Результаты расчетов показывают, что для материалов с низкой теплопроводностью при одной и той же величине теплового потока и одинаковых толщинах образцов время выхода температуры на «холодной» границе образца до значения T_{max} увеличивается более чем в 100 раз, что существенно увеличивает погрешности вычисления λ, c, a по выражениям (1–3) за счет конвекции и излучения. Повышение временного интервала установления T_{max} на «холодной» границе образца, особенно при высокотемпературном эксперименте, лишает импульсные методы всех преимуществ перед традиционными [3].

Заключение

При определении теплофизических характеристик веществ импульсными методами установлен порог теплового потока, обусловленный температурой разложения материалов в приповерхностном слое образца. В результате численного моделирования процессов теплопроводности показано, что импульсные методы дают корректные результаты для материалов с высокой теплопроводностью, какими являются металлы и сплавы. Использование импульсных методов для материалов с низкой теплопроводностью возможно при ограничении продолжительности импульса и толщины образцов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Parker W.J., Jenkins R.J., Butler C.P. et al. Flash method of determining thermal diffusivity, heat capacity and thermal conductivity // J. of Appl. Physics. – 1961. – V. 32. – № 9. – P. 1675–1684.
2. Пономарев С.В., Мищенко С.В., Дивин А.Г. Теоретические и практические аспекты теплофизических измерений: Монография. В 2 кн. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2006. – Кн. 1. – 206 с.; Кн. 2. – 236 с.
3. Сабсай О.Ю., Чалая Н.М. Технологические свойства термопластов (обзор) // Пластические массы. – 1992. – № 1. – С. 5–13.
4. Технологические лазеры. Справочник в 2-х т. / Под ред. Г.А. Абильсиинова. – М.: Машиностроение, 1991. – Т. 1. – 431 с.
5. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2002. – 840 с.

Поступила 05.05.2008 г.

УДК 536.46; 536.3

МЕТОД РАСЧЕТА ТЕПЛООБМЕНА ИЗЛУЧЕНИЕМ В ТОПКЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КОНФИГУРАЦИИ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ КОМПОНЕНТ СУММАРНОГО ВЕКТОРА ПОТОКА ЛУЧИСТОЙ ЭНЕРГИИ. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

В.П. Бушланов, И.В. Бушланов

Белгородский государственный университет
E-mail: bvp@ngs.ru

Записаны уравнения сохранения для течения горящей смеси газов в топке малогабаритного котла мощностью 1 МВт с пористой керамической горелкой, в котором зона горения сосредоточена в области размером 1 см около поверхности горелки и в ее поверхностном пористом слое толщиной 1...3 мм. В уравнении сохранения энергии газа сток лучистой энергии учтен традиционно, он полагается равным объемной плотности спонтанного излучения из газа. Не традиционным является предположение о том, что поглощенное газом монохроматическое излучение сразу же изотропно излучается газом, вследствие значительной химической неравновесности в узкой зоне горения. Уравнения для расчета теплообмена излучением записаны не для интенсивности излучения, которая является функцией координат и двух углов направления распространения излучения, а для суммарного вектора потока лучистой энергии (СВПЛЭ), компоненты которого зависят только от координат. Такое уменьшение независимых переменных на 2 является существенным для численных расчетов. Компоненты СВПЛЭ внутри топки и на поверхности горелки представлены явно в виде интегралов от известных функций и граничной радиальной компоненты СВПЛЭ на цилиндрической поверхности топки − функции только одной продольной координаты. Для указанной граничной радиальной компоненты СВПЛЭ получено интегральное уравнение Фредгольма 2 рода.

Постановка задачи

Уравнения, описывающие теплообмен в реагирующем газе в объеме котла между поверхностью пористой горелки и стенками котла, учитывающие перенос тепла излучением, необходимы для проектирования котла с керамической горелкой мощностью 1...3 МВт, производимой в Отделе структурной макрокинетики Томского научного центра СО РАН. Температура и кинетика реакций в области горения определяется скоростью отвода тепла, которая существенно зависит от излучения из объема горящей смеси. Известно, что доля излучения в потоке тепла на теплообменниках котла доходит до 90 %. Поэтому при проектировании необходим точный расчет теплообмена излучением в топке. В отличии от горелок факельного типа, где зона горения рассредоточена по факелу, в рассматриваемой керамической горелке зона горения находится в слое газа порядка 0,01 м от поверхности горелки и в граничных порах поверхности горелки в слое толщиной порядка размера граничной поры. Как показывают эксперименты А.И. Кирдяшкина и Ю.М. Максимова (Отдел структурной макрокинетики Томского научного центра СО РАН), температура в указанной узкой зоне горения изменяется от 800 до 1800°, в продуктах горения отсутствуют частицы сажи, и из зоны горения идет поток излучения, интенсивность которого на 20 % выше расчетного. Под расчетной интенсивностью здесь понимается теоретически максимально возможная, которая рассчитана по максимально возможным значениям спонтанного излучения из слоя газа и от поверхности горелки и отраженного от поверхности горелки для измеренных профилей температур. Для проектирования и объяснения более высоких экспериментальных значений интенсивности излучения необходимы не приближенные инженерные уравнения, а точные, в которых в дальнейшем могли бы быть учтены и дополнительные (пока не учитываемые) механизмы излучения.

Обычно, в инженерных расчетах, в объемах содержащих поверхности, учитывают многократное поглощение и отражение на поверхностях, что приводит к значительной громоздкости формул для потока лучистой энергии, например [1]. Эти формулы неудобны при создании точных не одномерных алгоритмов расчета теплообмена излучением. В инженерных методах расчета в ракетных двигателях [2] описаны методы учета поглощения, вынужденного излучения или индуцированного (терминология из [2]) и рассеяния, а на твердых поверхностях вместо рассмотрения многократных поглощения и отражения записываются условия поглощения и отражения для суммарного потока лучистой энергии, что упрощает алгоритм расчета. В расчетах моделирующих прохождение лучами Солнца атмосферы Земли, например [3], получены уравнения в интегральной форме для спектральной интенсивности лучистой энергии, в которых наряду с поглощением и спонтанным излучением учитывается не изотропное рассеяние излучения. Указанные интегральные уравнения записаны на линии распространения луча в объемах, не содержащих излучающие, поглощающие и отражающие поверхности. С учетом указанных отражающих и поглощающих поверхностей уравнения переноса лучистой энергии решаются в работах [4–6]. В них рассмотрены современные методы расчеты теплообмена излучением в кольцевых печах с подвижным подом. Там же для трехмерных объемов химически не реагирующих газов предложена эффективная численная методика решения уравнения переноса излучения методом дискретных ординат с использованием кусочно-аналитических решений уравнения переноса и обсуждены вопросы выбора спектральных коэффициентов и уравнений теплообмена со стенками котла.

Ниже предлагается метод расчета суммарного вектора потока лучистой энергии (СВПЛЭ) в осесимметричных объемах, удобный для использования в двумерных численных газодинамических расчетах процесса горения в топке котла с пористой горелкой. Вследствие отсутствия частиц сажи и большой неравновесности в зоне горения, рассеяние излучения учитывается только на молекулах смеси газов как изотропное, с суммарной интенсивностью равной суммарной интенсивности поглощенного монохроматического излучения. В отличие от описанных выше методов, в предлагаемом методе, интегрированием уравнения переноса фотонов в интегральной форме по всем возможным линиям распространения лучей, получены осесимметричные интегральные уравнения для компонент СВПЛЭ на поверхностях горелки и топки, а внутри топки компоненты СВПЛЭ вычисляются в виде интегралов. Интегральные уравнения содержат неизвестные функции только одной переменной, в то время как известные уравнения переноса излучения содержат функцию интенсивности излучения, зависящую не только от координат, но и от двух углов направления распространения излучения. Метод применим только в случаях, когда потоки излучения на поверхностях можно представить только через компоненты СВПЛЭ и температуры стенок (в других случаях, когда указанное представление на поверхностях невозможно, можно использовать метод предложенный в [4–6]). Схема топки котла и горелки, которая используется при выводе уравнений методики, представлена на рисунке (см. ниже). Здесь x и r оси цилиндрической системы координат, $x=x_\Phi$ – поверхность пористой горелки, $x=L$ – координата конца топки, $r=R_\alpha$ – радиусы цилиндрической топки и горелки; горючая смесь поступает слева с поверхности пористой горелки.

Уравнения сохранения для газовой смеси

Дифференциальные уравнения сохранения массы, количества движения, энергии, уравнение состояния и изменения массовой концентрации горючего для газовой смеси в топке имеют следующий вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho v)=0,$$

$$\frac{\partial\rho\mathbf{v}}{\partial t}=-\nabla\left[P+\left(\frac{\mu}{3}+\xi\right)\mathrm{div}\mathbf{v}\right]+$$
$$+\nabla^k(-\rho\mathbf{v}v^k+\tau^k)+\rho\mathbf{g},$$
$$\tau^{kl}=\mu\, e^{kl},\ e^{kl}=(\nabla^k v^l+\nabla^l v^k). \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\left[\rho\left(h+\frac{v^2}{2}\right)\right]}{\partial t}=$$
$$=-\nabla^k\left\{\begin{matrix}\left[\rho\left(h+\frac{v^2}{2}\right)+P+\left(\frac{\mu}{3}+\xi\right)\mathrm{div}\mathbf{v}\right]v^k+\\ +\mu e^{kl}v^l\ -\lambda\nabla^k T\end{matrix}\right\}+$$
$$+\rho\left(\mathbf{vg}\right)-\varepsilon,$$

$$P=\frac{\rho R_0 T}{M},\ \frac{1}{M}=\sum_{k=1}^{N+1}\frac{c_k}{M_k},\ \frac{d\eta}{dt}=\eta\ w(\eta,T),\ h=h(T),$$

где $\rho,\mathbf{v},P,T,h,\mu,\xi,e^{kl},\lambda,\mathbf{g},t$ – соответственно плотность смеси, вектор скорости, давление, температура смеси, энтальпия единицы массы смеси, динамическая вязкость, вторая вязкость, тензор скоростей деформаций, коэффициент теплопроводности, вектор ускорения силы тяжести, время. ε – объемная плотность спонтанного излучения; M, R_0 – средняя молекулярная масса смеси и универсальная газовая постоянная; M_k, $c_k=\rho_k/\rho$ – молекулярные веса и концентрации компонент газа; ρ_k – плотность компонент газа, $w(\eta,T)$ – относительная массовая скорость расхода горючего на единицу массы смеси газов. Средняя молекулярная масса M – является функцией массовой концентрации $\eta=\rho_g/\rho$, где ρ_g – плотность горючего, индекс g относится к горючему и соответствует $k=N+1$. Определим функцию $M(h)$. Пусть брутто реакция горения записана относительно горючего в виде $\mu_g A_g = \sum_{k=1}^{N}\mu_k A_k$, где для инертных компонент газа не участвующих в реакции горения, стехиометрические коэффициенты μ_k – равны нулю. Очевидно, что концентрации компонент, участвующих в реакции, связаны с концентрацией η согласно выражению $c_{k0}-c_k=\dfrac{\mu_k M_k}{\mu_g M_g}(\eta_0-\eta)$, где индекс 0 – относится к начальным значениям параметров. Разделим левую и правую часть последнего равенства на M_k и просуммируем равенство по всем k, тогда получим

$$\frac{1}{\mathrm{M}}=\sum_{k=1}^{N+1}\frac{c_k}{M_k}=\frac{1}{M_0}[1+\varsigma(\eta-\eta_0)],$$

$$\frac{1}{M_0}=\sum_{k=1}^{N+1}\frac{c_{k0}}{M_k}=\mathrm{const},\quad \varsigma=\frac{M_0}{\mu_g M_g}\sum_{k=1}^{N+1}\mu_k=\mathrm{const}.$$

Уравнение переноса фотонов в дифференциальной форме

Обозначим $cN(\omega,t,x,\theta,\phi)$ – число фотонов с частотой ω, пересекающих в направлении $\boldsymbol{n}=\{\cos\theta,\sin\theta,\cos\phi,\sin\theta,\sin\phi\}$ в единицу времени единицу площади с нормалью $\boldsymbol{n}$, где c – скорость света, здесь и далее в фигурных скобках будем указывать компоненты векторов, θ – угол между осью x цилиндрической системы координат (x,r,φ) и направлением $\boldsymbol{n}$, ϕ – угол, отсчитываемый в плоскости перпендикулярной оси x (различать углы ϕ и φ). Уравнение переноса лучистой энергии можно писать для функции интенсивности потока излучения $I(\omega,t,x,\theta,\phi)$ или в эквивалентном виде, который применяется далее, для функции числа фотонов $N(\omega,t,x,\theta,\phi)$ в единице объема. Указанные функции связаны соотношением $I=\mathrm{ch}\omega N$. Пусть $cN_V(\omega,t,x,\theta,\phi)$ – число фотонов с частотой ω, спонтанно излучающихся из единицы объема газа в единицу телесного угла в направлении $\boldsymbol{n}$. Например, для изотропного излучения

$$N_V=\frac{1}{4\pi h\omega}a(\omega,T)i_{bn}(\omega,T),\ i_{bn}(\omega,T)=\frac{h}{\pi^2c^3}\frac{\omega^3}{e^{\frac{h\omega}{T}}-1},\qquad(2)$$

где h – постоянная Планка, $i_{bn}(\omega,T)$ – интенсивность монохроматического теплового излучения черного тела в направлении нормали, $a(\omega,T)$ – коэффициент поглощения.

Закон сохранения числа фотонов в некотором произвольном объеме топки V, ограниченном поверхностью S, запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V N(\omega,t,x,\theta,\phi)dV=$$

$$=-c\int_S N(\mathbf{n}\boldsymbol{\nu})dS+\int_V N_V dV-c\int_V \tilde{a}NdV+$$

$$+c\int_V\frac{1}{4\pi}\int_{4\pi}\tilde{a}N(\omega,t,x,\theta_1,\phi_1)d\Omega_1 dV,\qquad(3)$$

где левая часть уравнения равна изменению числа фотонов в выделенном объеме в единицу времени, а в правой части первый интеграл равен потоку фотонов в единицу времени через поверхность выделенного объема. Второй и третий интегралы равны соответственно количеству фотонов излучаемых и поглощаемых газом в выделенном объеме в единицу времени. Четвертый интеграл равен изотропному приходу излучаемых поглощенных фотонов в выделенном объеме (будем их условно называть рассеянными фотонами), где $\boldsymbol{\nu}$ – единичная внешняя нормаль к поверхности, в коэффициенте поглощения в газе $\tilde{a}(\mathrm{w},T)$ учтено индуцированное излучение (при индуцированном излучении испускаются фотоны той же частоты и в том же направлении, что и первоначальные [2]). Количество поглощенных фотонов dN на длине dl равно

$$dN=-\tilde{a}(\omega,T)Ndl.\qquad(4)$$

Интегрируя (4) получим следующий закон поглощения на длине l_0:

$$N(l)=N_0\exp[-\int_0^l\tilde{a}(\omega,T)dl_1].\qquad(5)$$

Переходя в уравнении (3) в поверхностном интеграле к интегрированию по объему и учитывая произвольность объема V, получим следующее уравнение переноса фотонов в частных производных:

$$\frac{\partial N}{\partial t}+c\,\mathrm{div}(\mathbf{n}\,N)=N_V-c\tilde{a}N+c\sigma,$$

$$\sigma(\omega,T)=\frac{1}{4\pi}\int_{4\pi}\tilde{a}N(\omega,t,x,\theta_1,\phi_1)d\Omega_1.\qquad(6)$$

Умножим (6) на энергию одного фотона $h\omega$, проинтегрируем по частотам $d\omega$ и по всем телесным углам $d\Omega=\sin\theta d\theta d\phi$ тогда получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial e}{\partial t}+\mathrm{div}\mathbf{I}=\varepsilon,$$

$$e=h\int_0^\infty\left(\int_\Omega Nd\Omega\right)\omega d\omega,\ \ \mathbf{I}=hc\int_0^\infty\left(\int_\Omega\mathbf{n}\,Nd\Omega\right)\omega d\omega,$$

$$\varepsilon=h\int_0^\infty\left(\int_\Omega N_V d\Omega\right)\omega d\omega,\qquad(7)$$

где e – плотность энергии фотонов в единице объема, $\mathbf{I}$ – суммарный вектор потока лучистой энергии, ε – объемная плотность излучения из единицы объема газа (см. (1)), где общий приход энергии фотонов из-за рассеяния равен нулю. В случае стационарных уравнений (1) и (7) получим

$$\varepsilon = \operatorname{div} \mathbf{I}. \qquad (8)$$

Отметим, что членом $\partial e/\partial t$ в нестационарном уравнении сохранения энергии обычно пренебрегают, например [6]. Суммарный поток излучения (7) через единицу площади с нормалью $\boldsymbol{n}^s$ равен

$$I^S(x) =$$
$$= c\int_0^\infty h\omega d\omega \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} (\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^S) N(\omega,t,x,\theta,\phi) d\phi = \boldsymbol{n}^S \mathbf{I}. \quad (9)$$

Из (9) следует, что в декартовой системе координат $\mathbf{I}(x)=\{I^x,I^y,I^z\}$ – есть вектор, где компоненты вектора на оси декартовой системы координат можно определить из (9) соответственно полагая $(\boldsymbol{n}^S\boldsymbol{n}^x)=\cos\theta$, $(\boldsymbol{n}^S\boldsymbol{n}^y)=\sin\theta\cos\phi$, $(\boldsymbol{n}^S\boldsymbol{n}^z)=\sin\theta\sin\phi$. Вектор потока $\mathbf{I}(x)$ необходим для записи уравнения сохранения энергии в средах с излучением (см. (8), (1)). Указанный поток вычисляется из (9), если известна функция $N(\omega,t,x,\theta,\phi)$.

Уравнение переноса фотонов в интегральной форме

Получим уравнение переноса фотонов в интегральной форме, эквивалентное уравнению в частных производных (6). При записи интегрального уравнения для функции N используем следующее рассуждение. Фотоны, которые находятся в точке среды с координатой x, приходят из объемов среды, лежащих на прямой $\mathbf{x}_1=\mathbf{x}-n\mathbf{l}_1$. Здесь расстояние l_1 изменяется от нуля и до величины $l_f=|\mathbf{x}_f-\mathbf{x}|$, где $\mathbf{x}_f$ – координаты пересечения прямой со стенкой. Из внутренних точек указанной прямой приходят фотоны, спонтанно излучаемые газом, фотоны индуцированного и рассеянного излучений, а из точки поверхности $\mathbf{x}_f$ – фотоны, спонтанно излучаемые стенкой и отраженные фотоны. Пусть $cN_f(\omega,\mathbf{x}_f,\theta,\phi)$ – число фотонов с частотой ω, приходящих с единицы поверхности твердого тела в направлении $\boldsymbol{n}$ в единицу телесного угла. Например, для черного спонтанного излучения

$$N_f(\omega,\mathbf{x},\theta,\phi) = \frac{i_{bn}}{4\pi h\omega}. \qquad (10)$$

От стенки в точку среды с координатой x приходит следующий поток фотонов:

$$cN_f(\omega, t-\frac{l_f}{c}, \mathbf{x}-\boldsymbol{n}\, l_f, \theta,\phi)(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_f)\times$$
$$\times\exp\left[-\int_0^{l_f} a(\omega, T(t-\frac{l}{c}, \mathbf{x}-\boldsymbol{n}\, l))dl\right], \qquad (11)$$

где $\boldsymbol{n}_f$ – единичная внешняя нормаль к стенке ($N_f=0$ если $\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_f<0$ – условие того, что фотоны движутся от стенки), последний сомножитель согласно (5) равен относительной части фотонов дошедших до точки с координатой $\mathbf{x}$ без поглощения и рассеяния (другими словами, равен вероятности, дойти без поглощения и рассеяния). Величина (11) состоит из спонтанного излучения от стенки имеющей температуру T_f и отраженного излучения. Учитывая указанные рассуждения, запишем уравнение для потока фотонов в направлении $\boldsymbol{n}$ в точке среды с координатой x следующим образом:

$$cN(\omega,t,\mathbf{x},\theta,\phi) =$$
$$= cN_f(\omega, t-\frac{l_f}{c}, \mathbf{x}-\boldsymbol{n}\, l_f, \theta,\phi)(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_f)\exp-$$
$$-\int_0^{l_f} \tilde{a}(\omega, T(t-\frac{l_1}{c}, \mathbf{x}-\boldsymbol{n}\, l_1))dl_1 +$$
$$+\int_0^{l_f} \left[\begin{bmatrix} N_V(\omega, t-\frac{l_1}{c}, \mathbf{x}-\boldsymbol{n}\, l_1, \theta,\phi) + \\ +c\sigma(\omega, t-\frac{l_1}{c}, \mathbf{x}-\boldsymbol{n}\, l_1) \end{bmatrix} \exp- \atop -\int_0^{l_1} \tilde{a}(\omega, T(t-\frac{l}{c}, \mathbf{x}-\boldsymbol{n}\, l))dl \right] dl_1. \qquad (12)$$

Второе и третье слагаемые в уравнении переноса фотонов в интегральной форме (12) равны соответственно потоку фотонов излучаемых и рассеяных находящихся на прямой линии $\mathbf{x}_1=\mathbf{x}-\boldsymbol{n}l_1$, дошедших в точку с координатой $x=\{x,r\cos\varphi,r\sin\varphi\}$ без поглощения.

Заметим, что выражение (12) можно получить не из физических рассуждений, а решая неоднородное линейное уравнение в частных производных (6) методом характеристик, решение которого имеет вид интеграла Дюамеля (12). Обратно, из уравнения (12) можно получить уравнение в частных производных (6), если в качестве функции $N_f(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_f)$ взять функцию $N(\omega,t-dt,\mathbf{x}-c\boldsymbol{n}\,dt,\theta,\phi)$ – на луче распространения фотонов вблизи точки x, на расстоянии $l_f=cdt$ и разложить правую часть в ряд до членов пропорциональных dt. Вычислим из (7) стационарный вектор $\mathbf{I}(x)$, интегрируя уравнения (12) по переменным θ, ϕ. Перейдем в интеграле равном приходу лучистой энергии от стенки топки (цилиндра) (рисунок) к интегрированию по переменным $x_\alpha=x-l_\alpha\cos\theta,\phi$, где $\mathbf{x}_\alpha=\{x_\alpha,R\cos\varphi_\alpha,R\sin\varphi_\alpha\}$ – координаты на стенке котла, а в интеграле по торцу (поверхность пористой горелки $x=x_\Phi$=const) – к интегрированию по переменным r_Φ, ϕ, где $\mathbf{x}_\Phi=\{x_\Phi,r_\Phi\cos\varphi_\Phi,r_\Phi\sin\varphi_\Phi\}$ – координаты на поверхности торца, r_Φ – отсчитывается на торце.

При интегрировании второго слагаемого (14) перейдем от переменных l_1, θ, ϕ к переменным x_1, r_1, ϕ, где $\mathbf{x}-\boldsymbol{n}l_1=\{x_1,r_1\cos\varphi_1,r_1\sin\varphi_1\}$. Для указанных целей вычислим соответствующие якобианы перехода. Введем обозначения для следующих расстояний:

$$l_f = l(\mathbf{x},\mathbf{x}_f) = \sqrt{(x-x_f)^2 + r^2 + r_f^2 - 2rr_f\cos(\varphi-\varphi_f)},$$
$$l_f^r = l_f^r(\mathbf{x},\mathbf{x}_f) = \sqrt{l_f^2 - (x-x_f)^2}.$$

На стенке топки (цилиндр радиуса R_α) имеем

$$\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{x} - \boldsymbol{n}\, l_\alpha,$$

$$\boldsymbol{n}_f = \{0, \cos\varphi_\alpha, \sin\varphi_\alpha\}, \quad \boldsymbol{nn}_f = \sin\theta\cos(\phi - \varphi_\alpha),$$

$$(x - x_\alpha)^2 + R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \varphi_\alpha) = l_\alpha^2,$$

$$\frac{\partial(\theta, \phi)}{\partial(x_\alpha, \phi)} = \frac{\sin\theta}{l_\alpha} = \frac{l_\alpha^r}{l_\alpha^2},$$

$$R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \varphi_\alpha) = l_\alpha^{r2} = l_\alpha^2 \sin^2\theta,$$

$$\cos\theta = \frac{x - x_\alpha}{l_\alpha}. \qquad (13)$$

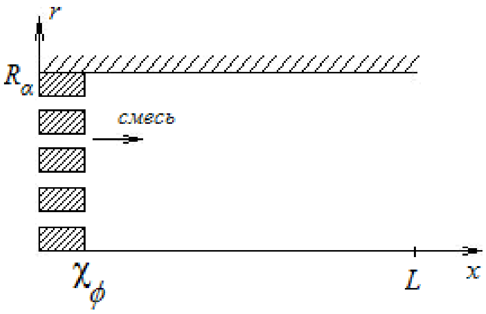

Рисунок. *Схема осесимметричных пористой горелки и топки котла*

На торце $x{=}x_\Phi$, где x_Φ – координата торца, имеем

$$\boldsymbol{nn}_\Phi = \cos\theta, \quad \cos\theta = \frac{x - x_\Phi}{l_\Phi},$$

$$(x - x_\Phi)^2 + r_\Phi^2 + r^2 - 2r_\Phi r\cos(\varphi - \varphi_\Phi) = l_\Phi^2,$$

$$r_\Phi^2 + r^2 - 2r_\Phi r\cos(\varphi - \varphi_\Phi) = l_\Phi^{r2},$$

$$\frac{\partial(\theta, \phi)}{\partial(r_\Phi, \phi)} = \frac{x - x_\Phi}{l_\Phi^2 l_\Phi^r}[r_\Phi - r\cos(\varphi - \varphi_\Phi)]. \qquad (14)$$

Внутри топки

$$(x - x_1)^2 + r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos(\varphi - \varphi_1) = l_1^2,$$

$$r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos(\varphi - \varphi_1) = l_1^{r2} =$$

$$= l_1^2\sin^2\theta, \cos\theta = \frac{x - x_1}{l_1},$$

$$\frac{\partial(l_1, \theta, \phi)}{\partial(x_1, r_1, \phi)} = \frac{\partial(l_1, \theta)}{\partial(x_1, r_1)} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{r_1 - r\cos(\varphi - \varphi_1)}{l_1^2} =$$

$$= -\frac{r_1 - r\cos(\varphi - \varphi_1)}{l_1^r l_1}. \qquad (15)$$

В формулах (13–15) угол φ выражается через угол ϕ в следующем виде:

$$\cos(\varphi_f - \varphi) = \frac{\cos(\phi - \varphi)}{\cos(\phi - \varphi_f)} + \frac{r}{r_f}\sin^2(\phi - \varphi),$$

$$\cos(\phi - \varphi_f) = \sqrt{1 - \frac{r^2}{r_f^2}\sin^2(\phi - \varphi)},$$

где индекс $f{=}\alpha, \Phi, 1$ соответственно на стенке топки, торце и внутри топки, а $r_\alpha{=}R_\alpha$.

Рассмотрим осесимметричную задачу, когда конфигурация топки и горелки имеет осевую симметрию. Поэтому искомая функция N зависит от координат x, r и не зависит от угла φ. Обозначим на стенке цилиндра

$$N_f(\omega, \mathbf{x} - \boldsymbol{n}\, l_f, \theta, \phi) =$$

$$= N_\alpha(\omega, x - l_\alpha\cos\theta, R_\alpha, \theta, \phi) = N_\alpha^r(\omega, x_\alpha, \theta), \qquad (16)$$

а на торце

$$N_f(\omega, \mathbf{x} - \boldsymbol{n}\, l_f, \theta, \phi) =$$

$$= N_\phi(\omega, x_\Phi, r_\Phi, \theta, \phi) = N_\phi^x(\omega, r_\Phi, \theta).$$

Тогда из (12)–(16) получим следующее уравнение (при вычислении потока I^x единичная нормаль $\boldsymbol{n}^S{=}\{\cos\theta, 0, 0\}$, поэтому $\boldsymbol{nn}^S{=}\cos\theta$, а при вычислении потока I^r имеем $\boldsymbol{nn}^S{=}\sin\theta$):

$$I(x, r) = c\int_0^\infty h\omega d\omega \int_{x_\Phi}^{x_\Phi + L} dx_\alpha \int_0^{2\pi} N_\alpha^r(\omega, x_\alpha, \theta_f) \times$$

$$\times w_\alpha \frac{(l_\alpha^r)^3\{x - x_\alpha, l_\alpha^r\}}{(l_\alpha)^5}\cos(\phi - \varphi_\alpha)d\phi +$$

$$+ c(x - x_\Phi)^2 \int_0^\infty h\omega d\omega \int_0^{R_\alpha} dr_\Phi \int_0^{2\pi} N_\Phi^x(\omega, r_\Phi, \theta_\Phi) \times$$

$$\times w_\Phi \frac{[r_\Phi - r\cos(\phi - \varphi_\Phi)]\{x - x_\Phi, l_\Phi^r\}}{(l_\Phi)^5} d\phi +$$

$$+ \int_0^\infty h\omega d\omega \int_{x_\Phi}^{x_\Phi + L} dx_1 \int_0^{R_\alpha} dr_1 \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} N_V(\omega, x_1, r_1, \theta_1) + \\ + c\sigma(\omega, x_1, r_1) \end{bmatrix} \times$$

$$\times w_1 \frac{[r_1 - r\cos(\phi - \varphi_1)]\{x - x_1, l_1^r\}}{(l_1(x, r))^3} d\phi, \qquad (17)$$

$$w_f = \exp\left[-\int_0^{l_f} \tilde{a}(\omega, T(x_{lf}, r_{lf}))dl\right], \quad x_{lf} = x - l\frac{x - x_f}{l_f},$$

$$r_{lf} = \sqrt{l^2 - \left[x - l\frac{x - x_f}{l_f}\right]^2}, \quad \theta_f = \arccos\frac{x - x_f}{l_f},$$

где индекс f равен: на стенке цилиндра – α, на торце – Φ, внутри топки – 1.

Первые два интеграла в правой части (17) равны лучистым потокам соответственно со стенки топки и с поверхности горелки, а третий интеграл равен суммарному излучению газа из области топки.

Рассмотрим задание функции N_f. Функция N_f – задающая поток фотонов со стенки, должна определяться в соответствии с экспериментом. Поток излучения от стенки I_f^- состоит из лучистого потока отраженных фотонов $\rho_f I_f^+$ и потока спонтанного излучения испускаемого стенкой $\varepsilon_f \sigma_0 T_f^4$, нагретой до температуры T_f, где I_f^+ – поток излучения на стенку, $\rho_f(T_f)$ – коэффициент отражения от стенки, $\varepsilon_f(T_f)$ – лучеиспускательная способность (степень черноты). В соответствии со сказанным

$$I_f^- = \rho_f(T_f)I_f^+ + \varepsilon_f(T_f)\sigma_0 T_f^4. \qquad (18)$$

Указанные потоки, согласно определению равны

$$\{I_f^-, \varepsilon_f \sigma T_f^4\} =$$

$$= \int_0^\infty d\omega \iint_{\boldsymbol{nn}_f<0} \{\mathrm{ch}\omega N_f(\omega, x_f, \theta, \phi), i_f(\omega, T_f, \theta, \phi)\} \times$$

$$\times \sin\theta d\theta d\phi, \qquad (19)$$

$$I_f^+ = \mathrm{ch}\int_0^\infty \omega d\omega \iint_{\boldsymbol{nn}_f>0} N^+(\omega, x_f, \theta, \phi) \sin\theta\, d\theta\, d\phi,$$

где cN^+ – поток фотонов, падающих на стенку, $i_f(\omega, T_f, \theta, \phi)$ – плотность потока спонтанного лучеиспускания стенки. Очевидно, что

$$N_f(\omega, x_f, \theta, \phi) = N(\omega, x_f, \theta, \phi), \quad \boldsymbol{nn}_f < 0,$$

$$N^+(\omega, x_f, \theta, \phi) = N(\omega, x_f, \theta, \phi), \quad \boldsymbol{nn}_f > 0. \qquad (20)$$

Функция i_f – может быть определена экспериментально или вычислена из электромагнитной теории. Так для черного излучения $i_f = h\omega i_{bn}$. В дальнейших вычислениях будем считать, что распределение излучения по углу θ не зависит от частоты ω, поэтому и учитывая осевую симметрию

$$i_f = i_{f0}(\omega, T)\frac{\chi_{fl}(T, \theta)}{\chi_{fl0}}, \; \chi_{fl0} = \iint_{\boldsymbol{nn}_f<0} \chi_{fl} \sin\theta\, d\theta\, d\phi. \quad (21)$$

Для лучеиспускания газа примем

$$N_V = \frac{1}{4\pi} a(\omega, T) i_{10}(\omega, T) \chi_{Vl}(T, \theta),$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \chi_{1l} \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi, \quad i_{10}(\omega, T) = i_{bn}(\omega, T).$$

Из (19), (21) следует

$$\varepsilon_f \sigma_0 T_f^4 = \int_0^\infty i_{f0}(\omega, T_f) d\omega,$$

$$\langle a \rangle \sigma_0 T^4 = \int_0^\infty N_V d\omega = \int_0^\infty a(\omega, T) i_{10}(\omega, T) d\omega, \qquad (22)$$

где $\sigma_0 T^4 = \int_0^\infty i_{10}(\omega, T) d\omega.$

Для потока отраженных фотонов cN_f^- имеем

$$N_f^-(\omega, x_f, \theta, \phi) = \rho_f(\omega, T) N^+(\omega, x_f, \theta_v, \phi_v),$$

$$\boldsymbol{nn}_f < 0, \qquad (23)$$

где θ_v и ϕ_v – определяются из условий отражения. Если, например, для отраженных лучей угол отражения равен углу падения падающих на стенку фотонов, то

$$\boldsymbol{\nu n}_f = -\boldsymbol{nn}_f, \quad \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu n}_f) = \boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{nn}_f), \qquad (24)$$

где первое уравнение следует из равенства углов падения и отражения, а второе – является условием равенства проекций направляющих единичных векторов ($\boldsymbol{\nu}$ – для падающих лучей и $\boldsymbol{n}$ – для отраженных лучей) на плоскость нормальную $\boldsymbol{n}_f$, где

$$\boldsymbol{\nu} = \{\cos\theta_v, \sin\theta_v \cos\phi_v, \sin\theta_v \sin\phi_v\}. \qquad (25)$$

Очевидно, что в указанном случае если $\boldsymbol{n}_f = \boldsymbol{n}_\alpha = \{0, \cos\varphi_\alpha, \sin\varphi_\alpha\}$ (стенка цилиндра), то $\theta_v = \theta$, $\phi_v - \varphi_\alpha = \pi - (\phi - \varphi_\alpha)$, а если $\boldsymbol{n}_f = \boldsymbol{n}_\Phi = \{1,0,0\}$ (торец), то $\theta_v = \pi - \theta$, $\phi_v = \phi$. В дальнейших вычислениях будем считать, что распределение отраженных фотонов по углу θ не зависит от частоты ω и, учитывая осевую симметрию, получим

$$\mathrm{ch}\,\omega N_f^- = i_f^-(\omega, T)\frac{\chi_f^-(T, \theta)}{\chi_{f0}^-}, \; \chi_{f0}^- = \iint_{\boldsymbol{nn}_f<0} \chi_f^- \sin\theta d\theta d\phi,$$

$$\rho_f I_f^+ = ch\int_0^\infty \omega d\omega \iint_{\boldsymbol{nn}_f<0} N_f^- \sin\theta d\theta d\phi = \int_0^\infty i_f^- d\omega. \qquad (26)$$

Выразим, используя (18) потоки I_f^+ и I_f^- через суммарный поток $I_f = \left(I_f^- + \dfrac{i_f}{ch\omega}\right) - I_f^+$, тогда получим из (23) с учетом (21), (26) и $N_f = N_f^- + \dfrac{i_f}{\mathrm{ch}\omega}$

$$I_f^+ = \frac{1}{1-\rho_f}(\varepsilon_f \sigma_0 T_f^4 - I_f),$$

$$I_f^- = \frac{\rho_f}{1-\rho_f}(\varepsilon_f \sigma_0 T_f^4 - \rho_f I_f), \qquad (27)$$

$$ch\int_0^\infty \omega N_f(\omega, x_f, \theta, \phi) w_f d\omega =$$

$$= \frac{\rho_f}{1-\rho_f}(\varepsilon_f \sigma_0 T_f^4 - I_f)\langle w_f \rangle \frac{\chi_f^-(T, \theta)}{\chi_{f0}^-} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_f \chi_{fl}(T, \theta)}{\sigma_0^{-1} T_f^{-4} \langle w_f \rangle \chi_{fl0}}, \qquad (28)$$

$$\{\rho_f I_f^+ \langle w_f \rangle^-, \varepsilon_f \sigma_0 T_f^4 \langle w_f \rangle\} =$$

$$= \int_0^\infty \{i_f^-(\omega, T_f), i_f(\omega, T_f)\} w_f d\omega, \qquad (29)$$

Выполним в (17) интегрирование по частотам ω с учетом предположений (21), (27), уравнений (28) и обозначений (29), тогда получим следующее выражение для лучистого суммарного потока:

$$\mathbf{I}(x, r) =$$

$$= \int_{x_\Phi}^{x_\Phi + L} \left[\begin{array}{l} \dfrac{\rho_\alpha}{1-\rho_\alpha}(\varepsilon_\alpha \sigma_0 T_\alpha^4(x_\alpha) - I_\alpha^r(x_\alpha)) \times \\ \times \gamma_\alpha^-(x - x_\alpha, x_\alpha, r) + \varepsilon_\alpha \sigma_0 T_\alpha^4(x_\alpha) \gamma_{\alpha l}(x - x_\alpha, x_\alpha, r) \end{array} \right] dx_\alpha +$$

$$+ \int_0^{R_\alpha} \left[\begin{array}{l} \dfrac{\rho_\Phi}{1-\rho_\Phi}(\varepsilon_\Phi \sigma_0 T_\Phi^4(r_\Phi) - I_\Phi^x(r_\Phi)) \times \\ \times \gamma_\Phi^-(x - x_\Phi, r, r_\Phi) + \varepsilon_\Phi \sigma_0 T_\Phi^4(r_\Phi) \gamma_{\Phi l}(x - x_\Phi, r, r_\Phi) \end{array} \right] dr_\Phi +$$

$$+ \int_{x_\Phi}^{x_\Phi + L_\alpha} \left[\int_0^{R_\alpha} [\sigma_0 T^4(x_1, r_1) + c\sigma(x_1, r_1)] \times \gamma_1(x - x_1, r, r_1) dr_1 \right] dx_1, \qquad (30)$$

где обозначено

$$\gamma_\alpha^-(x - x_\alpha, x_\alpha, r) =$$

$$\int_0^{2\pi} \langle w_\alpha \rangle^- \frac{\chi_\alpha^-(T_\alpha, \theta_\alpha)}{\chi_{\alpha 0}^-} \frac{(l_\alpha^r)^3 \{x - x_\alpha, l_\alpha^r\}}{(l_\alpha)^5} \times$$

$$\times \cos(\phi - \varphi_\alpha) d\phi,$$

$$\gamma_{\alpha l}(x-x_\alpha,x_\alpha,r)=$$
$$=\int_0^{2\pi}\left\langle w_\alpha\right\rangle\frac{\chi_{\alpha l}(T_\alpha,\theta_\alpha)}{\chi_{\alpha l0}^{-}}\frac{(l_\alpha^r)^3\{x-x_\alpha,l_\alpha^r\}}{(l_\alpha)^5}\times$$
$$\times\cos(\phi-\varphi_\alpha)d\phi,$$

$$\gamma_\Phi^-(x-x_\Phi,r,r_\Phi)=(x-x_\Phi)^2\int_0^{2\pi}\left\langle w_\Phi\right\rangle^-\frac{\chi_\Phi^-(T_\Phi,\theta_\Phi)}{\chi_{\Phi0}^-}\times$$
$$\times\frac{[r_\Phi-r\cos(\phi-\varphi_\Phi)]\{x-x_\Phi,l_\Phi^r\}}{(l_\Phi)^5}d\phi,$$

$$\gamma_{\Phi l}(x-x_\Phi,r,r_\Phi)=(x-x_\Phi)^2\int_0^{2\pi}\left\langle w_\Phi\right\rangle\frac{\chi_{\Phi l}(T_\Phi,\theta_\Phi)}{\chi_{\Phi0}^-}\times$$
$$\times\frac{[r_\Phi-r\cos(\phi-\varphi_\Phi)]\{x-x_\Phi,l_\Phi^r\}}{(l_\Phi)^5}d\phi,$$

$$\gamma_1(x-x_1,x_1,r,r_1)=\int_0^{2\pi}\left\langle aw_1\right\rangle\frac{\chi_{1l}(T(x_1,r_1),\theta_1)}{4\pi}\times$$
$$\times\frac{[r_1-r\cos(\phi-\varphi_1)]\{x-x_1,l_1^r\}}{l_1^3}d\phi. \qquad (31)$$

Из (30) получим для потоков на стенку цилиндра ($r=R$) и на торец ($x=x_\Phi$) следующие уравнения:

$$I_\alpha^r(x)=I^r(x,R_\alpha)=$$
$$\int_{x_\Phi}^{x_\Phi+L}\left[\begin{array}{l}\int_0^{R_\alpha}[\sigma_0T^4(x_1,r_1)+c\sigma(x_1,r_1)]\times\\ \times\gamma_1^r(x-x_1,R_\alpha,r_1)dr_1\end{array}\right]dx+$$
$$+\int_{x_\Phi}^{x_\Phi+L}\left[\begin{array}{l}\frac{\rho_\varepsilon}{1-\rho_\alpha}(\varepsilon_\alpha\sigma_0T_\alpha^4(x_\alpha)-\\ -I_\alpha^r(x_\alpha))\gamma_\alpha^{-r}(x-x_\alpha,x_\alpha,R_\alpha)+\\ +\varepsilon_\alpha\sigma_0T_\alpha^4(x_\alpha)\gamma_{\alpha l}^r(x-x_\alpha,x_\alpha,R_\alpha)\end{array}\right]dx_\alpha+$$
$$+\int_0^{R_\alpha}\left[\begin{array}{l}\frac{\rho_\Phi}{1-\rho_\Phi}(\varepsilon_\Phi\sigma_0T_\Phi^4(r_\Phi)-\\ -I_\Phi^x(r_\Phi))\gamma_\Phi^{-r}(x-x_\Phi,R_\alpha,r_\Phi)+\\ +\varepsilon_\Phi\sigma_0T_\Phi^4(r_\Phi)\gamma_{\Phi L}^r(x-x_\Phi,R_\alpha,r_\Phi)\end{array}\right]dr_\Phi. \qquad (32)$$

$$I_\Phi^x(r)=I^x(x_\Phi,r)=$$
$$=\int_{x_\Phi}^{x_\Phi+L}\left[\begin{array}{l}\int_0^{R_\alpha}[\sigma_0T^4(x_1,r_1)+c\sigma(x_1,r_1)]\times\\ \times\gamma_1^x(x_\Phi-x_1,r,r_1)dr_1\end{array}\right]dx_1+$$
$$+\int_{x_\Phi}^{x_\Phi+L}\left[\begin{array}{l}\frac{\rho_\alpha}{1-\rho_\alpha}(\varepsilon_\alpha\sigma_0T_\alpha^4(x_\alpha)-\\ -I_\alpha^r(x_\alpha))\gamma_\Phi^{-x}(x_\alpha-x_\Phi,x_\alpha,r)+\\ +\varepsilon_\alpha\sigma_0T_\alpha^4(x_\alpha)\gamma_{\Phi l}^x(x_\alpha-x_\Phi,x_\alpha,r)\end{array}\right]dx_\alpha. \qquad (33)$$

Выводы

Предложен метод расчета вектора потока лучистой энергии в осесимметричном объеме в форме интеграла (17), который позволяет рассчитывать вектор потока лучистой энергии в котле осесимметричной конфигурации из ур. (30–33), для известного поля температур газа, пористой горелки и стенок. Уравнения записаны для ситуации, когда суммарное поглощенное излучение в данной точке объема топки сразу же рассеивается изотропно. Температура газа и стенок рассчитываются из уравнений системы (1) при задании граничных условий и вычисленном из ур. (30–33) векторе потока лучистой энергии в объеме газа и на стенках. Метод расчета пригоден для решения вариационной задачи построения оптимального котла осесимметричной конфигурации. Ур. (33) является аналитической формулой для вычисления потока лучистой энергии $I_\Phi^x(r_\Phi)$ на пористую горелку (если известен лучистый поток $I_\alpha^r(r_\alpha)$ на стенку котла и температуры $T(x_1,r_1)$ и $T_\alpha(r_\alpha)$). Подставляя (33) в последний интеграл уравнения (32) можно получить интегральное уравнение для лучистого потока на цилиндрическую стенку котла $I_\alpha^r(r_\alpha)$ (если известны температуры $T(x_1,r_1)$, $T_\alpha(r_\alpha)$, $T_\Phi(r_\Phi)$). Ур. (30) является аналитической формулой для СВПЛЭ, если известны температура газа в топке $T(x_1,r_1)$, температуры на стенке $T_\alpha(r_\alpha)$ и на пористой горелке $T_\Phi(r_\Phi)$, лучистые потоки на пористой горелке $I_\Phi^x(r_\Phi)$ и стенке котла $I_\alpha^r(r_\alpha)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований – грант РФФИ 06-08-00357-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эккерт Э.Р. Теория тепло- и массообмена. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1961. – 680 с.
2. Зигель Р., Хауэл Дж. Теплообмен излучением. – М.: Мир, 1975. – 934 с.
3. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. – М.: Иностранная литература, 1953. – 432 с.
4. Тимошпольский В.И., Герман М.Л., Гринчук П.С., Ознобишин А.Н. Численное решение уравнения переноса излучения в поглощающей, излучающей и рассеивающей среде со сложной 3-D геометрией // Инженерно-физический журнал. – 2005. – Т. 78. – № 1. – С. 138–147.
5. Тимошпольский В.И., Герман М.Л., Гринчук П.С., Андрианов Д.Н. Расчет характеристик переноса теплового излучения в рабочем пространстве кольцевой печи // Инженерно-физический журнал. – 2005. – Т. 78. – № 3. – С. 3–14.
6. Тимошпольский В.И., Герман М.Л., Гринчук П.С., Кабишов С.М. Математическое моделирование сопряженного теплообмена в нагревательных печах с подвижным подом // Инженерно-физический журнал. – 2006. – Т. 79. – № 3. – С. 3–11.

Поступила 09.07.2007 г.