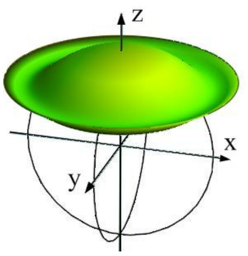


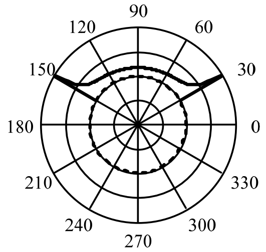


Рис. 7. *Пространственное распределение зарядов и профиль функции*

В данной работе описан аналитический способ расчета распределения зарядов плоских круговых дисков и дисков в виде сферических сегментов, расположенных во внешнем электростатическом поле. Получены две группы взаимно сопряженных полиномов, позволяющих сводить интегральное уравнение обратного проецирования в алгебраическое уравнение. Распределение потенциалов на поверхности пластины представляется в виде разложения по одной группе полиномов, тогда как сопряженная группа представляет распределения зарядов на поверхности электродов с теми же коэффициентами разложения. С помощью полученных полиномов решаются как прямая, так и обратная задача уравнения обратного проецирования. Важным моментом данной работы является то, что полученные полиномы позволяют представлять прямое и обратное решение в аналитическом виде.

В качестве подтверждения правильности работы алгоритма приведены решения модельных задач восстановления зарядов по распределению потенциалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарновский А.С. Об определении понятий «потенциал» и «потенциальное поле» // Электричество. – 2000. – № 1. – С. 63–64.
2. Шишигин С.Л. Построение двумерной картины электростатического поля // Электричество. – 2004. – № 3. – С. 53–58.
3. Миролюбов Н.Н., Костенко М.В., Левинштейн М.Л., Тиходеев Н.Н. Методы расчета электростатических полей. – М.: Высшая школа, 1963. – 415 с.
4. Исаев Ю.Н., Кулешова Е.О. Расчет распределения зарядов электрического поля на поверхности плоской системы электродов, помещенной во внешнее электростатическое поле // Энергетика: экология, надежность, безопасность: Матер. XII Всеросс. научно-техн. конф. – Томск: Изд-во ТПУ, 2006. – С. 69–72.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А. Математические методы компьютерной томографии. – М.: Наука, 1985. – 160 с.
6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука, 1986. – 286 с.

Поступила 05.05.2008 г.

УДК 621.372.4:537.52

РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАРЯДОВ ПЛАСТИН ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНЕГО НЕСИММЕТРИЧНОГО ПОЛЯ

Е.О. Кулешова, Ю.Н. Исаев, О.В. Васильева, Д.А. Русол*

Томский политехнический университет
E-mail: kuleshova@elti.tpu.ru
*ОАО «НИПИ», г. Томск

Предлагается алгоритм расчета распределения зарядов по поверхности проводника неканонической формы при наличии произвольного внешнего поля. Алгоритм позволяет находить решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода в виде разложения по собственным функциям интегрального оператора Фредгольма, что существенно упрощает решение сложной некорректной задачи. Алгоритм включает синтез собственного базиса физической системы с учетом того, что эта система может находиться лишь в состояниях, формируемых линейной комбинацией ее собственных функций. В этом случае уравнения, описывающие состояние системы, упрощаются, и от интегральных уравнений можно перейти к системе алгебраических уравнений.

Расчет распределения зарядов на поверхности плоскости при отсутствии симметрии требует привлечения методов, учитывающих кроме радиальной зависимости еще и угловую (азимутальную) зависимость. Одним из возможных методов решения двумерного интегрального уравнения Фредгольма является метод, позволяющий находить решение в виде разложения по собственным функциям интегрального оператора Фредгольма.

При воздействии внешнего поля возникает перераспределение зарядов, результирующее поле является суперпозицией полей создаваемого зарядами на поверхности электродов и внешним источником. Этот факт выражается в виде интегрального уравнения Фредгольма первого рода [1, 2].

$$-U^0(\mathbf{r}_0)+U_0=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_D\frac{\sigma(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}d\mathbf{r},\ \ \mathbf{r}=\{x,y,z\},$$
$$\mathbf{r}_0=\{x_0,y_0,z_0\},\ \mathbf{r},\mathbf{r}_0\in D. \qquad (1)$$

Принятые обозначения соответствуют [1].

Перепишем уравнение (1) в цилиндрических координатах и учтем, что уравнение должно быть записано для поверхности электрода z=0 (2) из [1].

Основная идея использования собственных функций заключается в сведении двумерного интегрального уравнения к системе одномерных уравнений. Это возможно, если искать решения $\sigma=(\rho,\theta)$ и $U=(\rho,\theta)$ в виде суммы факторизованных слагаемых, азимутальная составляющая которых будет иметь экспоненциальный вид:

$$\sigma(\rho,\theta)=\sum_{n,m}C_{n,m}R_n^m(\rho)e^{j\theta m},$$

$$U(\rho,\theta)=\sum_{n,m}A_{n,m}R_n^m(\rho)e^{j\theta m}.$$

где $C_{n,m}$ и $A_{n,m}$ – коэффициенты разложения рядов $\sigma=(\rho,\theta)$ и $U=(\rho,\theta)$ соответственно, $R_n^m(\rho)$ – радиальная составляющая.

Очевидно, что в этом случае можно использовать линейную независимость гармонических функций $e^{j\theta m}$ и записать выражения искомой и известной функций для каждой гармоники в виде:

$$\sigma_m(\rho)=\sum_n c_{n,}R_n^m(\rho), U_m(\rho)=\sum_n a_n R_n^m(\rho), m=1,2,...$$

И, если функции разложения являются собственными, то соотношения между коэффициентами имеют простой вид: $c_n=a_n/\lambda_{n,m}$, т. е.

$$\sigma_m(\rho)=\sum_n\frac{a_{n,}}{\lambda_{n,m}}R_n^m(\rho),\quad U_m(\rho)=\sum_n a_nR_n^m(\rho),$$

где $\lambda_{n,m}$ – собственные числа.

Таким образом, если найти коэффициенты разложения известной функции $U(\boldsymbol{\rho})$ в собственном базисе системы, то легко определить коэффициенты разложения неизвестной функции $\sigma(\boldsymbol{\rho})$ распределения зарядов. Предлагаемый алгоритм позволяет находить решение уравнения (1) в виде разложения по собственным функциям интегрального оператора Фредгольма. Такой подход позволяет свести решение интегрального уравнения к решению системы линейных алгебраических уравнений. Алгоритм позволяет учитывать особенности решения некорректной обратной задачи в виде оптимального селективного гашения высокочастотных компонент разложения.

Первый этап алгоритма заключается в поиске собственных функций и собственных чисел двумерного интегрального уравнения (1).

$$\int\frac{\Psi(\boldsymbol{\rho}')d^2\boldsymbol{\rho}'}{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|}=\lambda\Psi(\boldsymbol{\rho}), \tag{2}$$

где $\Psi(\boldsymbol{\rho})$ – собственные функции, λ – собственные числа.

Второй этап алгоритма заключается в представлении искомого решения $\sigma(\boldsymbol{\rho})$ и потенциала результирующего поля $U(\boldsymbol{\rho})$ в виде разложения в ряд по собственным функциям:

$$\sigma(\boldsymbol{\rho})=\sum_n c_n\Psi_n(\boldsymbol{\rho}),\quad U(\boldsymbol{\rho})=\sum_n a_n\Psi_n(\boldsymbol{\rho}). \tag{3}$$

Третьим этапом определяются коэффициенты разложения a_n обобщенного ряда Фурье известной функции $U(\boldsymbol{\rho})$. Представления функций $\sigma(\boldsymbol{\rho})$ и $U(\boldsymbol{\rho})$ в виде рядов (3) подставляются в интегральное уравнение (1), которое редуцируется в алгебраическое, в силу свойств собственных функций (2):

$$\sum_n a_n\Psi_n(\boldsymbol{\rho})=\sum_n\lambda_n c_n\Psi_n(\boldsymbol{\rho}).$$

В силу линейной независимости собственных функций получаем $c_n=a_n/\lambda_n$. Таким образом, получаем искомое решение в виде разложения по собственным функциям

$$\sigma(\boldsymbol{\rho})=\sum_n\frac{a_n}{\lambda_n}\Psi(\boldsymbol{\rho}).$$

Так как решаемая задача является некорректной и обратной, необходимо учитывать высокую чувствительность решения $\sigma(\boldsymbol{\rho})$ к шумам в исходных данных $U(\boldsymbol{\rho})$ [3–5]. Для этого пролонгируем коэффициенты разложения решения в комплексную плоскость, осуществляя слабый спектральный сдвиг

$$\sigma(\boldsymbol{\rho})=\sum_n\frac{a_n}{\lambda_n+i\varepsilon}\Psi_n(\boldsymbol{\rho}),$$

где ε – бесконечно малая величина, i – мнимая единица.

Четвертый этап алгоритма заключается в фильтрации полученного решения в силу неизбежного наличия шумов в найденных коэффициентах разложения. На этом этапе производится гашение высокочастотных составляющих на основе использования сглаживающего функционала А.Н. Тихонова [5].

Задача нахождения таких собственных функций $\Psi_n(\boldsymbol{\rho})$ сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\Psi_k(\boldsymbol{\rho})\lambda_k=\int K(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')\Psi_k(\boldsymbol{\rho}')d^2\boldsymbol{\rho}', \tag{4}$$

здесь $K(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')$ – ядро интегрального уравнения, $\Psi_k(\boldsymbol{\rho})$, λ_k – собственные функции и собственные значения интегрального уравнения (4), соответственно,

Решение интегрального уравнения (4) будем искать в факторизованном виде:

$$\Psi(\boldsymbol{\rho})=R(\boldsymbol{\rho})\Theta(\theta). \tag{5}$$

Прежде всего определим вид азимутальной функции $\Theta(\theta)$. Отметим, что функция $\Theta(\theta)$ должна быть непрерывной и периодической функцией угла θ с периодом 2π. Подставляя решение (5) в уравнение (4), получим

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R K(\rho,\theta,\rho',\theta')R(\rho)\Theta(\theta)\rho d\rho d\theta=\lambda R(\rho)\Theta(\theta).$$

Произведем следующую замену переменных: $\zeta=\theta'=\theta$, $d\zeta=d\theta$, $\theta'=\zeta+\theta$, тогда

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R K(\rho,\rho',\zeta)R(\rho')\Theta(\zeta+\theta)\rho d\rho d\zeta=$$

$$=\lambda R(\rho)\Theta(\theta). \tag{6}$$

Из уравнения (6), в силу непрерывности, периодичности и единственности решения, следует, что $\Theta(\zeta+\theta)=\Theta(\zeta)\Theta(\theta)$. Общее решение этого уравнения, имеющее период 2π, хорошо известно и имеет вид $\exp(im\theta)$. Следовательно, функция $\Theta(\theta)$ записывается следующим образом:

$$\Theta(\theta) = \exp(im\theta). \quad (7)$$

Для определения радиальной матрицы перехода подставим выражение (7) в (6) и, после преобразований, получаем однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\int_0^R \rho\, d\rho\, R(\rho) \int_0^{2\pi} d\zeta\, \exp(im\zeta) K(\rho,\rho',\zeta) = \lambda R(\rho). \quad (8)$$

Введем обозначение:

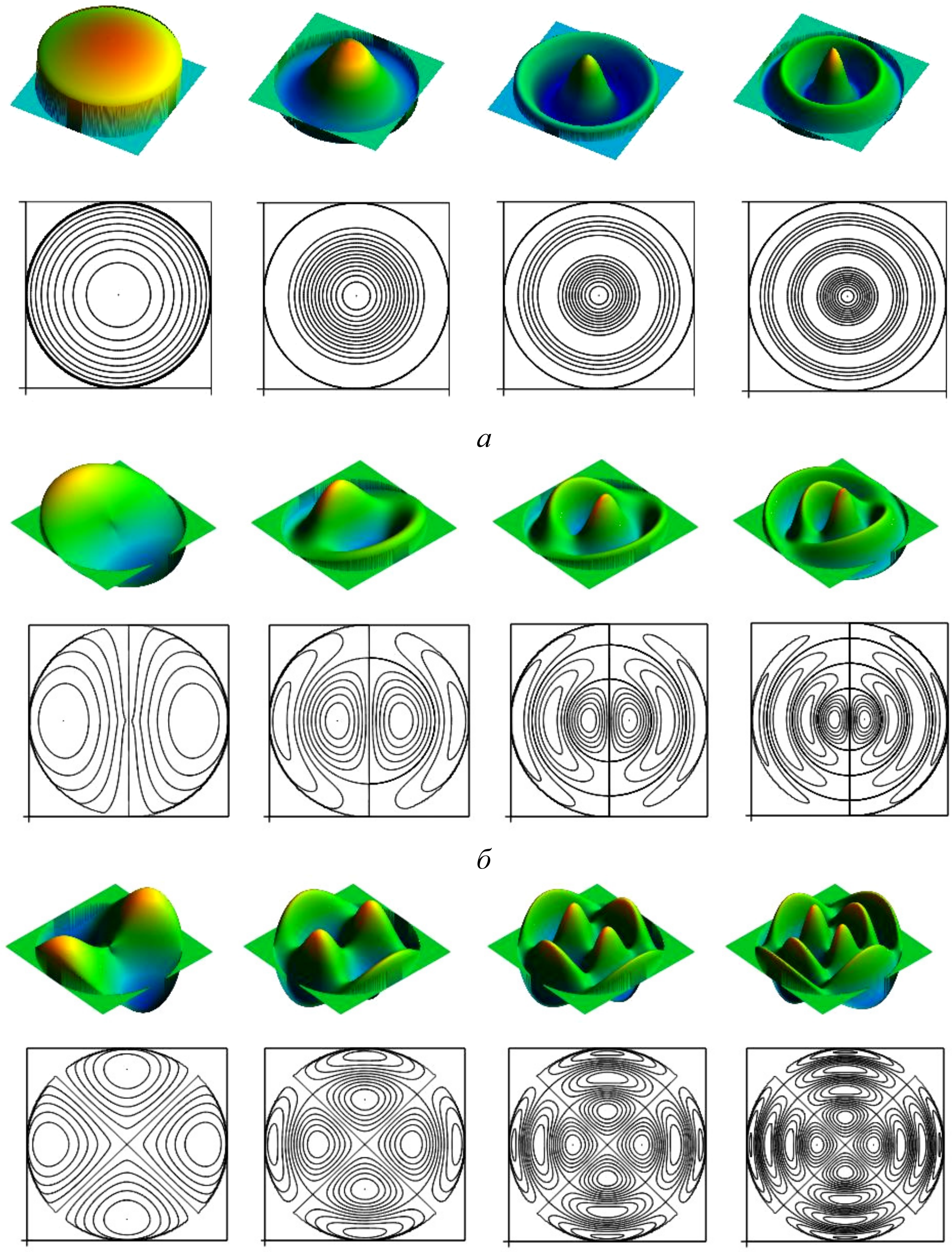
$$K_m(\rho,\rho') = \int_0^{2\pi} d\zeta\, \exp(im\zeta) K(\rho,\rho',\zeta).$$

Выражение (8) сводиться к:

$$\int_0^R \rho\, d\rho\, R^m(\rho) K_m(\rho,\rho') = \lambda R^m(\rho). \quad (9)$$

Для выражения (9) было рассчитано ядро при различных азимутальных составляющих m=0,1,2,... Пространственное изображение полученных собственных функций приведено на рис. 1.

В выражении (9) введем обозначение



а

б

в

Рис. 1. *Контурные линии и изометрическое изображение первых четырех собственных функций при: а) m=0; б) m=1; в) m=2*

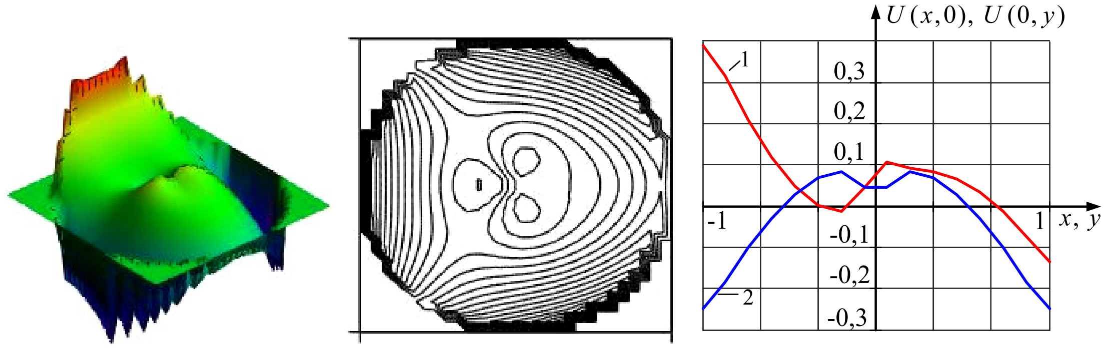


Рис. 2. Пространственное распределение, изолинии и профили потенциальной функции U(x,y) по осям: 1) x; 2) y

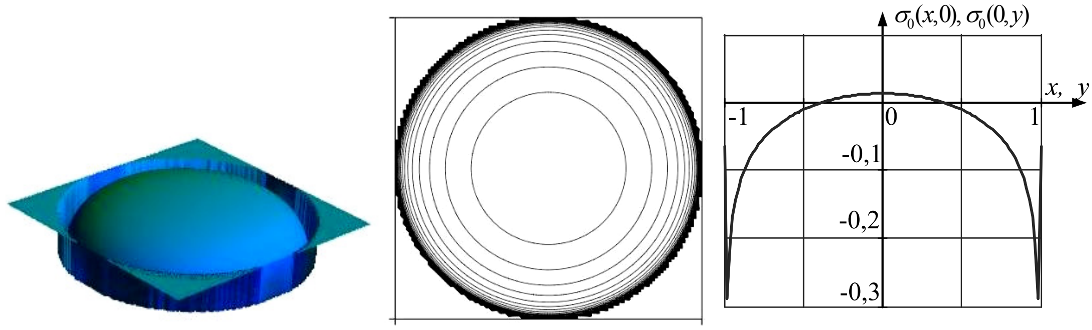


Рис. 3. Пространственное распределение, изолинии и профили $s_0(x,0)$, $s_0(0,y)$ распределения зарядов $s_0(x,y)$

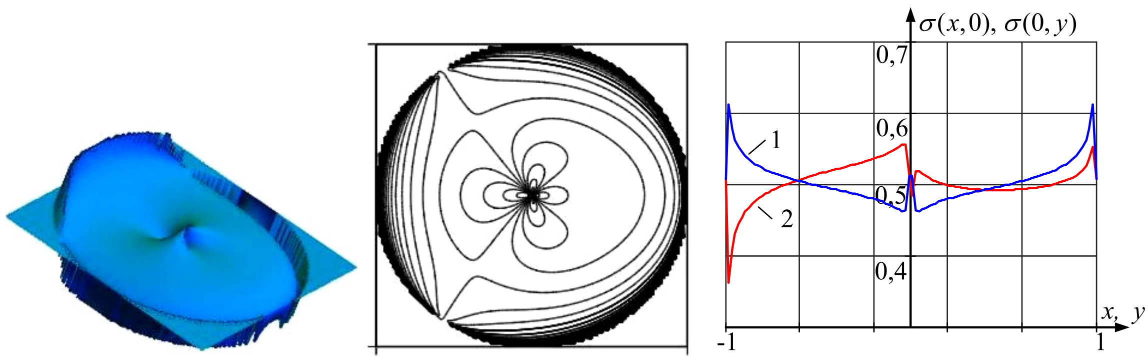


Рис. 4. Пространственное распределение, изолинии и профили распределения зарядов s(x,y) по осям: 1) x; 2) y

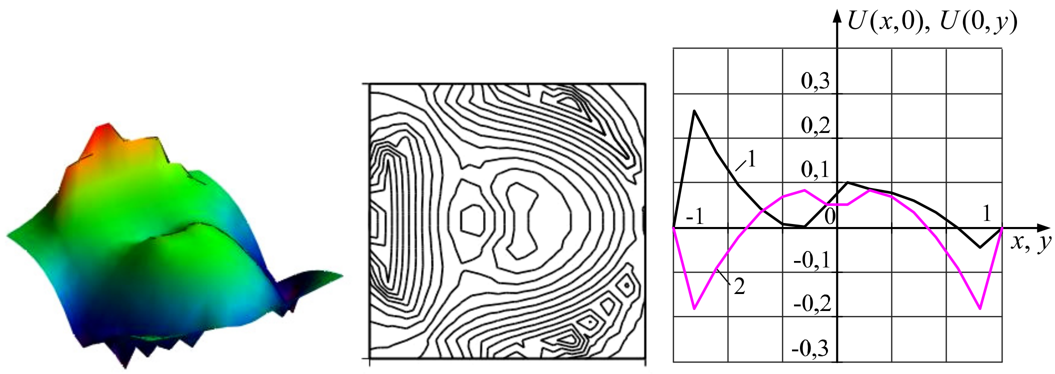


Рис. 5. Пространственное распределение, изолинии и профили потенциальной функции U(x,y) по осям: 1) x; 2) y

$$T^m(\rho,\rho') = K_m(\rho,\rho')\rho\, d\rho.$$

$$T_{ij}^m = k_{ij}^m\ \rho_i\,\Delta\rho,\ i,j = 0\ldots N,\ \Delta\rho = \frac{R}{N},\ \rho_i - \text{вес}.$$

Матрицы T^m не симметричны и имеют N различных собственных значений λ_j^m, j=0,1,2,...,N. Они имеют N соответствующих линейно независимых собственных векторов, удовлетворяющих условию [6]:

$$T^m\Psi_j^m(\rho) = \lambda_j^m\Psi_j^m(\rho),$$

где $\Upsilon^m(\rho)=[\Psi_0{}^m(\rho),\Psi_1{}^m(\rho),\Psi_2{}^m(\rho),\ldots\Psi_N{}^m(\rho)]^T$.

Для определения коэффициентов разложения необходимо использовать собственные функции Φ_j^m(r) транспонированной матрицы $[T^m]^T$

$$(T^m)^T\,\Phi_j^m(\rho)=\lambda_j^m\Phi_j^m(\rho),$$

где $\Phi^m(\rho)=[\,\Phi_0^m(\rho),\,\Phi_1^m(\rho),\,\Phi_2^m(\rho),\ldots\,\Phi_N^m(\rho)]^T$.

Известно [6], что собственные векторы матриц T^m и $[T^m]^T$, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны и для них справедливы условия:

$$\int_0^R \rho d\rho \Phi_j^m(\rho)\Psi_i^m(\rho)=\delta_{ij}\;Nr_i^m,\quad j=0,1,2,\ldots,N,$$

где $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$, Nr_i^m – условия нормировки.

Продемонстрируем работу алгоритма на нескольких азимутальных зависимостях и покажем совпадение результатов расчета по выше описанному алгоритму с непосредственным вычислением интеграла Фредгольма (1).

Определим распределение зарядов при произвольном несимметричном распределении потенциала. Представим модельное распределение потенциала в виде ряда по радиальным и азимутальным компонентам:

$$U(\rho,\theta)=0{,}1-0{,}2\rho^2-0{,}5\rho^2\cos\theta+0{,}5\rho\cos 2\theta.$$

Рассматривать данное распределение потенциала будем как сумму трех составляющих при различных значениях азимутального индекса m. В нашем случае m=0,1,2.

При m=0 составляющая распределения потенциала имеет вид $U_0(\rho)=0{,}1-0{,}2\rho^2$, при m=1 $U_1(\rho,\theta)=-0{,}5\rho^2\cos\theta$, при m=2 $U_2(\rho,\theta)=-0{,}5\rho\cos 2\theta$.

Модельное распределение потенциала $U(\rho,\theta)$, являющееся суммой всех выше перечисленных составляющих, представлено на рис. 2.

Для полиномов соответствующей степени ρ^k, k=0,1,2,... при различных азимутальных составляющих определяем матрицы коэффициентов разложения функции $U(\rho,\theta)$, используя (3).

Для m=0 и k=0 составляющая распределения потенциала $U_0(\rho)=0{,}1=\sum_n A_n^0\Phi_n^0(\rho)$. Умножим правую и левую часть равенства на $\Psi^0(\rho)$:

$$\int_0^R \rho d\rho \Psi_k^0(\rho)U_0=\sum_n A_n^0\int_0^R \rho d\rho \Psi_k^0(\rho)\Phi_n^0(\rho).$$

Учитывая условия ортогональности, получаем:

$$\int_0^R \rho d\rho \Psi_k^0(\rho)U_0=\sum_n A_n^0 Nr_n^m.$$

Отсюда определяем коэффициенты A_n^0, используя выражение

$$A_n^0=\frac{1}{\|Nr\|}\int_0^R U(\rho)\Psi_n(\rho)\rho\,d\rho.$$

Используя (3), определяем коэффициенты разложения распределения зарядов

$$C^0=\frac{A^0}{\lambda^0}.$$

Распределение зарядов определим как

$$\sigma_0(\rho)=\sum_{n=0}^N \Phi^0(\rho)C^0.$$

Определение коэффициентов C^0 является обратной некорректной задачей, поэтому необходимо осуществлять регуляризацию решения с помощью сглаживающего функционала А.Н. Тихонова.

Аналогично определяем коэффициенты разложения $\sigma(\rho,\theta)$ при m=0 для полинома второй степени $U_0(\rho)=-0{,}2\rho^2$.

Результирующее распределение зарядов для нулевой азимутальной составляющей изображено на рис. 3.

Аналогично были рассмотрены составляющие распределения потенциала при m=1 и m=2.

На рис. 4 представлено пространственное распределение зарядов, соответствующее модельному распределению потенциала.

Критерием правильности расчетов является непосредственное вычисление интеграла (2). В качестве подынтегральной функции $\sigma(\rho',\theta)$ подставляем полученное распределение зарядов. В результате получаем распределение потенциала, представленное на рис. 5, которое совпадает с модельным распределением потенциала, рис. 6. Данный пример наглядно демонстрирует эффективность работы алгоритма. Переход от интегральных уравнений к системе алгебраических уравнений существенно упрощает решение и требует меньших временных затрат.

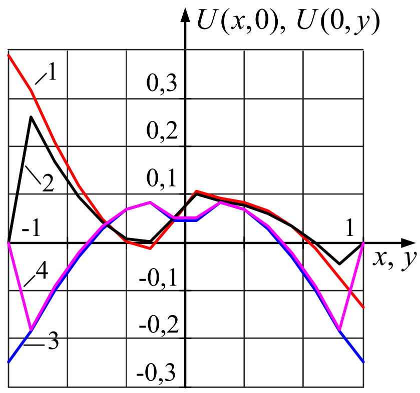


Рис. 6. *Профили потенциальной модельной функции U(x,y) и восстановленного распределения потенциала соответственно по осям: 1,2) x; 3,4) y*

Описанный алгоритм, позволяет синтезировать оптимальный базис разложения, являющийся наилучшим для интегрального уравнения томографии обратного проецирования – двумерного уравнения Фредгольма. Полученные собственные функции являются наилучшим, по сравнению с любым другим, разложением в смысле минимизации размерности пространства разложения. При синтезе оптимального базиса были учтены особенности решения некорректных обратных задач. Преимущество алгоритма заключается в том, что сначала вычисляются коэффициенты разложения известной функции $U(\rho,\theta)$, а затем найденные коэффициенты делятся на соответствующие собственные числа. В результате получаются коэффициенты разложения искомой функции распределение зарядов $\sigma(\rho,\theta)$. При необходимости получить единичное распределение зарядов $\sigma(\rho,\theta)=1$ достаточно представить разложение потенциальной функции $U(\rho,\theta)$ в виде суммы собственных функций с единичными коэффициентами разложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исаев Ю.Н., Кулешова Е.О., Васильева О.В., Русол Д.А. Расчет распределения зарядов пластин при наличии внешнего несимметричного поля // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312. – № 4. – С. 70–75.
2. Миролюбов Н.Н., Костенко М.В., Левинштейн М.Л., Тиходеев Н.Н. Методы расчета электростатических полей. – М.: Высшая школа, 1963. – 415 с.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А. Математические методы компьютерной томографии. – М.: Наука, 1985. – 160 с.
4. Преображенский Н.Г., Пикалов В.В. Неустойчивые задачи диагностики плазмы. – Новосибирск: Наука, 1982. – 238 с.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука, 1986. – 286 с.
6. Баринов В.А., Совалов С.А. Режимы энергосистем: методы анализа и управления. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 440 с.

Поступила 05.05.2008 г.

УДК 621.311.001

ЗАКОНОМЕРНОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ СПЕКТРОВ И СТРУКТУР СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

С.В. Шиловский

Институт автоматизации энергетических систем, г. Новосибирск
E-mail: shi@iaes.ru

Предлагается решение системы дифференциальных уравнений электромеханических движений в виде гармонической функции. Рассматриваются вопросы определения закономерностей формирования спектров и структур собственных электромеханических колебаний. Исследуются оценки гармонического состава электромеханических колебаний. Обосновывается применение частот собственных колебаний в качестве показателей для оценки удаленности режима от предельного по устойчивости.

Введение

Анализ условий обеспечения статической и динамической устойчивости, электромеханических переходных процессов при научных исследованиях, в практике проектирования и эксплуатации имеет своей целью найти упрощенное с точки зрения устойчивости описание энергообъединения, обнаружить некоторые достаточно простые свойства объединенной электроэнергетической системы. В основе таких упрощенных представлений всегда лежит некоторое отображение системы в рассматриваемой области ее функционирования [1].

Объективный анализ устойчивости объединения целесообразно проводить с помощью процедур исследования, основанных на численной оценке ее системных свойств. В основе этих процедур предлагается учитывать реакцию системы на возмущения. Тогда объединение в своем движении должно проявлять свои динамические свойства [2–6].

В основе электромеханических переходных процессов энергообъединений лежат свободные колебательные движения синхронных машин. Свободное движение, совершаемое под действием только внутренних сил, комплексно отражает и проявляет динамические свойства системы. Выявить их можно на основе исследования линеаризованных математических моделей. Качественно рассмотрение динамических свойств энергосистем базируется на предельно простой математической модели. Она ориентирована на описание процессов в системах, составленных из большого количества дискретных, упруго связанных между собой колеблющихся сосредоточенных элементов, в которых распределена вся инерционная масса системы. В качестве последних выступают синхронные машины [1].

В основу анализа устойчивости естественно положить изучение реакции системы на возмущения в виде гармонических колебаний с частотами, соответствующими собственным частотам электромеханической системы, а динамические свойства целесообразно исследовать для представительного набора собственных частот, оценивая гармонический состав электромеханических колебаний и используя частоты собственных колебаний для числовых оценок удаленности режима от предельного.