$$k_\alpha = k_{\alpha|A}(\lambda) + k_{\alpha|S}(\tau) \approx \frac{\eta_\alpha \mathrm{N_A}}{\mathrm{A}_\alpha}\left(B_\alpha Z_\alpha^4 \lambda^3 + \frac{8\pi\ e^4 \mathrm{Z}_\alpha}{3m^2c^4} \right),$$

$$k_{1-\alpha} = k_{1-\alpha|A}(\lambda) + k_{1-\alpha|S}(\tau) \approx \frac{\eta_{1-\alpha} \mathrm{N_A}}{\mathrm{A}_{1-\alpha}}\left(B_{1-\alpha} Z_{1-\alpha}^4 \lambda^3 + \frac{8\pi\ e^4 \mathrm{Z}_{1-\alpha}}{3m^2c^4} \right).$$

Здесь $k_{\alpha|A}(\lambda)$ и $k_{1-\alpha|A}(\lambda)$ коэффициенты поглощения связанные с взаимодействием рентгеновского излучения и внутренних электронов оболочек атомов фрактала и сопряжённого фрактала (внутренний фотоэффект); $k_{\alpha|S}(\tau)$ и $k_{1-\alpha|S}(\tau)$ коэффициенты рассеяния для материала фрактала и сопряжённого фрактала; B_α и $B_{1-\alpha}$ полуэмпирические коэффициенты, зависящие от длины волны фотонов и от атомной структуры вещества фрактала и сопряжённого фрактала [3]; Z_α и $Z_{1-\alpha}$ заряды ядер элементов из которых состоит фрактал и сопряжённый фрактал; η_α и $\eta_{1-\alpha}$ плотности материала фрактала и сопряжённого фрактала; $\mathrm{N_A}$ - число Авогадро; A_α и $\mathrm{A}_{1-\alpha}$ веса одного грамм-атома (атомный вес) вещества фрактала и сопряжённого фрактала; e - заряд электрона; m - масса электрона; c - скорость света.

Подставив полученные выражения для коэффициентов k_α и $k_{1-\alpha}$ в (2) и получим закон БЛБ описывающий прохождение жёсткого рентгеновского излучения через среду, состоящую из двух гомогенных и ортогональных фракталов

$$I = I_0 \exp\left[-\left\{ \tau_\alpha \alpha \left(\frac{\eta_\alpha \mathrm{N_A}}{\mathrm{A}_\alpha}\left(B_\alpha Z_\alpha^4 \lambda^3 + \frac{8\pi\ e^4 \mathrm{Z}_\alpha}{3m^2c^4} \right)\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \tau_{1-\alpha}(1-\alpha)\frac{\eta_{1-\alpha} \mathrm{N_A}}{\mathrm{A}_{1-\alpha}}\left(B_{1-\alpha} Z_{1-\alpha}^4 \lambda^3 + \frac{8\pi\ e^4 \mathrm{Z}_{1-\alpha}}{3m^2c^4} \right) \right\}(x - x_0) \right].$$

Для рассматриваемой задачи с большой точностью можно принять $\tau_{1-\alpha} = \tau_{1-\alpha} = 1$.

Литература.

1. Ахманов С. А., Никитин С. Ю. Физическая оптика. 2-е изд. М.: Из-во МГУ; Наука, 2004. 656 с.
2. Чуриков В.А. Замечания по поводу дробной размерности при описании процессов во фракталах // Математика и математическое моделирование: Сборник материалов VII всероссийской молодежной научно-инновационной школы (г. Саров, СарФТИ НИЯУ МИФИ, 16 – 19 апреля 2013 г.) – Саров: СарФТИ НИЯУ МИФИ, – 2013, – С. 59.
3. Чуриков В.А. Краткое введение в дробный анализ целочисленных порядков. – Томск: Изд-во ТПУ,- 2011. – 72 с.
4. Чуриков В.А. Замечания о методе разделения потоков без обмена при описании физических процессов на фракталах // Математика и математическое моделирование: Сборник материалов VII всероссийской молодежной научно-инновационной школы (г. Саров, СарФТИ НИЯУ МИФИ, 16 – 19 апреля 2013 г.) – Саров: СарФТИ НИЯУ МИФИ, – 2013, – С. 54–55.
5. Блохин М. А. Физика рентгеновских лучей.— М.: ГИТТЛ. 1957.— 518 с.

ЗАКОН ОМА И ЗАКОН ДЖОУЛЯ – ЛЕНЦА ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПРОВОДНИКОВ СО СТРУКТУРОЙ ГОМОГЕННЫХ ФРАКТАЛОВ

В.А. Чуриков, к. ф.-м. н., доцент
Национальный исследовательский Томский политехнический университет
634050, г. Томск, пр. Ленина, 30, тел. (3822) 563-593
E-mail: vachurikov@list.ru

В последнее время широко рассматриваются различные физические свойства материалов, которые имеют дробную, как правило, нецелочисленную размерность, которые были названы фракталами [1].

Сопротивление проводников с фрактальной структурой

Рассмотрим активное сопротивление электрического тока в проводнике с фрактальной структурой. В случае, когда фрактал анизотропный и имеет фрактальную (дробную) размерность вдоль трёх координат, $0 \le \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \le 1$ и предполагается, что фрактальные размерности вещественны и постоянны $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \mathrm{const}$. Фрактальная размерность вдоль распространения тока α_1, а размерности перпендикулярные току будут α_2, α_3, тогда анизотропное сопротивление $R_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}$ можно выразить

$$R_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} = \frac{\tau l_{\alpha_1} \rho}{S_{\alpha_2,\alpha_3}} = \frac{\tau(1+\varphi(\alpha_1)) l \rho}{\alpha_2 \alpha_3 S}.$$

Здесь $l_{\alpha_1} = (1+\varphi(\alpha_1))l$ - *эффективная длина проводника во фрактале*, которая зависит от фрактальной размерности проводника вдоль распространения тока; l – длина проводника, $l_{\alpha_1} \geq l$; $\varphi(\alpha_1)$ - некоторая функция, зависящая от размерности фрактала, и его топологических свойств. Функция $\varphi(\alpha_1)$ неотрицательна, $\varphi(\alpha_1) \geq 0$; $S_{\alpha_2,\alpha_3} = \alpha_2 \alpha_3 S$ - *эффективная площадь сечения фрактального проводника*; S – общая площадь проводника, $S_{\alpha_2,\alpha_3} < S$; ρ – удельное электрическое сопротивление проводящего вещества фрактала; τ – топологический коэффициент [2], который τ>0, если процесс может идти, и τ=0, если процесс невозможен.

Например, если фрактальный проводник не связный и состоит из мелкодисперсных несвязных проводников окружённых диэлектриком, то электропроводность в нём невозможна, тогда τ=0. Для связных проводников τ>0. Если проводник не является фрактальным, тогда все его размерности будут равны единице, т. е. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, а для коэффициента τ будет всегда справедливо τ=1.

Для фрактальных тел величины l_{α_1} и τ могут быть вычислены только исходя из геометрических и топологических свойств рассматриваемых фракталов.

Рассмотрим для примера *эффективные площади сечения фрактального проводника* для некоторых конкретных сечений проводников.

Для проводника эллиптического сечения с полуосями a и b для анизотропного случая будет

$$S_{\alpha_2,\alpha_3} = \pi \alpha_2 \alpha_3 ab,$$

и для изотропного случая, когда $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$

$$S_\alpha = \pi \alpha^2 ab.$$

Если сечение круглого проводника радиуса R, то эффективная площадь для анизотропного случая будет

$$S_{\alpha_2,\alpha_3} = \pi \alpha_2 \alpha_3 R^2,$$

и в изотропном случае

$$S_\alpha = \pi \alpha^2 R^2.$$

Когда проводник прямоугольного сечения со сторонами A и B, то эффективная площадь для анизотропного случая будет

$$S_{\alpha_2,\alpha_3} = \alpha_2 \alpha_3 AB,$$

а для изотропного случая

$$S_\alpha = \alpha^2 AB.$$

В случае проводника квадратного сечения со стороной A, эффективная площадь для анизотропного случая будет

$$S_{\alpha_2,\alpha_3} = \alpha_2 \alpha_3 A^2,$$

и когда сечение изотропно

$$S_\alpha = \alpha^2 A^2.$$

Проводимость вдоль оси x для анизотропного проводника будет

$$\lambda_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} = \frac{E}{R_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}} = \frac{S_{\alpha_2,\alpha_3}}{\tau l_{\alpha_1} \rho} = \frac{\alpha_2 \alpha_3 S}{\tau l(1+\varphi(\alpha_1))\rho}.$$

Для изотропного фрактала, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ сопротивление R_α будет

$$R_\alpha = \frac{\tau l(1+\varphi(\alpha))\rho}{\alpha^2 S}.$$

В частном случае, когда $\alpha = 1$, тогда всегда будет $\varphi(\alpha) = 0$ и τ=1, а в результате получим известное выражение для сопротивления сплошного проводника $R = \rho l / S$ [3].

Закон Ома для проводников с фрактальной структурой

Используя полученное сопротивление легко записать закон Ома в дифференциальной форме для анизотропного фрактального проводника

$$j = \frac{E}{R_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}} = \lambda_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} E = \frac{S_{\alpha_2,\alpha_3}}{\tau l_{\alpha_1} \rho} E = \frac{\alpha_2 \alpha_3 S}{\tau (1+\varphi(\alpha_1)) l \rho} E .$$

Закон Ома в дифференциальной форме для изотропного случая будет

$$j = \frac{E}{R_\alpha} = \lambda_\alpha E = \frac{S_\alpha}{\tau l_\alpha \rho} E = \frac{\alpha^2 S}{\tau (1+\varphi(\alpha)) l \rho} E .$$

Здесь j – плотность тока в проводнике; E – напряжённость электрического поля.

Случай, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta = 1$ и τ=1, соответствует традиционному закону Ома $j = E/R$ [3].

Комплексное сопротивление (импеданс) для контура с активным фрактальным сопротивлением для синусоидального тока для анизотропного случая

$$Z_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} = R_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} + iX = R_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} + i\left(wL - \frac{1}{wC}\right).$$

Здесь w - частота; $X = wL - 1/wC$ - реактивное сопротивление, где L – индуктивность и C - ёмкость, которые не являются фрактальными.

Закон Ома для переменных синусоидальных токов будет

$$j = \frac{E}{|Z_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}|} = \frac{1}{\sqrt{R^2_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} + \left(wL - \frac{1}{wC}\right)^2}} E_0 \sin(wt - \varphi) .$$

Здесь E_0 - амплитуда изменения электрического поля, φ – сдвиг фазы, который определяет коэффициент мощности, $\cos(\varphi)$

$$\cos(\varphi) = \frac{R_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}}{|Z|} = \frac{R_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}}{\sqrt{R^2_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} + \left(wL - \frac{1}{wC}\right)^2}} .$$

Сдвиг фазы можно выразить и другим способом

$$\mathrm{tg}(\varphi) = \frac{X}{R_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}} = \frac{1}{R_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}}\left(wL - \frac{1}{wC}\right).$$

Закон Джоуля - Ленца для проводников с фрактальной структурой

Используя полученное сопротивление легко записать закон Джоуля - Ленца для постоянного тока в дифференциальной форме для анизотропного фрактального проводника

$$Q = jE = \frac{E^2}{R_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}} = \lambda_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} E^2 = \frac{S_{\alpha_2,\alpha_3}}{\tau l_{\alpha_1} \rho} E^2 = \frac{\alpha_2 \alpha_3 S}{\tau (1+\varphi(\alpha_1)) l \rho} E^2 .$$

Здесь Q – теплота выделяемая проводником за единицу времени, когда по нему протекает ток.

В случае изотропного сопротивления, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$, закон Джоуля – Ленца будет

$$Q = \frac{E^2}{R_\alpha} = \lambda_\alpha E^2 = \frac{S_\alpha}{\tau l_\alpha \rho} E^2 = \frac{\alpha^2 S}{\tau (1+\varphi(\alpha)) l \rho} E^2 .$$

В частном случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta = 1$ и τ=1, получим традиционному закону Джоуля - Ленца $Q = E^2/R$ [3].

Если переменное синусоидальное напряжение приложено к двухполюснику с импедансом $Z_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} = R_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} + iX$, то проходящий ток будет меняться по тому же закону, но со сдвигом фазы φ [3]

$$E = E_0 \cos(wt); \quad j_0 = j_0 \cos(wt - \varphi).$$

Здесь j_0 - амплитуда изменения электрического тока.

Тогда закон Джоуля - Ленца в дифференциальной форме для переменного синусоидального напряжения и тока и анизотропного фрактального проводника будет

$$Q = \overline{j}\overline{E}\cos(\varphi) = \frac{j_0 E_0}{2}\cos(\varphi) = \frac{E_0^2}{2R_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}}\cos(\varphi) = \frac{\alpha_2\alpha_3 S E_0^2}{2\tau(1+\varphi(\alpha_1))l\rho}\cos(\varphi).$$

Здесь $\overline{E} = E_0/\sqrt{2}$ - среднее (действующее) значение переменного синусоидального напряжения; $\overline{j} = j_0/\sqrt{2}$ - среднее (действующее) значение переменного синусоидального тока.

В частном случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta = 1$ и τ=1, соответствует традиционному закону Джоуля - Ленца для переменного тока $Q = j_0 E_0 / 2$ [3].

Литература.

1. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 528 с.
2. Чуриков В.А. Замечания по поводу дробной размерности при описании процессов во фракталах // Сборник материалов VII всероссийской молодежной научно-инновационной школы «Математика и математическое моделирование», г. Саров, СарФТИ НИЯУ МИФИ, 16 – 19 апреля 2013. Саров: СарФТИ НИЯУ МИФИ. 2013. С. 59.
3. Калашников С. Г. Электричество: Учебн. Пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 624 с.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИСКРЕТНОГО КАНАЛА СВЯЗИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АППАРАТА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МАТРИЦ

К.А. Батенков, к. т. н.
Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации
302034, г. Орёл, ул. Приборостроительная, 35
E-mail: pustur@yandex.ru

Известно, что средние потери информации определяются вероятностными мерами, входящих в процесс передачи по каналу связи преобразований и источника, по которым подразумевается выход кодера канала [1, 2]. Соответственно исходя из детерминированности операторов модуляции и демодуляции общий вид функции правдоподобия дискретного канала $\omega_{\mathbf{x}'/\mathbf{x}}$, включающего в себя данные операторы, несколько видоизменится, а варьируемыми переменными соответственно станут не условные плотности, а базисные функции модуляции и демодуляции [3, 4].

Функция правдоподобия дискретного канала связи определяется на основе уравнения Колмогорова–Чепмена и, по сути, является композицией условных плотностей модулятора $\omega_{x/\mathbf{x}}$, демодулятора $\omega_{\mathbf{x}'/x'}$ и непрерывного канала $\omega_{x'/x}$. Поскольку операторы являются детерминированными, то их условные плотности представимы в виде некоторых дельта-функций. Существует определённая сложность, связанная с тем, что выходные сигналы модулятора и входные демодулятора имеют непрерывный характер. Однако рассмотрение неограниченного числа сечений подобных процессов в пределе позволяет теоретически получить полную их характеристику [5]. В итоге осуществив предельный переход от аналогового вида выражений к дискретным оказывается возможным исследование сигналов в различных точках дискретного канала связи как случайные процессы с соответствующими плотностями вероятности, а его функциональные узлы – как стохастические системы, описываемые условными плотностями выходных сигналов от входных.

Под сечениями процесса в классической теории случайных процессов подразумевают случайные величины, соответствующие значениям случайного процесса в некоторый момент времени [5]. В результате случайный процесс сопоставляется некоторому стохастическому вектору, характеристики которого полностью согласуются с исходным процессом в случае бесконечномерности вектора. Однако для подобных разложений затруднительно исследовать энергетические (мощностные) параметры случайных процессов, поскольку их координатными функциями являются дельта-функции, в обычном понимании имеющие бесконечную энергию и определяемые лишь на основе некоторых функционалов [6], поскольку вообще корректное определение подобных функций в рамках классической теории функции не существует. В связи с этим более разумно сопоставлять случайный процесс некоторому вектору путём разложения по некоторым координатным функциям, энергия которых принимает конечную величину. Следует учесть, что только полная система функций позволяет считать погрешность аппроксимации при бесконечном числе коэффициентов разложения нулевой [7]. Однако подобное обстоятельство не является критическим, так как выбор базиса разложений