АСИМПТОТИКИ НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГРОССА-ПИТАЕВСКОГО, КВАЗИКЛАССИЧЕСКИ СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ НА КРИВЫХ

А.Е. Кулагин
Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. А.Ю. Трифонов
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050
E-mail: aek8@tpu.ru

ASYMPTOTICS OF THE NONLOCAL GROSS-PITAEVSKII EQUATION SEMICLASSICALLY CONCENTRATED ON CURVES

A.E. Kulagin
Scientific Supervisor: Prof., Dr. A.Yu. Trifonov
Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050
E-mail: aek8@tpu.ru

Abstract. *A method of constructing semiclassical asymptotics for nonlocal Gross-Pitaevskii equation (GPE), concentrated on a curve in the phase space, has been considered. Solution of the nonlocal GPE on the curve is reduced to solution of the linear equation in the class functions concentrated at the point and additional condition. Example of the system evolution has been considered by solving of corresponding differential equations.*

Нелокальное уравнение Гросса-Питаевского имеет вид

$$\left\{-i\hbar\partial_t + V(\hat{z},t) + \varkappa \int\limits_{\mathrm{R}^2} W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)\,|\Psi(\boldsymbol{y},t)|^2\,d\boldsymbol{y}\right\}\Psi(\boldsymbol{x},t) = 0, \qquad (1)$$

где $\hat{z} = (\hat{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}$, $\hat{\boldsymbol{p}} = -i\hbar\nabla$, а $\varkappa$ – параметр нелинейности. Это уравнение используется в физике, например, для описания бозе-эйнштейновского конденсата в поле магнитной ловушки, причем функция $W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)$ в этом случае отвечает за потенциал взаимодействия частиц конденсата.

Рассмотрим решения уравнения (1), сосредоточенные в окрестности *k*-мерного многообразия Λ_t^k 2*n*-мерного фазового пространства

$$\Lambda_t^k = \left\{ z = Z(s,t) = \left(\boldsymbol{P}(s,t), \boldsymbol{X}(s,t)\right) \,\middle|\, s \in D \subset \mathbb{R}^k,\, t \in [0,T],\, T > 0 \right\},$$

где $s = (s_1, \ldots, s_k)$ – параметры многообразия, а $Z(s,t)$ – заданные функции.

Определение. Комплексная функция $\Psi(\boldsymbol{x},t,\hbar)$ принадлежит классу квазиклассически сосредоточенных функций типа (*k*), если для произвольного оператора $A(\hat{z},t)$

$$\lim_{\hbar\to 0} \frac{\left\langle \Psi \middle| \hat{A} \middle| \Psi \right\rangle(t,\hbar)}{\|\Psi\|^2(t,\hbar)} = \int\limits_D \sigma(s) A\left(Z(s,t),t\right) ds.$$

$k = 0$ соответствует классу траекторно сосредоточенных функций $\mathrm{P}_\hbar^t$ [1].

Теорема 1. Если функция $\Psi(\boldsymbol{x},t,\hbar)$ является квазиклассически сосредоточенным решением уравнения (1), то $Z(s,t)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\dot{\boldsymbol{X}}(s,t)=V_{\boldsymbol{p}}\left(Z(s,t),t\right),\quad \dot{\boldsymbol{P}}(s,t)=-V_{\boldsymbol{x}}\left(Z(s,t),t\right)-\tilde{\kappa}\int\limits_D \sigma(r)W_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{X}(s,t),\boldsymbol{X}(r,t),t\right)dr, \tag{2}$$

где $\tilde{\kappa}=\kappa\cdot\|\Psi\|^2$. Систему (2) будем называть системой Гамильтона-Эренфеста типа $(k,1)$.

На траекториях $z=Z(s,t)$ системы (2) стандартным образом определим действие

$$S^{(0)}(s,t)=\int\limits_0^t\left[\left\langle \boldsymbol{P}(s,t),\boldsymbol{X}(s,t)\right\rangle-V\left(Z(s,t),t\right)-\tilde{\kappa}\int\limits_D W\left(\boldsymbol{X}(s,t),\boldsymbol{X}(r,t),t\right)dr\right]dt+S_0(s).$$

Решения уравнения (1) будем искать в классе функций, квазиклассически сосредоточенных на поверхности $z=Z(s,t)$, который определим соотношением

$$\mathrm{J}_\hbar^\tau=\mathrm{J}_\hbar^{\tau(\boldsymbol{x},t)}=\mathrm{J}_\hbar^{\tau(\boldsymbol{x},t)}\left(Z\left(\tau(\boldsymbol{x},t),t\right),S\left(\tau(\boldsymbol{x},t),t\right)\right)=\left\{\Phi:\Phi(\boldsymbol{x},t,\hbar)=\chi(\boldsymbol{x},t,s,\hbar)\Big|_{s=\tau(\boldsymbol{x},t)},\ \chi(\boldsymbol{x},t,s,\hbar)\in\mathrm{P}_\hbar^t\right\},$$

где функция $\tau(\boldsymbol{x},t)$ определяется уравнением $\left\langle\dfrac{\partial\boldsymbol{X}(s,t)}{\partial s},\Delta\boldsymbol{x}\right\rangle\Big|_{s=\tau(\boldsymbol{x},t)}=0$, $\Delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{X}(s,t)$.

На функциях класса $\mathrm{J}_\hbar^\tau$ справедливо представление оператора импульса $\hat{\boldsymbol{p}}$ в виде

$\hat{\boldsymbol{p}}=-i\hbar\left(\nabla\big|_{s=\mathrm{const}}+\nabla\tau(\boldsymbol{x},t)\dfrac{\partial}{\partial s}\right)$. Обозначим через $\hat{\boldsymbol{\pi}}=-i\hbar\nabla\big|_{s=\tau(\boldsymbol{x},t)}$, $\Delta\hat{\boldsymbol{p}}=\hat{\boldsymbol{\pi}}-\boldsymbol{P}\left(\tau(\boldsymbol{x},t),t\right)$.

Теорема 2. На функциях класса $\mathrm{J}_\hbar^\tau\left(Z\left(\tau(\boldsymbol{x},t),t,\hbar\right),S\left(\tau(\boldsymbol{x},t),t,\hbar\right)\right)$ справедливы следующие асимптотические оценки:

$$\left\{\Delta\hat{z}\right\}^\alpha=\hat{O}\left(\hbar^{|\alpha|/2}\right),\quad \left\langle\left\{\Delta\hat{z}\right\}^\alpha\right\rangle=\hat{O}\left(\hbar^{|\alpha|/2}\right),\quad \Delta\hat{z}=\left(\Delta\hat{\boldsymbol{p}},\Delta\boldsymbol{x}\right),\quad \hbar\to 0.$$

Здесь $\langle\hat{A}(t)\rangle=\dfrac{1}{\|\Phi\|^2}\left\langle\Phi\middle|\hat{A}(t)\middle|\Phi\right\rangle$, а $\{\Delta\hat{z}\}^\alpha$ – оператор с вейлевским символом $(\Delta z)^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{Z}_+^{2n}$ [2].

Определение. Функцию $\langle\langle\hat{A}(t)\rangle\rangle=A_\Psi(t,s,\hbar)$, определяемую соотношением $\langle\hat{A}(t)\rangle=\int_D\sigma(s)\langle\langle\hat{A}(t)\rangle\rangle\,ds$, будем называть средним значением оператора $\hat{A}(t)$ в классе квазиклассически сосредоточенных функций.

Обозначим $Z(s,t,\hbar)=\langle\langle\hat{z}\rangle\rangle=Z(s,t)+\hbar Z^{(1)}(s,t,\hbar)$. Пусть $\Psi(\boldsymbol{x},t)=\Phi\left(\boldsymbol{x},s,t\right)$. Тогда функция $\Psi(\boldsymbol{x},t)$ является решением уравнения (1), если $Z^{(1)}(s,t,\hbar)=O(1)$ при $\hbar\to0$ и функция $\Phi(\boldsymbol{x},s,t)$ удовлетворяет приведенному уравнению Гросса-Питаевского с дополнительным условием:

$$\begin{cases}\left[-i\hbar\partial_t+H(s,t)+\left\langle H_z(s,t),\Delta\hat{z}\right\rangle+\dfrac{1}{2}\left\langle\Delta\hat{z},H_{zz}(s,t)\Delta\hat{z}\right\rangle\right]\Phi(\boldsymbol{x},s,t)=O\left(\hbar^{3/2}\right),\\ \hat{a}_0(s,0)\Phi(\boldsymbol{x},s,0)=O(\hbar),\end{cases} \tag{3}$$

$$\hat{a}_0(s,t)=\left\langle Z_s(s,t),J\Delta\hat{z}\right\rangle,$$

$$H(s,t)=V(s,t)+\tilde{\kappa}\int\limits_D\sigma(r)\left\{W(s,r,t)+\hbar\left\langle W_y(s,r,t),\boldsymbol{X}^{(1)}(r,t,\hbar)\right\rangle+\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\left[W_{zz}(s,r,t)\cdot\Delta_2(r,t,\hbar)\right]\right\}dr,$$

$$H_z(s,t)=V_z(s,t)+\tilde{\kappa}\int\limits_D\sigma(r)W_z(s,r,t)\,dr,\quad H_{zz}(s,t)=V_{zz}(s,t)+\tilde{\kappa}\int\limits_D\sigma(r)W_{zz}(s,r,t)\,dr,$$

$$J=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{I}_{n\times n}\\ \mathrm{I}_{n\times n} & 0\end{pmatrix},\quad W_z=\left(\boldsymbol{0},W_{\boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}},\quad Z^{(1)}=\left(\boldsymbol{P}^{(1)},\boldsymbol{X}^{(1)}\right)^{\mathrm{T}},\quad W_{zz}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & W_{xx}\end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathrm{I}_{n\times n}$ – единичная матрица, $V(s,t)=V\left(Z(s,t),t\right)$, $W(s,r,t)=W\left(Z(s,t),Z(r,t),t\right)$, $2\cdot\Delta_{2ij}(s,t,\hbar)=\left\langle\left\langle\Delta\hat{z}_i\Delta\hat{z}_j+\Delta\hat{z}_j\Delta\hat{z}_i\right\rangle\right\rangle$, $\mathrm{Sp}\left[A\right]$ – след матрицы A.

Теорема 3. Матрица $\Delta_2(s,t,\hbar)$ удовлетворяет системе уравнений:

$$\dot{\Delta}_2(s,t,\hbar)=JH_{zz}(s,t)\Delta_2(s,t,\hbar)-\Delta_2(s,t,\hbar)H_{zz}(s,t)J+O\left(\hbar^{3/2}\right). \tag{4}$$

Теорема 4. Функция $\pi_0(s,t,\hbar)=\mathrm{Re}\left[\langle\langle -i\hbar\partial_s\rangle\rangle\right]$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\pi}_0(s,t,\hbar)+\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\left[\left(H_{zz}(s,t)\right)_s\cdot\Delta_2\left(s,t,\hbar\right)\right]+\tilde{\kappa}\int_D\sigma(r)\Big(\hbar\left\langle W_{\boldsymbol{y}}(s,r,t),\boldsymbol{X}^{(1)}(r,t,\hbar)\right\rangle+$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\left[W_{ww}(s,r,t)\cdot\Delta_2(r,t,\hbar)\right]\Big)_s\,dr=O\left(\hbar^{3/2}\right),\quad W_{ww}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & W_{yy}\end{pmatrix}. \tag{5}$$

Теорема 5. Функции $\hbar Z^{(1)}(s,t,\hbar)=\langle\langle\Delta\hat{z}\rangle\rangle=\left(\langle\langle\Delta\hat{\boldsymbol{p}}\rangle\rangle,\hbar\boldsymbol{X}^{(1)}\right)^{\mathrm{T}}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\hbar\dot{Z}^{(1)}(s,t)=J\partial_z\Big[\left\langle V_{\boldsymbol{p}}\left(Z(s,t),t\right),\tau_{\boldsymbol{x}}(s,t)\right\rangle\pi_0(s,t)+\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\left[V_{zz}\left(Z(s,t),t\right)\cdot\Delta_2(s,t)\right]+$$
$$+\hbar\left\langle V_z\left(Z(s,t),t\right),Z^{(1)}(s,t)\right\rangle+\tilde{\kappa}\int_D\sigma(r)\Big(\hbar\left\langle W_{\boldsymbol{y}}(s,r,t),\boldsymbol{X}^{(1)}(r,t)\right\rangle+\hbar\left\langle W_{\boldsymbol{x}}(s,r,t),\boldsymbol{X}^{(1)}(s,t)\right\rangle \tag{6}$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\left[W_{ww}(s,r,t)\cdot\Delta_2(r,t)+W_{zz}(s,r,t)\cdot\Delta_2(s,t)\right]\Big)dr\Big]+O\left(\hbar^{3/2}\right).$$

Таким образом, решение уравнения (1) в квазиклассическом приближении было сведено к решению системы уравнений (2), (4), (5), (6) и линейного уравнения (3). На рис. 1а-1в представлены графики зависимости $\left|\Psi(\boldsymbol{x},t)\right|^2$ от $\boldsymbol{x}=\left(x_1,x_2\right)^{\mathrm{T}}$ для $V(z,t)=0{,}5\cdot\hat{\boldsymbol{p}}^2+x_1^2+2x_2^2$, $W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)=\exp\left[-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2\right]$.

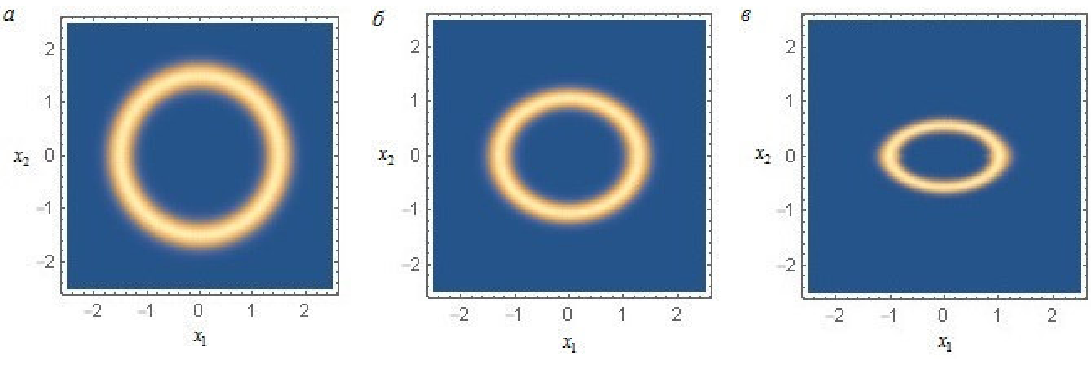

Рис. 1. Зависимость $\left|\Psi\left(\boldsymbol{x},t\right)\right|^2$ *от* $\boldsymbol{x}$ *для* $t=0$ *(а);* $t=0{,}4$ *(б);* $t=0{,}6$ *(в)*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bagrov V.G., Belov V.V., Trifonov A.Yu. Semiclassical trajectory-coherent approximation in quantum mechanics: I. High order corrections to multidimensional time-dependent equations of Schrodinger type // Ann. of Phys. (NY). – 1996. – Т. 246. – № 2. – С. 231–290.
2. Карасев М.В. О вейлевском и упорядоченном исчислении некоммутирующих операторов. // Матем. заметки. – 1979. – Т. 26. – № 6. – С. 885–907.