УДК 530.1:517.957

КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ ТИПА ХАРТРИ С КВАДРАТИЧНЫМ ОПЕРАТОРОМ

А.Л. Лисок, А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов*

Томский политехнический университет
*Томский государственный университет
E-mail: lisok@mph.phtd.tpu.edu.ru

Исследуются свойства симметрии уравнения типа Хартри с квадратичным оператором. Проведена редукция исходной нелинейной задачи к линейной. В явном виде построены семейства операторов симметрии исходного нелинейного интегро-дифференциального уравнения.

Ключевые слова:
Нелинейные уравнения, операторы симметрии, квазиклассическое приближение.

Введение

Теория группового анализа дифференциальных уравнений дает эффективный универсальный инструмент построения точных аналитических решений дифференциальных уравнений, имеющих важные физические приложения [1]. Идеи и методы группового анализа можно распространить на более широкие классы многомерных уравнений математической физики, в том числе на некоторые классы интегродифференциальных уравнений. Эту задачу удается решить, в частности, с помощью формализма квазиклассических асимптотик, основанного на методе ВКБ-Маслова (см., например, [2]), теории комплексного ростка [3, 4] и их модификаций в различных задачах линейной и нелинейной математической физики [5–10]. Симметрия нелокальных уравнений исследовалась многими авторами, отметим, в частности, работы [8, 11–13]. В работе [13] на основе метода квазиклассических асимптотик построены операторы симметрии и оператор эволюции для многомерного уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова с квадратичным потенциалом и квадратичной нелокальной нелинейностью.

Основной целью данной работы является построение операторов симметрии для многомерного уравнения типа Хартри с оператором, квадратичным по независимым переменным и производным. Операторы симметрии, согласно определению, оставляют инвариантным множество решений уравнения и позволяют по известным решениям построить новые решения нелинейного уравнения.

Уравнение типа Хартри представляет собой нелокальное обобщение нелинейного уравнения Шредингера [14] и имеет важные приложения, например, в теории бозе-эйнштейновских конденсатов [15, 16] при учете нелокальных взаимодействий, в моделях квантовой теории многочастичных систем, в нелинейной оптике, в биофизике при описании коллективных возбуждений в молекулярных цепочках и в других приложениях.

Метод построения операторов симметрии, примененный в данной работе, опирается на результаты работ [5, 6, 13]. Отметим, что хотя квазиклассический подход является приближенным по своей природе, в некоторых частных случаях он позволяет получить точные решения исходной задачи. Подобная ситуация имеет место для уравнения типа Хартри с квадратичным оператором по независимым переменным и их производным, рассмотренная в [8, 9], где на основе квазиклассического подхода построено точное решение задачи Коши.

1. Уравнение типа Хартри с квадратичным оператором

Запишем уравнение типа Хартри в виде

$$\{-i\hbar\partial_t + \widehat{\mathcal{H}}(t)\}\Psi(\boldsymbol{x},t) = $$
$$= \{-i\hbar\partial_t + \widehat{\mathcal{H}}(t) + \kappa\widehat{V}(t,\Psi(t))\}\Psi(\boldsymbol{x},t) = 0, \qquad (1)$$

$$\Psi(\boldsymbol{x},t) \in L_2(\mathbb{R}^n_x),$$

где $\widehat{V}(t,\Psi(t)) = \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}\,\Psi^*(\boldsymbol{y},t)V(\hat{z},\widehat{w},t)\Psi(\boldsymbol{y},t)$,

κ – пареметр нелинейности.

Здесь линейные операторы $\widehat{\mathcal{H}}(t)=\mathcal{H}(\hat{z},t)$ и $V(\hat{z},\hat{w},t)$ являются псевдодифференциальными операторами [17] от некоммутирующих операторов

$$\hat{z} = (\widehat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{x}) = (-i\hbar\partial/\partial\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}),\ \widehat{w} = (-i\hbar\partial/\partial\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}),\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n,$$

удовлетворяющих следующим коммутационным соотношениям:

$$[\hat{z}_k,\hat{z}_j]_- = [\widehat{w}_k,\widehat{w}_j]_- = i\hbar J_{kj},\ [\hat{z}_k,\widehat{w}_j]_- = 0,\ k,j=\overline{1,2n}.$$

Здесь $\|J_{kj}\|_{2n\times 2n}$ – элементы единичной симплектической матрицы

$$J = \|J_{kj}\|_{2n\times 2n} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}_{2n\times 2n},$$

а $\mathbb{I}=\mathbb{I}_{n\times n}$ – единичная $n\times n$-матрица. Для функций от некоммутирующих переменных мы будем использовать упорядочение по Вейлю [17]. В этом случае, например, для оператора $\hat{A}(t)$ с вейлевским символом $A(z,t)=A(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x},t)$ можно записать

$$\widehat{A}(t)\Psi(\vec{x},t,\hbar) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n}\times$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} dydp\,\exp\left(\frac{i}{\hbar}\langle(x-y),p\rangle\right)A\left(p,\frac{x+y}{2},t\right)\Psi(y,t,\hbar).$$

Здесь <.,.> – евклидово скалярное произведение n-мерных и $2n$-мерных векторов

$$\langle \boldsymbol{p},\boldsymbol{x}\rangle = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j, \quad \boldsymbol{p},\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,$$

$$\langle z,w\rangle = \sum_{j=1}^{2n} z_j w_j, \quad z,w\in\mathbb{R}^{2n},$$

соответственно.

Многомерное уравнение типа Хартри (1) с переменными коэффициентами общего вида не интегрируемо известными методами, такими, например, как метод обратной задачи [14, 18] и др. Поэтому в общем случае аналитические решения этого уравнения можно построить лишь приближенно. Эффективный метод построения таких решений предоставляет аппарат квазиклассических асимптотик. Так, например, для нелинейных операторов типа самосогласованного поля теория канонического оператора с вещественной фазой для решения задачи Коши была построена в [19, 20]; для спектральных задач, включая сингулярные потенциалы, – в работах [20, 21] (см. также [22–24]). Солитоноподобные решения для уравнения типа Хартри и некоторых видов потенциалов взаимодействия построены в [25]. Специфика уравнения типа Хартри (1), в котором нелинейность присутствует только под знаком интеграла, проявляется в том, что оно в определенном смысле близко к линейным [17]. А именно, среди решений уравнения существует подмножество, регулярно зависящее от параметра нелинейности. По аналогии с когерентными состояниями квантовой механики в [5, 6] был определен класс функций

$$\mathcal{P}_\hbar^t =$$
$$=\left\{\Psi:\Psi(\boldsymbol{x},t)=e^{\frac{i}{\hbar}\{S(t)+\langle \boldsymbol{P}(t),\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(t)\rangle\}}\phi\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(t)}{\sqrt{\hbar}},t,\hbar\right)\right\},$$

сосредоточенных на некоторой фазовой траектории $z=Z(t)=(\boldsymbol{P}(t),\boldsymbol{X}(t))$. Функции $\phi(\xi,t,\hbar)$ принадлежат пространству Шварца и регулярно зависят от $\hbar$, а $S(t),\boldsymbol{P}(t),\boldsymbol{X}(t)$ – дифференцируемые функции, определяющие класс. На классе функций $\mathcal{P}_\hbar^t$, названных траекторно-сосредоточенными, задача построения квазиклассических асимптотик нелинейного уравнения сводится к вспомогательной задаче построения асимптотических решений линейных ассоциированных уравнений Шредингера. В результате метод комплексного ростка Маслова [3, 4] удалось обобщить на уравнение (1). В частности, были построены формальные решения задачи Коши, асимптотические по малому формальному параметру $\hbar$ ($\hbar\to 0$) с точностью до $O(\hbar^{N/2})$, где N – произвольное натуральное число, и главный член асимптотики спектральной задачи [7]. В работах [8, 9] для уравнения (1) с квадратичным нелокальным потенциалом удалось построить оператор эволюции. В этом случае линейные операторы $\mathcal{H}(\hat{z},t)$ и $V(\hat{z},\hat{w},t)$ квадратичны по операторам $\hat{z}$, $\hat{w}$:

$$\mathcal{H}(\hat{z},t)=\frac{1}{2}\langle \hat{z},\mathcal{H}_{zz}(t)\hat{z}\rangle+\langle H_z(t),\hat{z}\rangle, \qquad (2)$$

$$V(\hat{z},\hat{w},t)=$$
$$=\frac{1}{2}\langle \hat{z},W_{zz}(t)\hat{z}\rangle+\langle \hat{z},W_{zw}(t)\hat{w}\rangle+\frac{1}{2}\langle \hat{w},W_{ww}(t)\hat{w}\rangle. \qquad (3)$$

Здесь $\mathrm{H}_{zz}(t)$, $W_{zz}(t)$, $W_{zw}(t)$, $W_{ww}(t)$ – $2n\times 2n$ заданные матрицы, а $\mathrm{H}_z(t)$ – заданный $2n$-вектор.

Уравнение типа Хартри (1)–(3) интегрируется точно [8, 9] и обладает богатым набором симметрий, изучение которых позволяет получить различную информацию о решениях уравнения и показать, как многомерное уравнение свести к одномерному, построить классы точных или приближенных его решений. Поскольку уравнение (1)–(3) содержит нелокальную нелинейность, оно представляет особый интерес для симметрийного анализа, связанный с тем, что в общем случае не существует регулярного способа определить структуру симметрий уравнения, не являющегося дифференциальным. Уравнение (1) позволяет обойти эту проблему, поскольку его симметрии тесно связаны с симметриями соответствующего ассоциированного линейного уравнения.

2. Операторы симметрии и задача Коши

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1)

$$\Psi(\boldsymbol{x},t,\hbar)|_{t=0}=\gamma(\boldsymbol{x}), \qquad \gamma\in\mathcal{P}_\hbar^0, \quad \|\gamma(\boldsymbol{x})\|^2=1. \qquad (4)$$

Система Гамильтона-Эренфеста второго порядка, соответствующая задаче Коши (1), (4), имеет следующий вид [8]:

$$\begin{cases}\dot{z}_\Psi = J\{\mathcal{H}_z(t)+[\mathcal{H}_{zz}(t)+\tilde{\kappa}(W_{zz}(t)+W_{zw}(t))]z_\Psi\},\\ \dot{\Delta}_{\Psi 2}=J[\mathcal{H}_{zz}(t)+\tilde{\kappa}W_{zz}(t)]\Delta_{\Psi 2}-\\ -\Delta_{\Psi 2}[\mathcal{H}_{zz}(t)+\tilde{\kappa}W_{zz}(t)]J,\end{cases}$$
$$\tilde{\kappa}=\kappa\|\gamma\|^2.$$

В уравнении (1) сделаем замену: от функции $\Psi(x,t)$ перейдем к функции $\Phi(x,t)$ следующим образом:

$$\Psi(\boldsymbol{x},t)=e^{\frac{i}{\hbar}\{S(t)+\langle \boldsymbol{P}(t),\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(t)\rangle\}}\Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(t),t), \qquad (5)$$

где $S(t),\boldsymbol{P}(t),\boldsymbol{X}(t)$ – некоторые дифференцируемые функции, подлежащие определению.

Для $\Phi(x,t)$ получим следующее уравнение:

$$\{-i\hbar\partial_t+\dot{S}(t)+\langle \dot{\boldsymbol{P}}(t),\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(t)\rangle-\langle \boldsymbol{P}(t),\dot{\boldsymbol{X}}(t)\rangle+$$
$$+\frac{1}{2}\langle \hat{z}_\Phi,\mathcal{H}_{zz}(t)\hat{z}_\Phi\rangle+\langle \mathcal{H}_z(t),\hat{z}_\Phi\rangle+$$
$$+\kappa\int_{\mathbb{R}^n}d\boldsymbol{y}\Phi^*(\frac{1}{2}\langle \hat{z}_\Phi,W_{zz}(t)\hat{z}_\Phi\rangle+\langle \hat{z}_\Phi,W_{zw}(t)\hat{w}_\Phi\rangle+$$
$$+\frac{1}{2}\langle \hat{w}_\Phi,W_{ww}(t)\hat{w}_\Phi\rangle)\Phi\}\Phi=0,$$

где $\hat{z}_\Phi=(-i\hbar\partial/\partial\boldsymbol{x}+\boldsymbol{P}(t),\boldsymbol{x})$, $\hat{w}_\Phi=(-i\hbar\partial/\partial\boldsymbol{y}+\boldsymbol{P}(t),\boldsymbol{y})$.

Сделаем замену переменных $x=\boldsymbol{u}+X(t)$ и обозначим $\Phi(\boldsymbol{u}+X(t),t)=\tilde{\Phi}(\boldsymbol{u},t)$. Получим следующее уравнение:

$$\{-i\hbar\partial_t + i\hbar\left\langle \dot{\boldsymbol{X}}(t), \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}}\right\rangle + \dot{S}(t) + \langle \dot{\boldsymbol{P}}(t), \boldsymbol{u}\rangle -$$

$$-\langle \boldsymbol{P}(t), \dot{\boldsymbol{X}}(t)\rangle + \frac{1}{2}\langle \hat{z}_{\Phi u}, \mathcal{H}_{zz}(t)\hat{z}_{\Phi u}\rangle +$$

$$+\langle H_z(t), \hat{z}_{\Phi u}\rangle + \text{к}\int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{y}\tilde{\Phi}^*(\boldsymbol{y},t)\times$$

$$\times[\frac{1}{2}\langle \hat{z}_{\Phi u}, W_{zz}(t)\hat{z}_{\Phi u}\rangle + \langle \hat{z}_{\Phi u}, W_{zw}(t)\widehat{w}_{\Phi u}\rangle +$$

$$+\frac{1}{2}\langle \widehat{w}_{\Phi u}, W_{ww}(t)\widehat{w}_{\Phi u}\rangle]\tilde{\Phi}(\boldsymbol{y},t)\}\tilde{\Phi}(\boldsymbol{u},t) = 0, \qquad (6)$$

где обозначено $\hat{z}_{\Phi u}=\hat{z}_u+Z(t)$, $\hat{w}_{\Phi u}=\hat{z}_y+Z(t)$, $\hat{z}_u=(-i\hbar\partial/\partial\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})$, $\hat{z}_y=(-i\hbar\partial/\partial\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})$.

Функции $\Phi(\boldsymbol{u},t)$ по построению являются центрированными, т. е. удовлетворяют условию

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\Phi}^*(\boldsymbol{u},t)\hat{z}_u\tilde{\Phi}(\boldsymbol{u},t)\, d\boldsymbol{u} = 0.$$

Начальное условие (4) для уравнения (6) имеет вид

$$\tilde{\Phi}(\boldsymbol{u},t)|_{t=0} = e^{-\frac{i}{\hbar}\{S(0)+\langle \boldsymbol{P}(0),\, \boldsymbol{u}\rangle\}}\gamma(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{X}(0)).$$

Пусть вектор $z=Z(t)=(\boldsymbol{P}(t),\boldsymbol{X}(t))$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{Z}(t) = J\{\mathcal{H}_z(t) + [\mathcal{H}_{zz}(t) + \tilde{\kappa}(W_{zz}(t) + W_{zw}(t))]Z(t)\} \quad (7)$$

с начальным условием $Z(0)=\langle \gamma(\boldsymbol{x})|\hat{z}|\gamma(\boldsymbol{x})\rangle$, а функция $S(t)$ определяется соотношением

$$S(t) = \int_0^t \{\langle \boldsymbol{P}(t), \dot{\boldsymbol{X}}(t)\rangle - \tilde{\mathfrak{H}}(t)\}dt,$$

где

$$\tilde{\mathfrak{H}}(t) = \frac{1}{2}\langle Z(t), [\mathcal{H}_{zz}(t) + \tilde{\kappa}(W_{zz}(t) + 2W_{zw}(t) +$$

$$+W_{ww}(t)]Z(t)\rangle + \langle H_z(t), Z(t)\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{Sp}(W_{ww}(t)\Delta_2).$$

Здесь $2n\times 2n$ – матрица Δ_2 удовлетворяет уравнению

$$\dot{\Delta}_2 = J[\mathcal{H}_{zz}(t) + \tilde{\kappa}W_{zz}(t)]\Delta_2 - \Delta_2[\mathcal{H}_{zz}(t) + \tilde{W}_{zz}(t)]J \quad (8)$$

и начальному условию

$$\Delta_2(0) = \frac{1}{2}\left\|\gamma(\boldsymbol{x})\,|\,\{\Delta\hat{z}_j\Delta\hat{z}_k + \Delta\hat{z}_k\Delta\hat{z}_j\}\,|\,\gamma(\boldsymbol{x})\right\|.$$

Тогда функция $\tilde{\Phi}(\boldsymbol{u},t)$ является решением линейного ассоциированного уравнения

$$\left\{-i\hbar\partial_t + \frac{1}{2}\left\langle \hat{z}_u, (\mathcal{H}_{zz}(t) + \text{к}W_{zz})\hat{z}_u\right\rangle\right\}\tilde{\Phi}(\boldsymbol{u},t) = 0 \quad (9)$$

с начальным условием

$$\tilde{\Phi}(\boldsymbol{u},t)|_{t=0} = \phi(\boldsymbol{u}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\{S(0)+\langle \boldsymbol{P}(0),\, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{X}(0)\rangle\}}\gamma(\boldsymbol{u}).$$

Пусть $\hat{A}(\boldsymbol{u},t)=A(\hat{z}_u,t)$ – некоторый оператор с вейлевским символом $A(z,t)$, удовлетворяющий соотношению

$$\left[-i\hbar\partial_t + \frac{1}{2}\left\langle \hat{z}_u, (\mathcal{H}_{zz}(t) + W_{zz})\hat{z}_u\right\rangle,\ \widehat{A}(\boldsymbol{u},t)\right] = 0 \qquad (10)$$

и начальному условию

$$\widehat{A}(\boldsymbol{u},t)|_{t=0} = \hat{a}(\boldsymbol{u}),$$

где $\hat{a}(\boldsymbol{u})$:$S\to S$ – произвольный оператор. Тогда в силу (10) оператор $\hat{A}(\boldsymbol{u},t)$ является оператором симметрии уравнения (9) и переводит $\tilde{\Phi}(u,t)$ – решение уравнения (9) в некоторое другое его решение. Соответственно функция, определяемая соотношением

$$\bar{\Phi}_A(\boldsymbol{u},t) = \frac{1}{\alpha_A}\widehat{A}(\boldsymbol{u},t)\tilde{\Phi}(\boldsymbol{u},t),$$

где $\alpha_A=\|\hat{a}\tilde{\Phi}(\boldsymbol{u},0)\|$ – также решение уравнения (9).

При $t=0$ получим

$$\tilde{\Phi}_A(\boldsymbol{u},0) = \frac{1}{\alpha_A}\hat{a}(\boldsymbol{u})\phi(\boldsymbol{u}) = \phi_A(\boldsymbol{u}).$$

Здесь $\|\phi_A(\boldsymbol{u})\|=1$, откуда автоматически следует $\|\tilde{\Phi}_A(\boldsymbol{u},t)\|=1$. Однако в общем случае функция $\tilde{\Phi}_A(\boldsymbol{u},t)$ может и не соответствовать никакому решению исходного нелинейного уравнения, поскольку не для всех $\hat{A}(\boldsymbol{u},t)$ она является центрированной:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\Phi}^*_A(\boldsymbol{u},0)\hat{z}_u\tilde{\Phi}_A(\boldsymbol{u},0)d\boldsymbol{u} = 0.$$

Поэтому, чтобы построить решения исходного нелинейного уравнения, которые бы соответствовали $\tilde{\Phi}(\boldsymbol{u},t)$, обозначим

$$\lambda_0 = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\Phi}^*_A(\boldsymbol{u},0)\hat{z}_u\bar{\Phi}_A(\boldsymbol{u},0)d\boldsymbol{u} = \int_{\mathbb{R}^n} \phi^*_A(\boldsymbol{u})\hat{z}_u\phi_A(\boldsymbol{u})d\boldsymbol{u}$$

и

$$\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\Phi}^*_A(\boldsymbol{u},t)\hat{z}_u\tilde{\Phi}_A(\boldsymbol{u},t)d\boldsymbol{u}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что если $\lambda(t)$ – решение следующей задачи Коши:

$$\dot{\lambda}(t) = J(\mathcal{H}_{zz}(t) + \tilde{\kappa}W_{zz}(t))\lambda(t),$$

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix}\lambda_p(t)\\ \lambda_u(t)\end{pmatrix}, \quad \lambda(0) = \lambda_0 = \begin{pmatrix}\lambda_{p_0}\\ \lambda_{u_0}\end{pmatrix},$$

то функция, построенная по формуле

$$\tilde{\Phi}_A(\boldsymbol{u},t) = e^{\frac{i}{\hbar}\{S_\lambda(t)+\langle \boldsymbol{\lambda}_p(t),\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\lambda}_u(t)\rangle\}}\bar{\Phi}_A(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\lambda}_u(t),t),$$

где

$$S_\lambda(t) = \int_0^t \{\langle \boldsymbol{\lambda}_p(t), \dot{\boldsymbol{\lambda}}_u(t)\rangle - \mathcal{H}_\lambda(t)\}dt \qquad (11)$$

и

$$\mathcal{H}_\lambda(t) = \frac{1}{2}\left\langle \lambda(t), [\mathcal{H}_{zz}(t) + \tilde{\kappa}(W_{zz}(t) + 2W_{zw}(t) +\right.$$

$$\left. + W_{ww}(t))]\lambda(t)\right\rangle + \frac{1}{2}\tilde{\kappa}\,\mathrm{Sp}(W_{ww}(t)\Delta_2)$$

является решением уравнения (9) и удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi^*_A(\boldsymbol{u},t)\hat{z}_u\Phi_A(\boldsymbol{u},t)d\boldsymbol{u} = 0.$$

Сопоставив функциям $\tilde{\Phi}_A(\boldsymbol{u},t)=\Phi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{X}_A(t),t)$ и $\tilde{\Phi}(\boldsymbol{u},t)=\Phi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{X}(t),t)$ по формуле (5) функции $\Psi_A(\boldsymbol{x},t)$ и $\Psi(\boldsymbol{x},t)$ соответственно, получим

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\{S_A(t)+\langle \boldsymbol{P}_A(t),\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}_A(t)\rangle\}}\Psi_A(\boldsymbol{x},t)=$$
$$=\frac{1}{\alpha_A}e^{\frac{i}{\hbar}\{S_\lambda(t)+\langle\lambda_p(t),\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}_A(t)+\lambda_u(t)\rangle\}}\times$$
$$\times A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}_A(t)+\lambda_u(t),t)e^{\frac{-i}{\hbar}\{S(t)+\langle \boldsymbol{P}(t),\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(t)\rangle\}}\times$$
$$\times\Psi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{X}(t)-\boldsymbol{X}_A(t)+\boldsymbol{\lambda}_u(t),t),$$

откуда

$$\Psi_A(\boldsymbol{x},t)=e^{\frac{i}{\hbar}\{S_A(t)+\langle \boldsymbol{P}_A(t),\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}_A(t)\rangle\}}\times$$
$$\times\frac{1}{\alpha_A}e^{\frac{i}{\hbar}\{S_\lambda(t)+\langle\lambda_p(t),\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}_A(t)+\lambda_u(t)\rangle\}}\times$$
$$\times A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}_A(t)+\lambda_u(t),t)e^{\frac{-i}{\hbar}\{S(t)+\langle \boldsymbol{P}(t),\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(t)\rangle\}}\times$$
$$\times\Psi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{X}(t)-\boldsymbol{X}_A(t)+\boldsymbol{\lambda}_u(t),t). \qquad (12)$$

Оператор

$$\Psi_A(\boldsymbol{x},t)=\widehat{A}_{nl}\Psi(\boldsymbol{x},t),$$

определяемый соотношением (12), является оператором симметрии исходного нелинейного уравнения.

3. Операторы симметрии нелинейного и вспомогательного линейного уравнения

Пусть $\hat{a}:\mathcal{P}_\hbar^0\to\mathcal{P}_\hbar^0$ – некоторый оператор. Поставим для уравнения (1) следующие задачи Коши:

$$\Psi(\boldsymbol{x},t,\hbar)|_{t=0}=\gamma(\boldsymbol{x}),\ \gamma(\boldsymbol{x})\in\mathcal{P}_\hbar^0,\ \|\gamma(\boldsymbol{x})\|^2=1 \text{ и}$$
$$\Psi_A(\boldsymbol{x},t,\hbar)|_{t=0}=\hat{a}\gamma(\boldsymbol{x})=\gamma_A(\boldsymbol{x}),$$
$$\gamma_A(\boldsymbol{x})\in\mathcal{P}_\hbar^0,\quad \|\gamma_A(\boldsymbol{x})\|^2=1.$$

В уравнении (1) сделаем замену: от функций $\Psi_A(\boldsymbol{x},t)$ и $\Psi(\boldsymbol{x},t)$ перейдем к функциям $\tilde{\Phi}(\boldsymbol{u},t)$ и $\tilde{\Phi}_A(\boldsymbol{u},t)$по формулам (5), (7), (8), тогда функция $\tilde{\Phi}(\boldsymbol{u},t)$ удовлетворяют уравнению

$$\left\{-i\hbar\partial_t+\frac{1}{2}\langle\hat{z}_u,(\mathcal{H}_{zz}(t)+W_{zz})\hat{z}_u\rangle\right\}\tilde{\Phi}=0$$

и начальному условию

$$\tilde{\Phi}(\boldsymbol{u},t)|_{t=0}=e^{-\frac{i}{\hbar}\{S(0)+\langle \boldsymbol{P}(0),\boldsymbol{u}+\boldsymbol{X}(0)\rangle\}}\gamma(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{X}(0)),$$

где вектор $Z(t)$ является решением уравнения (7) с начальным условием $Z(0)=\langle\gamma(\boldsymbol{x})|\hat{z}|\gamma(\boldsymbol{x})\rangle$. Аналогично $\tilde{\Phi}_A(\boldsymbol{u},t)$ является решением уравнения

$$\left\{-i\hbar\partial_t+\frac{1}{2}\langle\hat{z}_u,(\mathcal{H}_{zz}(t)+W_{zz})\hat{z}_u\rangle\right\}\tilde{\Phi}_A(\boldsymbol{u},t)=0 \quad (13)$$

с начальным условием

$$\tilde{\Phi}_A(\boldsymbol{u},t)|_{t=0}=e^{-\frac{i}{\hbar}\{S_A(0)+\langle \boldsymbol{P}_A(0),\boldsymbol{u}+\boldsymbol{X}_A(0)\rangle\}}\gamma_A(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{X}_A(0)).$$

Вектор $Z_A(t)$ удовлетворяет уравнению (7) с начальным условием $Z_A(0)=\langle\gamma_A(\boldsymbol{x})|\hat{z}|\gamma_A(\boldsymbol{x})\rangle$, а

$$S_A(t)=\int_0^t\{\langle \boldsymbol{P}_A(t),\dot{\boldsymbol{X}}_A(t)-\mathcal{H}_A(t)\rangle\}dt,$$

где

$$\mathcal{H}_A(t)=\frac{1}{2}\Big\langle Z_A(t),[\mathcal{H}_{zz}(t)+\tilde{\kappa}(W_{zz}(t)+$$
$$+2W_{zw}(t)+W_{ww}(t))]Z_A(t)\Big\rangle+$$
$$+\Big\langle\mathcal{H}_z(t),Z_A(t)\Big\rangle+\frac{1}{2}\mathrm{Sp}(W_{ww}(t)\Delta_{2A}).$$

Матрица $\Delta_{2A}(t)$ является решением уравнения (8) с начальным условием

$$\Delta_{2A}(0)=\frac{1}{2}\left\|\gamma_A(\boldsymbol{x},t)\,|\,\{\Delta\hat{z}_j\Delta\hat{z}_k+\Delta\hat{z}_k\Delta\hat{z}_j\}\,|\,\gamma_A(\boldsymbol{x},t)\right\|.$$

Соотношение $\gamma_A(x)=\hat{a}\gamma(\boldsymbol{x})$ определяет оператор $\hat{a}(\boldsymbol{u})$, такой что $\tilde{\Phi}_A(\boldsymbol{u},t)=\hat{a}(\boldsymbol{u})\tilde{\Phi}(\boldsymbol{u},t)$.

Для оператора $\hat{A}(\boldsymbol{u},t)=A(\hat{z}_u,t)$ рассмотрим следующую задачу Коши:

$$[-i\hbar\partial_t+\frac{1}{2}\Big\langle\hat{z}_u,\{\mathcal{H}_{zz}(t)+W_{zz}(t)\}\hat{z}_u\Big\rangle,\ \widehat{A}(\boldsymbol{u},t)]=0 \quad (14)$$

с начальным условием

$$\widehat{A}(\boldsymbol{u},t)|_{t=0}=\hat{a}(\boldsymbol{u}).$$

Тогда в силу (14) оператор $\hat{A}(\boldsymbol{u},t)$ является оператором симметрии уравнения (13) и переводит $\tilde{\Phi}_A(\boldsymbol{u},t)$ – решение уравнения (13) – в его решение $\tilde{\Phi}_A(\boldsymbol{u},t)$.

Сопоставив функциям $\tilde{\Phi}_A(\boldsymbol{u},t)=\Phi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{X}_A(t),t)$ и $\tilde{\Phi}(\boldsymbol{u},t)=\Phi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{X}(t),t)$ по формуле (5) функции $\Psi_A(\boldsymbol{x},t)$ и $\Psi(\boldsymbol{x},t)$ соответственно, получим

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\{S_A(t)+\langle \boldsymbol{P}_A(t),\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}_A(t)\rangle\}}\Psi_A(\boldsymbol{x},t)=$$
$$=\bar{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}_A(t),t)e^{\frac{-i}{\hbar}\{S(t)+\langle \boldsymbol{P}(t),\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(t)\rangle\}}\times$$
$$\times\Psi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{X}(t)-\boldsymbol{X}_A(t),t)$$

или

$$\Psi_A(\boldsymbol{x},t)=e^{\frac{i}{\hbar}\{S_A(t)+\langle \boldsymbol{P}_A(t),\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}_A(t)\rangle\}}\times$$
$$\times\bar{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}_A(t),t)e^{\frac{-i}{\hbar}\{S(t)+\langle \boldsymbol{P}(t),\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(t)\rangle\}}\times$$
$$\times\Psi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{X}(t)-\boldsymbol{X}_A(t),t). \qquad (15)$$

Оператор

$$\Psi_A(\boldsymbol{x},t)=\bar{A}_{\mathrm{nl}}\Psi(\boldsymbol{x},t),$$

определяемый соотношением (15), также является оператором симметрии исходного нелинейного уравнения.

4. Заключение

При построении операторов симметрии мы воспользовались тем фактом, что исходному нелинейному уравнению можно сопоставить ассоциированное линейное уравнение, а для квадратичных операторов вида (2), (3) эти ассоциированные уравнения совпадают. В общем случае это не так, поэтому аналитические решения уравнения типа Хартри удается построить лишь приближенно. Многие приближенные подходы основаны на выборе подходящего анзаца, представляющего общий элемент класса функций, в котором строится приближенное решение. К таким методам можно отнести, например, метод коллективных переменных [26–30], лагранжев метод [31–33] и адиабатическое приближение [34]. Наиболее эффективным в различных многомерных задачах математической физики оказывается метод квазиклассических асимптотик, который используется в данной работе. Особенностью данного метода, отличающей его от обычного метода возмущений (разложения в степенной ряд по малому параметру), является то, что асимптотический малый параметр входит в решение как регулярно, так и сингулярно, что позволяет, в частности, строить локализованные решения, имеющие важный физический смысл. Эта возможность существенно в нелинейных задачах, где устойчивые локализованные возмущения, такие как, например, солитоны, являются объектом исследования. Достоинством метода квазикласических асимптотик является то, что он позволяет дать оценку точности построенного решения с заданной степенью асимптотического параметра.

Другие возможности построения аналитических решений дает симметрийный анализ [1, 35–37], который, исходя из свойств инвариантности уравнения, приводит к классам частных решений, которые могут служить прототипами анзацев классов частных решений. Однако переменные коэффициенты, как правило, сужают симметрию уравнения или исключают ее, что ограничивает возможности симметрийного анализа в таких случаях. Кроме того, непосредственное вычисление операторов симметрии для нелинейных уравнений связано с интегрированием производящего уравнения, что представляет отдельную трудоемкую задачу [11, 12]. Сравнение двух указанных подходов приводит к задаче построения приближенных симметрий уравнения типа Хартри в формализме квазиклассических асимптотик [38].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Президента РФ НШ-871.2008.2; АВЦП Министерства образования и науки РФ № 2.1.1/3436.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 399 с.
2. Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. – М.: Наука, 1976. – 296 с.
3. Маслов В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
4. Белов В.В., Доброхотов С.Ю. Квазиклассические асимптотики Маслова с комплексными фазами. I. Общий подход // Теоретическая и математическая физика. – 1988. – Т. 92. – № 2. – С. 215–254.
5. Belov V.V., Trifonov A.Yu., Shapovalov A.V. The trajectory-coherent approximation and the system of moments for the Hartree type equation // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2002. – V. 32. – № 6. – P. 325–370.
6. Белов В.В., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. Квазиклассическое траекторно-когерентное приближение для уравнения типа Хартри // Теоретическая и математическая физика. – 2002. – Т. 130. – № 3. – С. 460–492.
7. Белов В.В., Литвинец Ф.Н., Трифонов А.Ю. Квазиклассические спектральные серии для оператора типа Хартри, соответствующие точке покоя системы Гамильтона-Эренфеста // Теоретическая и математическая физика. – 2007. – Т. 150. – № 1. – С. 20–32.
8. Lisok A.L., Trifonov A.Yu., Shapovalov A.V. Exact solutions and symmetry operators for the nonlocal Gross-Pitaevskii equation with quadratic potentional // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. – 2005. – V. 1. – P. 1–14.
9. Lisok A.L., Trifonov A.Yu., Shapovalov A.V. The evolution operator of the Hartree-type equation with a quadratic potential // J. Phys. A: Math. Gen. – 2004. – V. 37. – P. 4535–4556.
10. Bellucci S., Trifonov A.Yu. Semiclassically-concentrated solutions for the one-dimensional Fokker-Planck equation with a nonlocal nonlinearity // J. Phys. A: Math. Gen. – 2005. – V. 38. – P. 535–456.
11. Пухначев В.В. Преобразование эквивалентности и скрытая симметрия эволюционных уравнений // Доклады АН СССР. Сер. Математика. – 1987. – Т. 294. – С. 535–538.
12. Meirmanov A.M., Pukhnachov V.V., Shmarev S.I. Evolution equations and Lagrangian coordinates. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994. – 311 p.
13. Shapovalov A.V., Rezaev R.O., Trifonov A.Yu. Symmetry operators for the Fokker-Plank-Kolmogorov equation with nonlocal quadratic nonlinearity // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. – 2007. – V. 3. – P. 1–16.
14. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной самомодуляции волн в нелинейных средах // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1971. – Т. 61. – С. 118–134.
15. Cornell E.A., Wieman C.E. Nobel lecture: Bose-Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years some recent experiments // Rev. Mod. Phys. – 2002. – V. 74. – P. 875–893.
16. Ketterle W. Nobel lecture: When atoms behave as waves: Bose-Einstein condensation and the atom laser // Rev. Mod. Phys. – 2002. – V. 74. – P. 1131–1151.
17. Карасев М.В., Маслов В.П. Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. – М.: Наука. 1991. – 368 с.
18. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. – М.: Наука, 1980. – 319 с.
19. Маслов В.П. Уравнения самосогласованного поля // Современные проблемы математики. – 1978. – Т. 11. – М.: ВИНИТИ, 1978. – С. 153–234.
20. Карасев М.В., Маслов В.П. Алгебры с общими коммутационными соотношениями и их приложения // Современные проблемы математики. – 1979. – Т. 13. – М.: ВИНИТИ, 1979. – С. 145–267.
21. Карасев М.В., Перескоков А.В. Правило квантования для уравнений самосогласованного поля с локальной быстро убывающей нелинейностью // Теоретическая и математическая физика. – 1989. – Т. 79. – № 2. – С. 198–208.

22. Бабич В.М., Булдырев В.С., Молотков И.А. Пространственно-временной лучевой метод. Линейные и нелинейные волны. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. – 272 с.

23. Молотков И.А., Вакуленко С.А. Сосредоточенные нелинейные волны. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. – 240 с.

24. Вакуленко С.А., Маслов В.П., Молотков И.А., Шафаревич А.И. Асимптотические решения уравнения Хартри, сосредоточенные при в малой окрестности кривой // Доклады РАН. – 1995. – Т. 345. – № 6. – С. 743–745.

25. Во Хань Фук, Четвериков В.М. Обобщенные солитоны уравнения Шредингера с унитарной нелинейностью // Теоретическая и математическая физика. – 1978. – Т. 36. – № 3. – С. 345–351.

26. Sanchez A., Bishop A.R. Collective coordinates and length-scale competition in spatially inhomogenious soliton-bearing equations // SIAM Rev. – 1998. – V. 40. – № 3. – P. 579–615.

27. Mertens F.G., Schnitzer H.J., Bishop A.R. Hierarchy of equations of motion for nonlinear coherent excitations applied to magnetic vortices // Phys. Rev. B. – 1997. – V. 56. – № 5. – P. 2510–2520.

28. Rice M.J. Physical dynamics of solitons // Phys. Rev. B. – 1983. – V. 28. – № 6. – P. 3587–3589.

29. Rice M.J., Mele E.J. Phenomenological theory of soliton formation in lightly-doped polyacetylene // Solid State Commun. – 1980. – V. 35. – № 6. – P. 487–491.

30. McLaughling D.W., Scott A.C. Perturbation analysis of fluxon dynamics // Phys. Rev. A. – 1978. – V. 18. – № 4. – P. 1652–1680.

31. Malomed B.A. Perturbative analysis of the interaction of a phi^4 kink with inhomogeneities // J. Phys. A: Math. Gen. – 1992. – V. 25. – № 4. – P. 755–764.

32. Kivshar Y.S., Fei Z., Vazquez L. Resonant soliton-impurity interactions // Phys. Rev. Lett. – 1991. – V. 67. – № 10. – P. 1177–1180.

33. Fei Z., Kivshar Y.S., Vazquez L. Resonant kink-impurity interactions in the sine-Gordon model // Phys. Rev. A. – 1992. – V. 45. – № 8. – P. 6019–6030.

34. Белов В.В., Доброхотов С.Ю., Тудоровский Т.Я. Асимптотические решения нерелятивистских уравнений квантовой механики в искривленных нанотрубках: I. Редукция к пространственно одномерным уравнениям // Теоретическая и математическая физика. – 2004. – Т. 141. – № 2. – С. 267–303.

35. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1989. – 639 с.

36. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov N.I. Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. – Dordrecht: Kluwer, 1993. – 435 p.

37. Fushchich W.I., Nikitin A.G. Symmetries of equations of quantum mechanics. – N.Y.: Allerton Press Inc., 1994. – 480 p.

38. Shvedov O.Yu. Semiclasical symmetries // Ann. Phys. – 2002. – V. 296. – P. 51–89.

Поступила 11.02.2009 г.

УДК 537.874.4

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТОНКИХ ПРОВОДНИКОВ НА БИСТАТИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ РАССЕЯНИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭЛЛИПСОИДА

Ю.А. Келлер

Томский государственный университет
E-mail: kua1102@sibmail.com

На основе метода вспомогательных источников получено решение задачи рассеяния электромагнитных волн на трехмерном магнитодиэлектрическом теле при наличии вблизи него тонких проводников, расположенных произвольным образом в пространстве относительно тела. Построенный алгоритм реализован в виде компьютерной программы для расчета характеристик рассеяния ряда структур, отличающихся взаимным расположением тел, входящих в них. Исследовано влияние тонких проводников на бистатические сечения рассеяния диэлектрического эллипсоида.

Ключевые слова:
Метод вспомогательных источников, диэлектрическое тело, тонкие проводники, математическое моделирование электромагнитного рассеяния.

Задачи рассеяния электромагнитного поля на структурах, состоящих из диэлектрического тела и тонких проводников, возникают в различных областях науки и техники, например, в антенной технике и радиолокации. Тонкие проводники часто используют в качестве передающих и приёмных антенн. При расположении таких антенн вблизи диэлектрических тел возникает проблема оценки влияния диэлектрических тел на параметры антенны, решение которой требует решения поставленной задачи рассеяния. В радиолокации при оценке радиолокационной заметности сложного объекта часто возникает ситуация, когда часть объекта – это диэлектрическое тело с расположенными вблизи него тонкими проводниками. Расчет бистатического сечения рассеяния (БСР) такой части объекта также требует решения поставленной задачи. Если расстояние между диэлектрическим телом и проводниками меньше или сравнимо с длиной волны, то корректная постановка исследований подобного рода приводит к необходимости решения граничных задач теории рассеяния с учетом электромагнитного взаимодействия между рассеивателями. Существующие численные методы [1] позволяют решать подобные задачи. Применительно к задачам, рассматриваемым в данной статье, из наиболее