

**ДВУХПРОДУКТОВАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ
СО СЛУЧАЙНЫМ СПРОСОМ С РАВНОЙ ПЕРИОДИЧНОСТЬЮ ПОСТАВОК**

Л.Г. Ставчук

Научный руководитель: профессор, д.т.н. А.А. Мицель

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: lyusbk93@gmail.com

**TWO-PRODUCT INVENTORY MODEL
WITH RANDOM DEMAND IN CONDITION OF EQUAL SUPPLY'S FREQUENCY**

L.G. Stavchuk

Scientific Supervisor: Prof., Dr. A.A. Mitsel

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: lyusbk93@gmail.com

Abstract. *There is proposed inventory model with random demand, in which the completion of missing resources is done in the amount equal to the deficit of this resource. This model is analytic, that means an exact solution of equation's system is given as formulas for the purchase volume of goods at the beginning of the cycle and at the time of the additional goods purchase during the cycle.*

Главной задачей управления запасами является минимизация издержек, что позволяет вести предприятиям наиболее эффективную и выгодную деятельность. Представленная ниже модель предполагает восполнение необходимого ресурса в объеме, равном дефициту этого ресурса, что позволяет добиться значительной экономии средств.

Описание модели

Предприятие закупает два вида ресурсов. Объем первого ресурса составляет q_1 в натуральных единицах, стоимость единицы ресурса составляет d_1 ден. единиц; объем второго ресурса и цена составляют q_2 и d_2 , соответственно. Периоды поставок каждого вида ресурса (цикл) одинаковы и равны $T_1 = T_2 = T$. Объем средств на покупку ресурсов ограничен величиной $Y_m \leq d_1 q_1 + d_2 q_2$. При этом $d_1 q_1 \geq d_2 q_2$. Предполагается, что ресурс 1 закупается в начале периода полностью, а ресурс 2 – частично в объеме $k_2 q_2$, где $k_2 \leq 1$ – доля второго ресурса. Тогда минимально необходимый запас оборотных средств вычисляется по формуле (1):

$$d_1 q_1 + k_2 d_2 q_2 = Y_m. \quad (1)$$

В отличие от модели [1] будем полагать, что расход ресурсов представляют собой случайные процессы и подчиняются стохастическим уравнениям

$$\begin{aligned} dq_1 &= \mu_1 dt + \sigma_1 dw_1, \\ dq_2 &= \mu_2 dt + \sigma_2 dw_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь μ_1, μ_2 – средние значения в единицу времени случайных величин x_1, x_2 , соответственно (средняя скорость расхода $\mu_1 = q_1/T$; $\mu_2 = q_2/T$); σ_1^2, σ_2^2 – дисперсии в единицу времени случайных величин x_1, x_2 , соответственно (размерность q^2/T); dw_1, dw_2 – стандартные винеровские процессы.

Система уравнений (3) является решением уравнений (2) с учетом того, что ресурсы расходуются одновременно в одинаковой пропорции [2]:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \mu_1 t + \sigma_1 \sqrt{t} \cdot \varepsilon, \\ x_2(t) &= \mu_2 t + \sigma_2 \sqrt{t} \cdot \varepsilon, \end{aligned} \quad (3)$$

где ε – стандартная нормальная случайная величина с параметрами $M(\varepsilon) = 0$, $M(\varepsilon^2) = 1$.

Момент времени t_2 пополнения второго ресурса до величины $q_2(1 - k_2)$ найдем из условия $d_1 x_1(t_2) + d_2 x_2(t_2) = a_2(1 - k_2)$, где $a_2(1 - k_2)$ – дефицит второго ресурса в стоимостном выражении.

В результате получим следующее уравнение

$$bt_2 + c\varepsilon\sqrt{t_2} = a_2(1 - k_2), \quad (4)$$

где $a_1 = d_1 q_1$, $a_2 = d_2 q_2$, $a = a_1 + a_2$; $b_1 = d_1 \mu_1$, $b_2 = d_2 \mu_2$, $b = b_1 + b_2$; $c_1 = d_1 \sigma_1$, $c_2 = d_2 \sigma_2$, $c = c_1 + c_2$.

Условие бездефицитности второго ресурса: $(Y_m - a_1) - d_2 x_2(t_2) = 0$ или $k_2 a_2 = d_2 x_2(t_2)$. Тогда момент докупки второго ресурса будем искать из решения уравнений (5):

$$\begin{aligned} bt_2 + c\varepsilon\sqrt{t_2} &= a_2(1 - k_2), \\ k_2 a_2 &= b_2 t_2 + c_2 \varepsilon \sqrt{t_2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, получим:

$$t_2 = \frac{a_2}{b + b_2} + \frac{(c + c_2)^2 \varepsilon^2}{2(b + b_2)^2} - \frac{(c + c_2)\varepsilon}{2(b + b_2)^2} \sqrt{(c + c_2)^2 \varepsilon^2 + 4a_2(b + b_2)}, \quad (6)$$

$$k_2 = \frac{b_2}{b + b_2} + \frac{(c + c_2)(b_2 c - bc_2)}{2a_2(b + b_2)^2} \varepsilon^2 - \frac{b_2 c - bc_2}{2a_2(b + b_2)^2} \varepsilon \sqrt{(c + c_2)^2 \varepsilon^2 + 4a_2(b + b_2)}. \quad (7)$$

Момент докупки второго ресурса описывается уравнением (6), а доля второго ресурса в начальный момент времени – уравнением (7).

Минимально необходимый запас оборотных средств равен

$$Y_m = a_1 + \frac{a_2 b_2}{b + b_2} + \frac{(c + c_2)(b_2 c - bc_2)}{2(b + b_2)^2} \varepsilon^2 - \frac{b_2 c - bc_2}{2(b + b_2)^2} \varepsilon \sqrt{(c + c_2)^2 \varepsilon^2 + 4a_2(b + b_2)} \quad (8)$$

Вычислим характеристики случайных величин t_2 и Y_m :

$$M(t_2) = \frac{a_2}{(b + b_2)} + \frac{(c + c_2)^2}{2(b + b_2)^2} = \frac{d_2 q_2}{(d_1 \mu_1 + 2d_2 \mu_2)} + \frac{(d_1 \sigma_1 + d_2 \sigma_2)^2}{2(d_1 \mu_1 + 2d_2 \mu_2)^2}, \quad (9)$$

$$M(Y_m) = a_1 + \frac{a_2 b_2}{b + b_2} + \frac{(c + c_2)(b_2 c - bc_2)}{2(b + b_2)^2}, \quad (10)$$

$$D(t_2) = \frac{(c+c_2)^2}{4(b+b_2)^4} (5(c+c_2)^2 + 4a_2(b+b_2)), \quad (11)$$

$$D(Y_m) = \frac{(b_2c - bc_2)^2}{4(b+b_2)^4} (5(c+c_2)^2 + 4a_2(b+b_2)). \quad (12)$$

Формулами (9)-(10) представлены математические ожидания, а формулами (11)-(12) – дисперсии случайных величин t_2 и Y_m , соответственно,

Вычислим момент окончания цикла t_c для случая, когда оба ресурса расходуются одновременно в одинаковой пропорции. Уравнение (4) примет вид: $bt_c + c\varepsilon\sqrt{t_c} = Y_\Sigma$, где $Y_\Sigma = d_1q_1 + d_2q_2$ – суммарный запас обоих ресурсов.

В результате получим время окончания цикла t_c (13) и его характеристики (14)-(15):

$$t_c = \frac{Y_\Sigma}{b} + \frac{c^2\varepsilon^2}{2b^2} - \frac{c\varepsilon}{2b^2} \sqrt{c^2\varepsilon^2 + 4bY_\Sigma} = T + \frac{c^2\varepsilon^2}{2b^2} - \frac{c\varepsilon}{2b^2} \sqrt{c^2\varepsilon^2 + 4bY_\Sigma}, \quad (13)$$

$$M(t_c) = \frac{Y_\Sigma}{b} + \frac{c^2}{2b^2} = T + \frac{(d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2)^2}{2(d_1\mu_1 + d_2\mu_2)^2}, \quad (14)$$

$$D(t_c) = \frac{c^2}{4b^4} (5c^5 + 4bY_\Sigma) = \frac{(d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2)^2}{4(d_1\mu_1 + d_2\mu_2)^4} (5(d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2)^2 + 4(d_1\mu_1 + d_2\mu_2)Y_\Sigma). \quad (15)$$

Таким образом, среднее значение и стандартное отклонение момента пополнения второго ресурса равно $M(t_2) = \frac{a_2}{(b+b_2)} + \frac{(c+c_2)^2}{2(b+b_2)^2}$, $\sqrt{D(t_2)} = \sqrt{\frac{(c+c_2)^2}{4(b+b_2)^4} (5(c+c_2)^2 + 4a_2(b+b_2))}$, а среднее значение и стандартное отклонение момента пополнения запасов обоих ресурсов (момента окончания цикла) равно $M(t_c) = \frac{Y_\Sigma}{b} + \frac{c^2}{2b^2}$, $\sqrt{D(t_c)} = \sqrt{\frac{c^2}{4b^4} (5c^5 + 4bY_\Sigma)}$.

В связи с тем, что объем средств на покупку ресурсов ограничен, определим нормировочный множитель K_m , который вводится в работе [3]. Для среднего значения $K_m = \frac{Y_m}{Y_\Sigma}$ получим выражение:

$$M(K_m) = \frac{M(Y_m)}{Y_\Sigma} = \frac{1}{a} \left(a_1 + \frac{a_2b_2}{b+b_2} + \frac{(c+c_2)(b_2c - bc_2)}{2(b+b_2)^2} \right). \quad (16)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кулакова Ю.Н., Кулаков А.Б. Исследование поведения нормировочного множителя в многопродуктовой модели управления запасами при поставке двух видов товаров с кратной периодичностью //Экономический анализ: теория и практика. – 2014, № 10(361). – С.44-54.
2. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 1. Факты и модели. – М.: ФАЗИС. – 1998. – 512с.
3. Букан Д., Кенигсберг Э. Научное управление запасами: пер. с англ. М.: Наука, 1967. – 423с.