БЫСТРАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Калиновский И.А.
Научный руководитель: д.т.н., профессор Спицын В.Г.
Томский политехнический университет, 634050, Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30
E-mail: kua_21@mail.ru

Введение

Фильтрация является одной из базовых операций в обработке изображений и сигналов. Под фильтрацией понимают преобразование исходного сигнала с целью выделения и/или подавления определенных частот этого сигнала. Частным случаем фильтрации является линейная пространственная фильтрация, используемая для удаления шумов, сглаживания и выделения особенностей. Пространственная фильтрация изображения x размера $M\times N$ заключается в его свертке с некоторой прямоугольной матрицей h (ядром свертки) размера $U\times V$, состоящей из коэффициентов фильтра:

$$y_{i,j}=\sum_{u=0}^{U-1}\sum_{v=0}^{V-1}x_{i-u,j-v}\cdot h_{u,v},\ i=\overline{0,M-1},\ j=\overline{0,N-1} \qquad (1)$$

Число арифметических операций для вычисления свертки по формуле (1) составляет $2MNUV$. Таким образом, свертка имеет высокую вычислительную сложность для ядер большого размера, что послужило причиной поиска более эффективных алгоритмов для ее вычисления.

Самый распространенный метод быстрого вычисления двумерной свертки (1) основан на теореме о свертке:

$$F(x*h)=F(x)\cdot F(h),$$

где F – оператор Фурье, следовательно:

$$y=x*h=F^{-1}\big(F(x)\cdot F(h)\big). \qquad (2)$$

Применение алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) позволяет вычислить свертку (2) за $MN\big(C\cdot 2\log(MN)+1\big)$ операций (вычисление $F(h)$ не учитывается). Нижняя оценка константы C неизвестна, на сегодняшний день для лучшего алгоритма $C\approx 34/9$ (S. Johnson, Signal Processing, IEEE, 55 (1), 111–119, 2007).

Одним из недостатков алгоритма БПФ является использование комплексной арифметики и относительно большой расход памяти. В тоже время существуют другие подходы к уменьшению числа операций при вычислении двумерных сверток. Один из таких методов, предложенный Нуссбаумером [1, стр. 137], основан на свойствах циклической свертки и алгебре полиномов.

Полиномиальные преобразования

Введем понятие циклической (круговой) свертки. В случае циклической свертки предполагается, что дискретные сигналы x и h – периодические с одинаковым периодом. Если x и h представлены двумерными массивами $N\times N$, то циклическая свертка $y_{u,l}$ представляет собой:

$$y_{u,l}=\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}x_{u-n,l-m}\cdot h_{n,m},\ u,l=\overline{0,N-1}. \qquad (3)$$

Можно заметить, что если дополнить нулями ядро линейной свертки h до размера изображения и вычислить циклическую свертку (3), то ее отсчеты совпадут с отсчетами линейной свертки в $(M\text{-}U+1)\times(N\text{-}V+1)$ точках. Преимущество такого подхода заключается в том, что применение полиномиальной арифметики и полиномиальных преобразований Нуссбаумера позволяет построить алгоритм вычисления свертки (3) с минимальным числом умножений.

Свертка (3) может быть представлена в виде одномерной свертки полиномов по модулю Z^N-1:

$$Y_l(Z)\equiv\sum_{m=0}^{N-1}H_m(Z)X_{l-m}(Z)\bmod\left(Z^N-1\right),$$

$$H_m(Z)=\sum_{n=0}^{N-1}h_{n,m}Z^n,\ m=\overline{0,N-1}, \qquad (4)$$

$$X_r(Z)=\sum_{s=0}^{N-1}x_{s,r}Z^s,\ r=\overline{0,N-1}.$$

Отсчеты $y_{u,l}$ являются коэффициентами при степенях Z^u в $Y_l(Z)$:

$$Y_l(Z)=\sum_{u=0}^{N-1}y_{u,l}Z^u,\ l=\overline{0,N-1}.$$

Если $N=q$, q – простое число, то $\left(Z^q-1\right)$ является произведением двух неприводимых над полем вещественных чисел полиномов:

$$Z^q-1=(Z-1)P(Z),$$

$$P(Z)=Z^{q-1}+Z^{q-2}+\ldots+1.$$

В этом случае, используя китайскую теорему об остатках (КТО) [1], $Y_l(Z)$ можно записать как:

$$Y_l(Z)\equiv S_1(Z)Y_{1,l}(Z)+S_2(Z)Y_{2,l}\bmod\left(Z^q-1\right),$$

$$Y_{1,l}(Z)\equiv Y_l(Z)\bmod P(Z), \qquad (5)$$

$$Y_{2,l}(Z)\equiv Y_l(Z)\bmod(Z-1). \qquad (6)$$

$S_j(Z)$ определяется из формул:

$$S_j(Z)\equiv T_j(Z)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{2}P_i(Z),\ j=1,2,$$

$$T_j(Z)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{2}P_i(Z)\equiv 1\bmod P_j(Z).$$

Так как $Y_{2,l}(Z)$ (6) определено по модулю $(Z-1)$, то $Y_{2,l}(Z)$ есть сверточное произведение скаляров $H_{2,m}$ и $X_{2,r}$, полученных из (4) при Z=1:

$$Y_{2,l}(Z)=\sum_{m=0}^{q-1}H_{2,m}X_{2,l-m}Z^{m},\ l=\overline{0,q-1},$$
$$H_{2,m}=\sum_{n=0}^{q-1}h_{n,m},\ X_{2,r}=\sum_{s=0}^{q-1}x_{s,r}. \quad (7)$$

Для вычисления $Y_{1,l}(Z)$ (5) Нуссбаумер предложил взаимно-обратные полиномиальные преобразования (ПП) $\bar{H}_k(Z)$ и $H_{1,l}(Z)$, имеющее такую же структуру, как и ДПФ, но в которых комплексные экспоненты заменены на степени переменной Z и все операции выполняются по модулю $P(Z)$:

$$\bar{H}_k(Z)\equiv\sum_{m=0}^{q-1}H_{1,m}(Z)Z^{mk}\bmod P(Z),\ k=\overline{0,q-1},$$
$$H_{1,m}(Z)\equiv H_m(Z)\bmod P(Z), \quad (8)$$

$$H_{1,l}(Z)\equiv\frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}\bar{H}_k(Z)Z^{-lk}\bmod P(Z),\ l=\overline{0,q-1}. \quad (9)$$

Свойства ПП позволяют получить $Y_{1,l}(Z)$ путем вычисления прямого ПП (8) для полиномов $H_m(Z)$ и $X_r(Z)$, затем q полиномиальных умножений $\bar{H}_k(Z)\bar{X}_k(Z)$ по модулю $P(Z)$ с последующим вычислением обратного ПП (9).

Использование быстрых алгоритмов на основе КТО [1, стр. 66] для расчета свертки (7) и произведений $\bar{H}_k(Z)\bar{X}_k(Z)$ позволяет получить отсчеты (3) за минимальное число умножений.

В общем случае рассмотренный выше алгоритм вычисления циклической свертки (3) можно построить для любого $N\in\mathbb{N}$, но для больших N удобней воспользоваться гнездовыми алгоритмами [1, стр. 43], позволяющими комбинировать несколько быстрых алгоритмов вычисления сверток меньшего размера.

Вычислительный эксперимент

На основании подсчета числа операций, требуемых для свертки изображения $M\times N$ с ядром $U\times V$ через $L\times L$-точечную циклическую свертку, был сделан вывод о том, что оптимальное значение L=36, т.к. в этом случае использование ПП позволяет произвести расчет с наименьшим числом операций на отсчет свертки. При этом алгоритм вычисления строится как комбинация алгоритмов ПП для L=4 и L=9 с помощью гнездового алгоритма. Вычисление линейной свертки для больших изображений (N, M > L) выполняется с помощью одного из методов секционирования – перекрытия с отбрасыванием.

В таблице приведено сравнение сложности вычисления свертки по формулам (1), (2) (C=3,8) и алгоритма ПП (L=36) для картинки 1920×1080 pix.

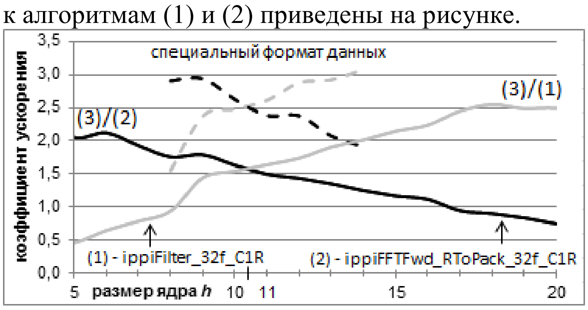
Ядро h	Прямой	БПФ	ПП
3×3	**38×10^6**	331×10^6	82×10^6
9×9	336×10^6	331×10^6	**120×10^6**
21×21	1829×10^6	**331×10^6**	364×10^6

Несмотря на преимущество ПП над БПФ для некоторого диапазона размеров ядер свертки этот метод не получил широкого распространения. Авторам не удалось найти его реализацию в специализированных библиотеках для высокопроизводительных вычислений, например Intel IPP и AMD APP. Тем не менее теоретическая оценка показывает увеличение производительности вычислений в 2,8 раза, что имеет важное значение для обработки сигналов в реальном времени. Поэтому авторами была осуществлена реализация этого метода с целью оценки его эффективности.

Аппаратная платформа. Процессор Intel Core i7-3610QM (Ivy Bridge). На данный момент компания Intel выпускает самые производительные решения на рынке процессоров. Процессоры с микроархитектурой Ivy Bridge являются суперскалярными и поддерживают набор SIMD инструкций AVX, позволяющих выполнять операции с 256 битными векторными регистрами.

Язык программирования. Для того чтобы максимально задействовать все возможности процессора алгоритм вычисления свертки (3) был реализован на языке ассемблера (inline assembler для C++) с использованием AVX инструкций. Была проведена оптимизация кода с целью максимально эффективного использования имеющихся 16-ти векторных YMM регистров. Отметим, что при использовании intrinsic-функций и опций автоматической векторизации компилятора Intel C++ Compiler 13.0 генерируется менее эффективный код для данного алгоритма.

Производительность. При сравнении производительности вычислительных алгоритмов очень важно выбрать правильный эталон. Для процессоров Intel таким эталоном является набор библиотек IPP (Integrated Performance Primitives). IPP 8.0 содержит высокопроизводительные функций из различных областей науки, оптимизированные для Intel CPU, в т.ч. функции фильтрации изображений и БПФ. Отношение времени фильтрации изображения (1920×1080 pix, одинарная точность, один поток) по алгоритму (3) к алгоритмам (1) и (2) приведены на рисунке.



Результаты тестирования показывают, что алгоритм фильтрации изображений на основе ПП является до 1,5 раза более производительным (до 2,5 раз, если данные представлены в специальном формате) для ядер h из интервала [9×9, 16×16] по сравнению с прямым вычислением свертки и методом БПФ. Поэтому алгоритмы ПП могут найти применение в задачах реального времени.

Список литературы

1) Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1985. – 248 с.: ил.