреля 2013 г. (X International Conference “Prospects of fundamental sciences development”. Russia, Tomsk, April 23 – 26, 2013). – Томск: Изд-во ТПУ, – 2013, – С. 638–640.

МНОГОМЕРНЫЙ ∂-ОПЕРАТОР ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ПОРЯДКОВ НЕСКОЛЬКИХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В.А. Чуриков
Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Томск, пр. Ленина, д. 30, 634050
E-mail: vachurikov@list.ru

MULTIVARIATE ∂-OPERATOR INTEGRODIFFERENTIATION COMPLEX ORDER SEVERAL MATERIAL VARIABLE

V.A. Churikov
Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050
E-mail: vachurikov@list.ru

It is entered multivariate local operator fractional integration and fractional differentiation complex order material variable.

Для развития многомерного анализа необходим *многомерный оператор дробного интегродифференцирования*, которые действуют, на любое возможное число переменных многомерных степенных функций, а не на одну переменную, как в случае *локального ∂-оператор комплексных порядков одной вещественной переменной действующий в пространствах многомерных функций*.

Определение. Композицию (произведение) конечного количества *локальных ∂-операторов комплексных порядков одной вещественной переменной*, каждый из которых действует по одной вещественной переменной из переменных $x_1, x_2, ..., x_h$, будем называть *многомерным ∂-оператором интегродифференцирования нескольких вещественных переменных* $x_1, x_2, ..., x_h$ *комплексных порядков*

$s_1, s_2, ..., s_h; s_i \in$ [redacted]$nst; \infty >| s_i | \geq 0$

$$\partial^{\pm s_1,\pm s_2,\ldots,\pm s_h}(x_1,x_2,\ldots,x_h)\equiv\prod_{i=1}^{h}\partial^{\pm s_i}x\equiv\partial^{\pm s_1}x_1:\partial^{\pm s_2}x_2:\partial^{\pm s_3}x_3:\ldots\partial^{\pm s_{h-1}}x_{h-1}:\partial^{\pm s_h}x_h.$$

Здесь введено обозначение многомерного локального оператора дробного интегродифференцирования:

$$\partial^{\pm s_1,\pm s_2,\ \ldots,\pm s_h}(x_1,x_2,\ldots,x_h).$$

Через *h*-мерные операторы можно выразить операторы любой размерности *l*, для которой 1≤*l*≤*h*.

Определение. Композицию конечного числа частных локальных ∂-операторов дробного дифференцирования и дробного интегрирования по вещественным переменным $x_1,x_2,\ldots,x_l$ будем называть *l-мерным локальным оператором дробного интегродифференцирования* порядков $s_1,s_2,\ldots,s_l;h\ge l\ge 1;s_i\in$ [redacted]nst; $\infty>|s_i|>0$.

Можно ввести *l*-мерный оператор (*l*≤*h*) как произведение *l* одномерных операторов или как *h*-мерный оператор, у которого *l* порядков отличны от нуля, а остальные равны нулю

$$\partial^{-s_i}x_i=\partial^{\pm 0_1,\pm 0_2,\ldots,\pm s_i,\ldots,\pm 0_h}(x_1,x_2,\ldots,x_h)=\partial^{\pm 0_1}x_1:\partial^{\pm 0_2}x_2:\ldots\partial^{\pm s_i}x_3:\ldots\partial^{\pm 0_{h-1}}x_{h-1}:\partial^{\pm 0_h}x_h.$$

В частности, можно ввести одномерный оператор, который можно выразить через *h*-мерный оператор. В этом случае все порядки интегродифференцирования *h*-мерного оператора будут равны нулю, кроме *i*-го

$$\partial^{-s_i}x_i=\partial^{\pm 0_1,\pm 0_2,\ldots,\pm s_i,\ldots,\pm 0_h}(x_1,x_2,\ldots,x_h)=\partial^{\pm 0_1}x_1:\partial^{\pm 0_2}x_2:\ldots\partial^{\pm s_i}x_3:\ldots\partial^{\pm 0_{h-1}}x_{h-1}:\partial^{\pm 0_h}x_h.$$

Частными случаями многомерных операторов являются многомерные операторы дифференцирования и операторы интегрирования многомерной функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_h)$.

Определение. Композицию конечного количества одномерных ∂-операторов дробного дифференцирования по вещественным переменным $x_1,x_2,\ldots,x_h$, будем называть *многомерным локальным оператором дробного дифференцирования* порядков $s_1,s_2,\ldots,s_h$

$$\partial^{-s_1,-s_2,\ldots,-s_h}(x_1,x_2,\ldots,x_h)\equiv\prod_{i=1}^{h}\partial^{-s_i}x=\partial^{-s_1}x_1:\partial^{-s_2}x_2:\partial^{-s_3}x_3:\ldots\partial^{-s_{h-1}}x_{h-1}:\partial^{-s_h}x_h.$$

Определение. Композицию конечного количества частных одномерных ∂-операторов дробного интегрирования по вещественным переменным $x_1,x_2,\ldots,x_h$, будем называть *многомерным локальным оператором дробного интегрирования* порядков $s_1,s_2,\ldots,s_h$.

$$\partial^{s_1,s_2,\ldots,s_h}(x_1,x_2,\ldots,x_h)\equiv\partial^{s_1}x_1:\partial^{s_2}x_2:\partial^{s_3}x_3:\ldots\partial^{s_{h-1}}x_{h-1}:\partial^{s_h}x_h\equiv$$
$$\equiv\prod_{i=1}^{h}\partial^{s_i}x\equiv\frac{\partial^{s_1}}{\partial x_1^{s_1}}\frac{\partial^{s_2}}{\partial x_2^{s_2}}\ldots\frac{\partial^{s_i}}{\partial x_i^{s_i}}\ldots\frac{\partial^{s_{h-1}}}{\partial x_{h-1}^{s_{h-1}}}\frac{\partial^{s_h}}{\partial x_h^{s_h}}.$$

При многомерном дробном дифференцировании функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_h)$ порядков $s_1,s_2,\ldots,s_h$, по переменным $x_1,x_2,\ldots,x_h$ действуем на неё повторными частными производными соответствующих дробных порядков по соответствующим переменным

$$\partial^{-s_1,-s_2,\ldots,-s_h}(x_1,x_2,\ldots,x_h):f(x_1,x_2,\ldots,x_h)\equiv\partial^{-s_1}x_1:\partial^{-s_2}x_2:\partial^{-s_3}x_3:\ldots\partial^{-s_{h-1}}x_{h-1}:\partial^{-s_h}x_h:f(x_1,x_2,\ldots,x_h)\equiv$$
$$\equiv\prod_{i=1}^{h}\partial^{-s_i}x:f(x_1,x_2,\ldots,x_h)=f^{(s_1,s_2,\ldots,s_h)}(x_1,x_2,\ldots,x_h)+C_{-s_1,-s_2,\ldots,-s_h}(x_1,x_2,\ldots,x_h).$$

Здесь $f^{(s_1,s_2,\ldots,s_h)}(x_1,x_2,\ldots,x_h)$ - *многомерная дробная производная* порядков $s_1,s_2,\ldots,s_h$ по переменным

$x_1, x_2, \dots, x_h$; $C_{-s_1,-s_2,\dots,-s_h}(x_1, x_2, \dots, x_h)$ - *многомерные полиномы дифференцирования*.

Многомерный локальный оператор дробного интегрирования по переменным $x_1, x_2, \dots, x_h$ порядков $s_1, s_2, \dots, s_h$ действующий на многомерную функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_h)$, можно представлять с помощью более привычных обозначений

$$\partial^{s_1, s_2, \dots, s_h}(x_1, x_2, \dots, x_h) : f(x_1, x_2, \dots, x_h) \equiv \underbrace{\int\int \dots \int}_{h} f(x_1, x_2, \dots, x_h) \underbrace{d^{s_1} x_1 d^{s_2} x_2 d^{s_3} x_3 \dots d^{s_{h-1}} x_{h-1} d^{s_h} x_h}_{h} =$$
$$= F^{(s_1, s_2, \dots, s_h)}(x_1, x_2, \dots, x_h) + C_{s_1, s_2, \dots, s_h}(x_1, x_2, \dots, x_h).$$

Здесь $F^{(s_1, s_2, \dots, s_h)}(x_1, x_2, \dots, x_h)$ - *многомерная базовая первообразная* функции $f(x_1, x_2, \dots, x_h)$ по переменным $x_1, x_2, \dots, x_h$ дробных порядков $s_1, s_2, \dots, s_h$; $C_{s_1, s_2, \dots, s_h}(x_1, x_2, \dots, x_h)$ - *многомерный полином интегрирования* переменных $x_1, x_2, \dots, x_h$ дробных порядков $s_1, s_2, \dots, s_h$.

Интегропроизводные комплексных порядков $s_1, s_2, \dots, s_h$ по переменным $x_1, x_2, \dots, x_h$ будем определять как дифференцирование по одним переменным и интегрирование по другим переменным

$$\partial^{\pm s_1, \pm s_2, \dots, \pm s_h}(x_1, x_2, \dots, x_h) : f(x_1, x_2, \dots, x_h) \equiv$$
$$\equiv \prod_{i=1}^{h} \partial^{-s_i} x \equiv \partial^{\pm s_1} x_1 : \partial^{\pm s_2} x_2 : \partial^{\pm s_3} x_3 : \dots \partial^{\pm s_{h-1}} x_{h-1} : \partial^{\pm s_h} x_h : f(x_1, x_2, \dots, x_h) =$$
$$= f^{(\pm s_1, \pm s_2, \dots, \pm s_h)}(x_1, x_2, \dots, x_h) + C_{\pm s_1, \pm s_2, \dots, \pm s_h}(x_1, x_2, \dots, x_h) =$$
$$= F^{(\text{[redacted]}}, x_2, \dots, x_h) + C_{\pm s_1, \pm s_2, \dots, \pm s_h}(x_1, x_2, \dots, x_h).$$

Здесь $\partial^{\pm s_1, \pm s_2, \dots, \pm s_h}(x_1, x_2, \dots, x_h)$ - *многомерный оператор смешанного интегродифференцирования* порядков $s_1, s_2, \dots, s_h$ по переменным $x_1, x_2, \dots, x_h$, в котором, если перед порядком стоит знак «+», то по соответствующей переменной производится интегрирование, а если знак «-», то по соответствующей переменной производится дифференцирование; $f^{(\pm s_1, \pm s_2, \dots, \pm s_h)}(x_1, x_2, \dots, x_h) \equiv F^{(\text{[redacted]}}, x_2, \dots, x_h)$ - *многомерная базовая интегропроизводная* функции $f(x_1, x_2, \dots, x_h)$ по переменным $x_1, x_2, \dots, x_h$ дробных порядков $s_1, s_2, \dots, s_h$, в которых если перед порядками стоит знак «+», то по соответствующей переменной данная функция является первообразной, а если знак «-», то по соответствующей переменной данная функция является производной; $C_{\pm s_1, \pm s_2, \dots, \pm s_h}(x_1, x_2, \dots, x_h)$ - *многомерный полином интегриродифференцирования* по переменным $x_1, x_2, \dots, x_h$ дробных порядков $s_1, s_2, \dots, s_h$. Здесь аналогично, если перед порядком стоит знак «-», то по соответствующей переменной полином будет полиномом дифференцирования, а если знак «+», то полиномом интегрирования.

Для введённого оператора справедливо утверждение.

Теорема. *Многомерный локальный оператор дробного дифференцирования* при действии на многомерную степенную функцию, инвариантен относительно перестановки в нём частных локальных ∂-операторов дробного дифференцирования по разным переменным, с точностью до сложения с полиномами интегродифференцирования.

Из данной теоремы следует, что любая последовательность ∂-операторов интегродифференцирования действующих по одной переменной

$$\partial^{\pm s_1, \pm s_2, ..., \pm s_h}(x_1, x_2, ..., x_h) : x_1^{q_1} x_2^{q_2} ... x_h^{q_h} = \prod_{i=1}^{h} \partial^{-s_i} x : x_1^{q_1} x_2^{q_2} ... x_h^{q_h},$$

будет приводить к одному результату в приближении нулевых полиномов интегродифференцирования.

Многомерный ∂-оператор интегродифференцирования комплексных порядков нескольких вещественных переменных является основным для развития *многомерного локального ∂-анализа* постоянных комплексных порядков, вещественных переменных, который обобщает одномерный локальный d-анализ [1]. Многомерный локальный ∂-анализ может найти применение для описания многомерных гомогенных фракталов у которых размерности по разным координатам постоянны и в общем случае отличны друг от дуга, а также физико-химических и иных процессов проходящих в таких фракталах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чуриков В.А. 1. Дополнительные главы анализа. Дробное интегрирование и дробное дифференцирование на основе d-оператора: учебное пособие . – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, – 2010. – 118 с.

СЕМЕЙСТВО ФРАНКА АССОЦИАТИВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ МНОЖЕСТВ СОБЫТИЙ

Л.Ю. Шангареева
Научный руководитель: доцент, к.ф.-м.н. Д.В. Семенова
Сибирский Федеральный Университет, Институт математики и фундаментальной информатики
Россия, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, 660041
E-mail: mizkuzy@yandex.ru

FRANK FAMILY OF ASSOCIATIVE RANDOM EVENT SETS

L.Yu. Shangareeva
Scientific Supervisor: Docent, PhD D.V. Semenova
Siberian Federal University, Russia, Krasnoyarsk, Svobodny str., 79, 660041
E-mail: mizkuzy@yandex.ru

In this work the Frank's family of associative eventological distributions of random sets of events are entered on the basis of known parametrical family of triangular norms. It is developed two theorems. In the first theorem formula is obtained and it determines associative random Frank's set with E-distribution of the II genre. In the second theorem it is determined N-ary covariations.

Многие из статистических систем природы и общества можно определить как случайное множество событий, образующих своеобразную структуру статистических взаимосвязей случайных событий друг с другом. Случайное множество событий — это случайный элемент со значениями из множества всех подмножеств конечного множества выделенных событий. Основная идея современной теории случайных множеств состоит в том, что структура статистических взаимозависимостей подмножеств конечного