УДК 514.76

ОТОБРАЖЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ПЛОЩАДОК КАСАТЕЛЬНОГО И НОРМАЛЬНОГО РАССЛОЕНИЙ МНОГОМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.К. Барышева, Е.Т. Ивлев

Томский политехнический университет
Тел.: (382-2)-56-37-29

Изучаются отображения двумерных площадок слоев касательного и нормального расслоений многомерной поверхности в евклидовом пространстве. Каждое из указанных отображений определяется соответствующими двумя вещественными функциями двух вещественных аргументов. Рассматриваются случаи, когда эти функции являются гармоническими и удовлетворяют условиям Коши-Римана. Все рассмотрения носят локальный характер, а функции, встречающиеся в статье, предполагаются аналитическими.

1. Аналитический аппарат

1.1. Рассматривается n-мерное евклидово пространство E_i, отнесенное к подвижному ортонормальному реперу $R=\{\overline{A},\overline{e}_i\}(i,j,k,l=\overline{1,n})$ с деривационными формулами и структурными уравнениями

$$\begin{aligned} & dA=\omega^l\overline{e}_l,\;\; d\overline{e}_k=\omega_k^j\overline{e}_j, \\ & D\omega^l=\omega^k\wedge\omega_k^l,\;\; D\omega_k^l=\omega_k^j\wedge\omega_j^l. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь 1-формы ω_k^l удовлетворяют соотношениям

$$\omega_k^l+\omega_l^k=0, \tag{1.2}$$

которые вытекают из условия ортонормальности репера R:

$$(\overline{e}_l,\;\overline{e}_k)=\delta_{lk}=\begin{cases}0, & l\neq k,\\ 1, & l=k.\end{cases} \tag{1.3}$$

1.2. В пространстве E_n зададим m-мерную поверхность (m-поверхность) S_m и присоединим к ней ортонормальный репер R так, чтобы точка A была текущей точкой этой m-поверхности, а m-мерная плоскость (m-плоскость)

$$L_m=(\overline{A},\;\overline{e}_1,\overline{e}_2,\;\ldots,\overline{e}_m)\Leftrightarrow x^{\hat{\alpha}}=0,\;\;(\hat{\alpha}=\overline{m+1,\;n}) \tag{1.4}$$

была касательной m-плоскостью к S_m в точке A. Тогда дифференциальные уравнения m-поверхности $S_m\subset E_n$ с учетом (1.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \omega^{\hat{\alpha}}=0,\;\;\omega^{\hat{\alpha}}=A_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}}\omega^\beta\overset{(1.3)}{\Rightarrow}\omega_{\hat{\alpha}}^\alpha=A_{\hat{\alpha}\beta}^\alpha\omega^\beta=-\omega_\alpha^{\hat{\alpha}}, \\ & dA_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}}-A_{\gamma\beta}^{\hat{\alpha}}\omega_\alpha^\gamma-A_{\alpha\gamma}^{\hat{\alpha}}\omega_\beta^\gamma+A_{\alpha\beta}^{\hat{\beta}}\omega_{\hat{\beta}}^{\hat{\alpha}}=A_{\alpha\beta\gamma}^{\hat{\alpha}}\omega^\gamma, \\ & A_{[\alpha\beta]}^{\hat{\alpha}}=0,\;\;A_{[\alpha\beta\gamma]}^{\hat{\alpha}}=0,\;\;A_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}}=-A_{\hat{\alpha}\beta}^\alpha, \\ & (\alpha,\;\beta,\;\gamma=\overline{1,\;m};\;\;\hat{\alpha},\;\hat{\beta},\hat{\gamma}=\overline{m+1,\;n}). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь и в дальнейшем 1-формы ω^α приняты за базисные, символом $L_s=(\overline{A},\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_s)$ обозначается s-плоскость, проходящая через точку A параллельно линейно независимым векторам $\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_s$, а величины x^i означают в (1.4) локальные координаты точки относительно ортонормального репера R. Из (1.5) следует, что система величин $\Gamma_2=\{A_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}}\}$ образует внутренний фундаментальный геометрический объект второго порядка m-поверхности $S_m\subset E_n$ в смысле Г.Ф. Лаптева [1].

Из (1.1–1.5) замечаем, что $(n-m)$-плоскость

$$P_{n-m}=(\overline{A},\;\overline{e}_{m+1},\ldots,\overline{e}_n)\perp L_m\Leftrightarrow x^\alpha=0 \tag{1.6}$$

можно считать оснащающей или нормальной $(n-m)$-плоскостью в смысле [2] или [3].

Замечание 1.1. Символом $T_m=(S_m;L_m)$ обозначается расслоенное в смысле [2] с базой S_m и слоями L_m, а $N_{m,n-m}=(S_m;P_{n-m})$ – нормальное расслоение с базой S_m и слоями P_{n-m}.

Замечание 1.2. В данной статье предполагается, что числа m и n удовлетворяют условиям:

$$m+2\leq n\leq\frac{m(m+3)}{2}. \tag{1.7}$$

2. Поля двумерных площадок $L_2^1\subset L_m$ и $L_2^1\subset P_{n-m}$ на m-поверхности $S_m\subset E_n$

2.1. Каждой точке A базы S_m в соответствующих слоях расслоений $T_{m,m}$ и $N_{m,n-m}$ сопоставим двумерные площадки $L_2^1\subset L_m$ и $L_2^1\subset P_{n-m}$, проходящие через точку A, которые в терминах ортонормального репера R зададим так:

$$
\begin{aligned}
&L_2^1 = (\bar{A}, \bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2) \Leftrightarrow x^{a_2} = h_{a_1}^{a_2} x^{a_1},\\
&x^{\hat{\alpha}} = 0,\ \ \bar{\varepsilon}_{a_1} = \bar{e}_{a_1} + h_{a_1}^{a_2} \bar{e}_{a_2},\\
&(a_1, b_1, c_1 = 1, 2;\ \ a_2, b_2, c_2 = \overline{3, m});\\
&P_2^1 = (\bar{A}, \bar{\varepsilon}_{m+1}, \bar{\varepsilon}_{m+2}) \Leftrightarrow x^{\hat{a}_2} = g_{\hat{a}_1}^{\hat{a}_2} x^{\hat{a}_1},\\
&x^{\alpha} = 0,\ \ \bar{\varepsilon}_{\hat{a}_1} = \bar{e}_{\hat{a}_1} + g_{\hat{a}_1}^{\hat{a}_2} \bar{e}_{\hat{a}_2},\\
&(\hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{c}_1 = m+1,\ \ m+2;\ \ \hat{a}_2, \hat{b}_2, \hat{c}_2 = \overline{m+3, n}).
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Пользуясь условиями инвариантности геометрических образов относительно репера R в смысле [1], получаем следующие дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют величины $h_{a_1}^{a_2}$ и $g_{\hat{a}_1}^{\hat{a}_2}$:

$$
\begin{aligned}
&dh_{a_1}^{a_2} - h_{b_1}^{a_2} \omega_{a_1}^{b_1} + h_{a_1}^{b_2} \omega_{a_2}^{a_2} + \omega_{a_1}^{a_2} = h_{a_1 \alpha}^{a_2} \omega^{\alpha};\\
&dg_{\hat{a}_1}^{\hat{a}_2} - g_{\hat{b}_1}^{\hat{a}_2} \omega_{\hat{a}_1}^{\hat{b}_1} + g_{\hat{a}_1}^{\hat{b}_2} \omega_{\hat{b}_2}^{\hat{a}_2} + \omega_{\hat{a}_1}^{\hat{a}_2} = g_{\hat{a}_1 \alpha}^{\hat{a}_2} \omega^{\alpha}.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Из (2.2) замечаем, что каждая из систем величин

$$
H = \{h_{a_1}^{a_2}\},\ \ G = \{g_{\hat{a}_1}^{\hat{a}_2}\}
\tag{2.3}
$$

образует на m-поверхности S_m поле геометрических объектов в смысле [1].

Из (2.1) следует, что каждой точке $A \in S_m \subset E_n$ в слоях L_m и P_{n-m} расслоений $T_{m,m}$ и $N_{m,n-m}$ отвечают следующие линейные подпространства, проходящие через точку A:

$$
\begin{aligned}
&L_{m-2}^2 = (\bar{A}, \bar{\varepsilon}_3, \ldots, \bar{\varepsilon}_m) \Leftrightarrow x^{a_1} = h_{a_2}^{a_1} x^{a_2},\\
&x^{\hat{\alpha}} = 0,\ \ L_{m-2}^2 \perp L_2^1,\\
&\bar{\varepsilon}_{a_2} = \bar{e}_{a_2} + h_{a_2}^{a_1} \bar{e}_{a_1},\ \ h_{a_2}^{a_1} = -h_{a_1}^{a_2};\\
&P_{n-m-2}^2 = (\bar{A}, \bar{\varepsilon}_{m+3}, \ldots, \bar{\varepsilon}_n) \Leftrightarrow x^{\hat{a}_1} = h_{\hat{a}_2}^{\hat{a}_1} x^{\hat{a}_2},\\
&x^{\alpha} = 0,\ \ P_{n-m-2}^2 \perp P_2^1,\\
&\bar{\varepsilon}_{\hat{a}_2} = \bar{e}_{\hat{a}_2} + g_{\hat{a}_2}^{\hat{a}_1} \bar{e}_{\hat{a}_1},\ \ g_{\hat{a}_2}^{\hat{a}_1} = -g_{\hat{a}_1}^{\hat{a}_2}.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Из (1.1) и (1.5) с учетом (2.1) следует, что на m-поверхности $S_m \subset E_n$ задано распределение

$$
\Delta_{2,m}^1 : A \to L_2^1,
\tag{2.5}
$$

интегральные кривые которого в смысле [2], описываемые точкой $A \in S_m$ с касательными, принадлежащими L_2^1, определяются следующей системой дифференциальных уравнений

$$
\omega^{a_2} = h_{a_1}^{a_2} \omega^{a_1},\ \ \omega^{\hat{\alpha}} = 0,
\tag{2.6}
$$

которая в общем случае не является вполне интегрируемой.

Замечание 2.1. Символом

$$
x = (\bar{A},\ \bar{\varepsilon}_{a_1}) x^{a_1}
\tag{2.7}
$$

обозначается прямая, которая касается линии, описываемой точкой A вдоль интегральной кривой распределения $\Delta_{2,m}^1$, определяемой дифференциальными уравнениями

$$
k(x) : \omega^{a_1} = x^{a_1} \theta,\ \ \omega^2 = h_{a_1}^{a_2} x^{a_1} \theta,\ \ \omega^{\hat{\alpha}} = 0,\ \ D\theta = \theta \wedge \theta_1.
\tag{2.8}
$$

Прямую (2.7) при этом будем называть направлением x в плоскости L_2^1. Символом $T_z y$ в дальнейшем будем обозначать касательное линейное подпространство к однопараметрическому семейству прямых $y = (\bar{A}, \bar{\varepsilon}_{\hat{a}_1}) y^{\hat{a}_1} \subset L_2^1$ вдоль кривой $k(z)$ или в направлении z.

2.2. Пользуясь соотношениями (1.1), (1.5), (2.1), (2.4) и (2.7) с учетом (2.8), получаем

$$
d(x^{a_1} \bar{\varepsilon}_{a_1}) = C_{a_1 b_1}^{\hat{a}_1} x^{a_1} x^{b_1} \theta^2 \bar{\varepsilon}_{\hat{a}_1} + (\cdots).
\tag{2.9}
$$

Здесь символом (...) обозначаются несущественные члены, а величины $C_{b_1 c_1}^{\hat{a}_1}$, симметричные по нижним индексам, определяются по формулам

$$
\begin{aligned}
&C_{b_1 c_1}^{\hat{a}_1} = g_{\hat{a}_2}^{\hat{a}_1} B_{b_1 c_1}^{\hat{a}_2} + B_{b_1 c_1}^{\hat{a}_1},\\
&B_{b_1 c_1}^{\hat{\alpha}} = A_{b_1 c_1}^{\hat{\alpha}} + A_{b_1 b_2}^{\hat{\alpha}} h_{c_1}^{b_2} + A_{b_2 c_1}^{\hat{\alpha}} h_{b_1}^{b_2} + A_{b_2 c_2}^{\hat{\alpha}} h_{b_1}^{b_2} h_{c_1}^{c_2}.
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Из дифференциальных уравнений (1.5) и (2.4) с учетом (2.10) получаются следующие дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют величины $C_{b_1 c_1}^{\hat{a}_1}$:

$$
dC_{b_1 c_1}^{\hat{a}_1} - C_{a_1 c_1}^{\hat{a}} \omega_{b_1}^{a_1} - C_{b_1 c_1}^{\hat{a}_1} \omega_{c_1}^{a_1} + C_{b_1 c_1}^{\hat{b}_1} \omega_{b_1}^{\hat{a}_1} = C_{b_1 c_1 \alpha}^{\hat{a}_1} \omega^{\alpha},
\tag{2.11}
$$

где $a_1, b_1, c_1 = 1, 2$; $a_2, b_2, c_2 = \overline{3, m}$; $\hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{c}_1 = m+1, m+2$; $\hat{a}_2, \hat{b}_2, \hat{c}_2 = \overline{m+3, n}$. Здесь явный вид величин $C_{b_1 c_1 \alpha}^{\hat{a}_1}$ для нас несущественный.

Из (2.9) с учетом замечания 2.1 получаем, что каждой точке $A \in S_m \subset E_n$ отвечает отображение

$$
f : L_2^1 \to P_2^1,
\tag{2.12}
$$

которое определяется формулами

$$
y^{\hat{a}_1} = C_{a_1 b_1}^{\hat{a}_1} x^{a_1} x^{b_1} = f^{\hat{a}_1}(x^{a_1}).
\tag{2.13}
$$

Геометрически отображение (2.13) характеризуется следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&y = f(x) = (\bar{A},\ \bar{\varepsilon}_{\hat{a}_1}) y^{\hat{a}_1} = P_2^1 \cap \{T_x x \cup L_m \cup P_{n-m-2}^2\},\\
&x = (\bar{A},\ \bar{\varepsilon}_{a_1}) x^{a_1} \subset L_2^1.
\end{aligned}
$$

2.3. Таким образом, отображение (2.12) в каждой точке $A \in S_m \subset E_n$ определяется двумя квадратичными функциями $y^{\hat{a}_1}$ с двумя неизвестными x^{a_1} с областью определения $L_2^1 \subset L_m$ и областью значений $P_2^1 \subset P_{n-m}$.

В соответствии с [4. С. 75–76] функции $y^{\hat{a}_1} = f(x^{a_1})$ будут удовлетворять условиям Коши-Римана в точке $M(x_1, x_2) \in L_2^1$, отвечающей точке $A \in S_m \subset E_n$, тогда и только тогда, когда выполняются соотношения

$$
\frac{\partial y^{m+1}}{\partial x^1} = \frac{\partial y^{m+2}}{\partial x^2},\ \ \frac{\partial y^{m+2}}{\partial x^1} = -\frac{\partial y^{m+1}}{\partial x^2},
\tag{2.14}
$$

и являются гармоническими, если

$$
\frac{\partial^2 y^{\hat{a}_1}}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 y^{\hat{a}_1}}{(\partial x^2)^2} = 0.
\tag{2.15}
$$

Определение 2.1. Отображение $f: L_2^1 \to L_2^2$, отвечающее точке $A \in S_m \subset E_n$, называется: 1) дифференцируемым в точке $M(x_1, x_2) \in L_2^1$ и обозначается $f_d(M)$, если функции $y^{\hat{a}_1} = f^{\hat{a}_1}(x^{a_1})$, определяющие это отображение, удовлетворяют условиям Коши-Римана в точке $M \in L_2^1$; 2) аналитическим отображением на плоскости L_2^1 или отображением f_a, если оно дифференцируемо во всех точках $M \in L_2^1$; 3) гармоническим на плоскости L_2^1 и обозначается f_r, если функции $y^{\hat{a}_1} = f(x^{a_1})$ являются гармоническими функциями на L_2^1.

Из (2.13–2.15) в соответствии с определением 2.1 следует, что соответствующее отображение $f{:}L_2^1 \to P_2^1$ определяется соотношениями:

$$f_d(M) \Leftrightarrow \begin{cases} (C_{11}^{m+1} - C_{21}^{m+2})x^1 + (C_{12}^{m+1} - C_{22}^{m+2})x^2 = 0, \\ (C_{11}^{m+2} + C_{21}^{m+1})x^1 + (C_{12}^{m+2} + C_{22}^{m+1})x^2 = 0, \end{cases}$$

$$x^{a_2} = h_{a_1}^{a_2} x^{a_1};$$

$$f_a \Leftrightarrow \begin{cases} C_{11}^{m+1} - C_{21}^{m+2} = 0, \quad C_{12}^{m+1} - C_{22}^{m+2} = 0, \\ C_{11}^{m+2} + C_{21}^{m+1} = 0, \quad C_{12}^{m+2} + C_{22}^{m+1} = 0, \end{cases} \qquad (2.16)$$

$$f_r \Leftrightarrow C_{11}^{m+1} + C_{22}^{m+1} = 0, \quad C_{11}^{m+2} + C_{22}^{m+2} = 0.$$

Из (2.16) замечаем: 1) любое отображение $f{:}L_2^1 \to L_2^2$, как и следовало ожидать, является отображением f_r; 2) в общем случае, т.е. в случае

$$\begin{vmatrix} C_{11}^{m+1} - C_{21}^{m+1} & C_{12}^{m+1} - C_{22}^{m+2} \\ C_{11}^{m+2} + C_{21}^{m+1} & C_{12}^{m+2} + C_{22}^{m+1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

в каждой точке $A \in S_m \subset E_n$ отображение $f{:}L_2^1 \to P_2^1$ дифференцируемо в точке $A \in L_2^1$.

Для геометрической интерпретации отображений (2.16) проведем такую канонизацию ортонормального репера R в точке $A \in S_m \subset E_n$, при которой

$$h_{a_1}^{a_2} = 0, \quad g_{\hat{a}_1}^{\hat{a}_2} = 0, \qquad (2.17)$$

где $a_1, b_1 = 1,2$; $a_2, b_2 = \overline{3,m}$; $\hat{a}_1, \hat{b}_1 = m+1, m+2$; $\hat{a}_2, \hat{b}_2 = \overline{m+3,n}$, что с учетом (2.2) приводит к дифференциальным уравнениям

$$\omega_{a_1}^{a_2} = h_{a_1\alpha}^{a_2} \omega^\alpha, \quad \omega_{\hat{a}_1}^{\hat{a}_2} = g_{\hat{a}_1\alpha}^{\hat{a}_2} \omega^\alpha. \qquad (2.18)$$

Поэтому указанная канонизация репера R в соответствии с [5] существует на любой m-поверхности $S_m \subset E_n$. Из (2.17) и (2.1–2.6) получаем

$$L_2^1 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2), \quad L_{m-2}^2 = (\bar{A}, \bar{e}_3, \ldots, \bar{e}_m),$$
$$P_2^1 = (\bar{A}, \bar{e}_{m+1}, \bar{e}_{m+2}), \quad P_{n-m-2}^2 = (\bar{A}, \bar{e}_{m+3}, \ldots, \bar{e}_n), \qquad (2.19)$$

причем интегральные кривые распределения $\Delta_{2,m}^1$, описываемые точкой A на S_m, определяются дифференциальными уравнениями

$$\omega^{a_2} = 0, \omega^{\hat{\alpha}} = 0. \qquad (2.20)$$

Из (2.10) в силу (2.17) замечаем, что

$$C_{b_1c_1}^{\hat{a}_1} = A_{b_1c_1}^{\hat{a}_1} = A_{c_1b_1}^{\hat{a}_1}. \qquad (2.21)$$

Пусть точка $X \in P_2^1$ с радиус-вектором $\bar{X} = \bar{A} + x^{\hat{a}_1} \bar{e}_{\hat{a}_1}$ описывает вдоль кривых (2.20) линии с касательными, принадлежащими линейному подпространству $P_{n-m-2}^2 \cup L_{m-2}^2$. Это возможно тогда и только тогда, когда

$$(d\bar{X}, \ \bar{e}_3, \ldots, \ \bar{e}_n) = 0, \ \ \omega^3 = \cdots = \omega^m = 0, \ \ \omega^{\hat{\alpha}} = 0. \qquad (2.22)$$

Из

$$d\bar{X} = (\delta_{a_1}^{b_1} + x^{\hat{a}_1} A_{\hat{a}_1 a_1}^{b_1}) \omega^{a_1} \bar{e}_{b_1} + \cdots$$

в силу (2.22) и (2.21) получаем следующие уравнения:

$$(\delta_{a_1}^{b_1} + x^{\hat{a}_1} A_{\hat{a}_1 a_1}^{b_1}) \omega^{a_1} = 0, \quad \omega^{a_2} = 0, \omega^{\hat{\alpha}} = 0.$$

Эта система имеет нетривиальные решения относительно ω^{a_1} тогда и только тогда, когда $\det[\delta_{a_1}^{b_1} + x^{\hat{a}_1} A_{\hat{a}_1 a_1}^{b_1}] = 0$. Поэтому множество всех точек $X \in P_2^1$ (фокусов в смысле [6]) образует в P_2^1 конику q_1^2, определяемую уравнениями:

$$q_1^2 : A_{\hat{a}_1 b_1}^{a_1} A_{\hat{b}_1 a_1}^{b_1} x^{\hat{a}_1} x^{\hat{b}_1} + 2A_{\hat{a}_1 a_1}^{a_1} x^{\hat{a}_1} + 2 = 0, \ \ x^\alpha = 0, \ \ x^{\hat{a}_2} = 0. \qquad (2.23)$$

Из (2.23) с учетом (2.21), соотношений

$$A_{\hat{a}_1 b_1}^{a_1} = -A_{a_1 b_1}^{\hat{a}_1} = -A_{b_1 a_1}^{\hat{a}_1}$$

и (2.16) вытекает справедливость следующих теорем:

Теорема 2.1. Отображение $f{:}L_2^1 \to P_2^1$ в точке $A \in S_m \subset E_n$ является отображением f_r в смысле определения 2.1 тогда и только тогда, когда точка A является центром коники $q_1^2 \subset P_2^1$.

Теорема 2.2. Отображение $f{:}L_2^1 \to P_2^1$ в точке $A \in S_m \subset E_n$ является отображением f_a тогда и только тогда, когда коника $q_1^2 \subset P_2^1$ является окружностью с центром A и радиуса $r = \{(A_{11}^{m+1})^2 + (A_{12}^{m+2})^2\}^{-1/2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Московского математического общества. – М., 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
2. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии. Итоги науки и техники. – М.: ВИНИТИ АН СССР. 1979. – С. 7–246.
3. Норден А.П. Пространства аффинной связности. – М.: Наука, 1976. – 432 с.
4. Александров И.А. Теория функций комплексного переменного. – Томск: Томский государственный университет, 2002. – 510 с.
5. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RNR). – 1962. – № 2. – P. 231–240.
6. Акивис М.А. Фокальные образы поверхностей ранга r // Известия вузов. Сер. Математика. – 1957. – № 1. – С. 9–19.