УДК 62-50:519.2

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ДИСКРЕТНОГО КАНАЛА НАБЛЮДЕНИЯ С ПАМЯТЬЮ В ЗАДАЧЕ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ

Н.С. Дёмин, О.В. Рожкова*

Томский государственный университет
*Томский политехнический университет
E-mail: rozhkova@tpu.ru

Решена задача исследования эффективности оценки экстраполяции стационарного гауссовского марковского процесса диффузионного типа (процесс Орнстейна-Уленбека) для случая дискретного канала наблюдения с фиксированной памятью единичной кратности относительно дискретного канала без памяти.

***Ключевые слова**:*
Экстраполяция, память, среднеквадратическая ошибка, время корреляции.

Введение

Классическая теория обработки сигналов, математическими моделями которых являются стохастические процессы, основана на предположении, что текущие значения наблюдаемого процесса (принимаемого сигнала) зависят только от текущих значений ненаблюдаемого процесса (информационного сигнала) [1–3]. На практике весьма распространенной является ситуация, когда текущие значения наблюдаемого процесса зависят также и от прошлых значений ненаблюдаемого процесса (наблюдения с памятью, наблюдения с временными задержками) [4–7], что обуславливается инерционностью измерителей и конечным временем прохождения сигналов. Достаточно исследованной для данного класса наблюдений является задача фильтрации [4–6], хотя задача экстраполяции (прогноза, предсказания) является также важной, поскольку ее решение дает информацию о будущих значениях информационного сигнала.

1. Постановка задачи

Пусть ненаблюдаемый скалярный процесс x_t определяется уравнением

$$dx_t = -ax_t dt + \Phi_1 dt,\ a>0,\ p_0 = N\{x;\mu_o;\gamma_0\}, \quad (1)$$

где ω_t является стандартным винеровским процессом, $p_0(x)$ – начальная плотность распределения, $N\{\cdot\}$ – гауссовская плотность. Этот процесс, известный как процесс Орнстейна–Уленбека, является стационарным гауссовским марковским процессом диффузионного типа с корреляционной функцией $K(\alpha)=[Q/2a]\exp\{-a|\alpha|\}$ и временем корреляции $\alpha_k=1/a$. Он широко используется как в технических приложениях для моделирования реальных процессов [1–3], так и в финансовой математике для моделирования процесса изменения процентной ставки [8, 9]. Наблюдается непрерывный скалярный процесс z_t без памяти, описываемый уравнением

$$dz_t = H_0 x_t dt + \Phi_2 d\upsilon_t, \quad (2)$$

и дискретный скалярный процесс с фиксированной памятью единичной кратности

$$\eta(t_m) = G_0 x_{t_m} + G_1 x_\tau + \Phi_3 \xi(t_m). \quad (3)$$

В (2) процесс υ_t является стандартным винеровским процессом, в (3) процесс $\xi(t_m)$ является стандартным белым гауссовским с дискретным временем.

Ставится задача исследования эффективности оценки экстраполяции для случая дискретного канала наблюдения с фиксированной памятью единичной кратности относительно дискретного канала без памяти.

Далее $M\{\cdot\}$ – математическое ожидание.

2. Основные результаты

Исследуем вопрос об эффективности дискретных наблюдений с памятью на основе задачи обратной экстраполяции с фиксированной памятью [7].

Для рассматриваемых моделей процессов x_t, z_t и $\eta(t_m)$, согласно Теореме 3 и Следствию 2 [7], для $t_m \le t < t_{m+1}$ получим уравнения

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = -2a\gamma(t) + Q - \delta\gamma^2(t), \quad (4)$$

$$\frac{d\gamma_{01}(\tau,t)}{dt} = -[a+\delta\gamma(t)]\,\gamma_{01}(\tau,t), \quad (5)$$

$$\frac{d\gamma_{11}(\tau,t)}{dt} = -\delta\gamma_{01}^2(\tau,t), \quad (6)$$

$$\frac{d\gamma_0^1(s,t)}{dt} = \left[-a + \frac{Q}{\gamma(t)} - \delta\,\gamma(t)\right]\gamma_{01}(s,t), \quad (7)$$

$$\frac{d\gamma^{11}(s,t)}{dt} = -\delta[\gamma_0^1(s,t)]^2, \quad (8)$$

$$\frac{d\gamma_1^1(\tau,s,t)}{dt} = -\delta\gamma_{01}(\tau,t)\,\gamma_0^1(s,t), \quad (9)$$

с начальными условиями

$$\gamma(t_m) = \gamma(t_m - 0) - \frac{\tilde G_0^2}{W}, \quad (10)$$

$$\gamma_{01}(\tau,t_m) = \gamma_{01}(\tau,t_m - 0) - \frac{\tilde G_0 \tilde G_1}{W}, \quad (11)$$

$$\gamma_{11}(\tau,t_m)=\gamma_{11}(\tau,t_m-0)-\frac{\tilde{G}_1^2}{W}, \quad (12)$$

$$\gamma_0^1(s,t_m)=\gamma_0^1(s,t_m-0)-\frac{\tilde{G}_0\tilde{G}_2}{W}, \quad (13)$$

$$\gamma^{11}(s,t_m)=\gamma^{11}(s,t_m-0)-\frac{\tilde{G}_2^2}{W}, \quad (14)$$

$$\gamma_1^1(\tau,s,t_m)=\gamma_1^1(\tau,s,t_m-0)-\frac{\tilde{G}_1\tilde{G}_2}{W}, \quad (15)$$

где

$$\gamma(t)=M\{[x(t)-\mu(t)]^2\,\big|\,z_0^t,\ \eta_0^m\},$$

$$\gamma_{01}(\tau,t)=M\{[x(t)-\mu(t)][x(\tau)-\mu(\tau,t)]\,\big|\,z_0^t,\ \eta_0^m\},$$

$$\gamma_{11}(\tau,t)=M\{[x(\tau)-\mu(\tau,t)]^2\,\big|\,z_0^t,\ \eta_0^m\},$$

$$\gamma_0^1(s,t)=M\{[x(t)-\mu(t)][x(s)-\mu(s,t)]\,\big|\,z_0^t,\ \eta_0^m\},$$

$$\gamma^{11}(s,t)=M\{[x(s)-\mu(s,t)]^2\,\big|\,z_0^t,\ \eta_0^m\},$$

$$\gamma_1^1(\tau,s,t)=M\{[x(\tau)-\mu(\tau,t)][x(s)-\mu(s,t)]\,\big|\,z_0^t,\ \eta_0^m\}.$$

$$\tilde{G}_0=G_0\gamma(t_m-0)+G_1\gamma_{01}(\tau,t_m-0), \quad (16)$$

$$\tilde{G}_1=G_1\gamma_{11}(\tau,t_m-0)+G_0\gamma_{01}(\tau,t_m-0), \quad (17)$$

$$\tilde{G}_2=G_0\gamma_0^1(s,t_m-0)+G_1\gamma_1^1(\tau,s,t_m-0), \quad (18)$$

$$W=V+G_0^2\gamma(t_m-0)+2G_0G_1\gamma_{01}(\tau,t_m-0)+ +G_1^2\gamma_{11}(\tau,t_m-0). \quad (19)$$

Кроме того далее используются обозначения

$$t^*=t-\tau,\ T=s-t,\ Q=\Phi_1^2,\ R=\Phi_2^2,$$

$$\lambda=\sqrt{a^2+\delta Q},\ \delta=H_0^2/R,$$

$$\gamma_1=(\lambda-a)/\delta,\ \gamma_2=-(\lambda+a)/\delta,$$

$$\chi=1-\left(\frac{\delta}{2\lambda}\right)\gamma,\ \chi=(\lambda+a)/2\lambda. \quad (20)$$

Рассмотрим сначала случай отсутствия дискретных наблюдений.

Утверждение 1. Решения уравнений (4–9) при начальных условиях

$$\gamma(t)\big|_{t=t_0}=\gamma_0, \quad (21)$$

$$\gamma_{01}(\tau,t)\big|_{t=\tau}=\gamma(\tau), \quad (22)$$

$$\gamma_{11}(\tau,t)\big|_{t=\tau}=\gamma(\tau), \quad (23)$$

$$\gamma_0^1(s,t)\big|_{t=s}=\gamma(s), \quad (24)$$

$$\gamma^{11}(s,t)\big|_{t=s}=\gamma(s), \quad (25)$$

$$\gamma_1^1(\tau,s,t)\big|_{t=s}=\gamma_{01}(\tau,s), \quad (26)$$

имеют вид

$$\gamma(t)=\gamma_2\frac{\tilde{\gamma}_2-\exp\{-2\lambda(t-t_0)\}}{\tilde{\gamma}_1-\exp\{-2\lambda(t-t_0)\}},$$

$$\tilde{\gamma}_1=\frac{\gamma_2-\gamma_0}{\gamma_1-\gamma_0},\quad \tilde{\gamma}_2=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\tilde{\gamma}_1, \quad (27)$$

$$\gamma_{01}(\tau,t)=\gamma(\tau)\frac{\tilde{\gamma}_1-\exp\{-2\lambda(\tau-t_0)\}}{\tilde{\gamma}_1-\exp\{-2\lambda(t-t_0)\}}\exp\{-\lambda t^*\}, \quad (28)$$

$$\gamma_{11}(\tau,t)= =\gamma(\tau)\begin{bmatrix}1-\dfrac{\delta}{2\lambda}\gamma(\tau)\dfrac{\tilde{\gamma}_1-\exp\{-2\lambda(\tau-t_0)\}}{\tilde{\gamma}_1-\exp\{-2\lambda(t-t_0)\}}\times \\ \times(1-\exp\{-2\lambda t^*\})\end{bmatrix}, \quad (29)$$

$$\gamma_0^1(s,t)=\gamma(t)\exp\{-aT\}, \quad (30)$$

$$\gamma^{11}(s,t)=\frac{Q}{2a}+\exp\{-2aT\}\left(\gamma(t)-\frac{Q}{2a}\right), \quad (31)$$

$$\gamma_1^1(\tau,s,t)=\gamma_{01}(\tau,t)\exp\{-aT\}. \quad (32)$$

Доказательство.

1) Получение формулы (27) (решение уравнения (4)).

Уравнение (4) является уравнением Риккати с постоянными коэффициентами [10]. Разделяя переменные, можем записать (4) в виде

$$\frac{d\gamma(t)}{(\gamma(t)-\gamma_1)(\gamma(t)-\gamma_2)}=-\delta\,dt, \quad (33)$$

где γ_1, γ_2 являются корнями уравнения $\delta\gamma^2+2a\gamma-Q=0$ и имеют вид, см. (20):

$$\gamma_{1,2}=\frac{1}{\delta}[-a\pm\lambda],\ \lambda=\sqrt{a^2+\delta Q},\ \delta=\frac{H_0^2}{R}. \quad (34)$$

Согласно (34) $(\gamma_1-\gamma_2)=2\lambda/\delta$. Тогда умножая обе части (33) на $\gamma_1-\gamma_2=((\gamma(t)-\gamma_2)-(\gamma(t)-\gamma_1))$ получаем

$$\frac{d\gamma(t)}{(\gamma(t)-\gamma_1)}-\frac{d\gamma(t)}{(\gamma(t)-\gamma_2)}=-2\lambda dt. \quad (35)$$

Интегрирование (35) дает, что

$$\frac{(\gamma(t)-\gamma_1)}{(\gamma(t)-\gamma_2)}=C\exp\{-2\lambda t\}, \quad (36)$$

где константа интегрирования C ищется из начального условия (21). Согласно (36, 21)

$$C=\frac{(\gamma_0-\gamma_1)}{(\gamma_0-\gamma_2)}\exp\{2\lambda t_0\}. \quad (37)$$

Подставляя (37) в (36) и преобразовывая полученное выражение, приходим к (27).

2) Получение формулы (28) (решение уравнения (5)).

Перепишем уравнение (37) в следующем виде

$$\frac{d\gamma_{01}(\tau,t)}{\gamma_{01}(\tau,t)}=-[a+\delta\gamma(t)]dt. \quad (38)$$

Интегрируя (38), получим что

$$\ln\gamma_{01}(\tau,t) = -at - \delta\int\gamma(t)\,dt + \ln C. \quad (39)$$

Согласно (27)

$$\int\gamma(t)dt = \gamma_2\int\frac{\tilde{\gamma}_2 - \exp\{-2\lambda(t-t_0)\}}{\tilde{\gamma}_1 - \exp\{-2\lambda(t-t_0)\}}dt =$$

$$= \gamma_2\,t + \gamma_2(\tilde{\gamma}_2 - \tilde{\gamma}_1)\int\frac{dt}{\tilde{\gamma}_1 - \exp\{-2\lambda(t-t_0)\}}. \quad (40)$$

Использование в (40) формулы интегрирования [11]

$$\int\frac{dx}{b + c\exp\{ax\}} = \frac{x}{b} - \frac{\ln(b + c\exp\{ax\})}{ab} \quad (41)$$

дает, что

$$\int\gamma(t)\,dt = \gamma_2 t + \gamma_2(\tilde{\gamma}_2 - \tilde{\gamma}_1)\times$$

$$\times\left[\frac{t}{\tilde{\gamma}_1} + \frac{1}{2\lambda\tilde{\gamma}_1}\ln[\tilde{\gamma}_1 - \exp\{-2\lambda(t-t_0)\}]\right] =$$

$$= \frac{\gamma_2\tilde{\gamma}_2}{\tilde{\gamma}_1}t + \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\gamma_2\tilde{\gamma}_2}{\tilde{\gamma}_1} - \gamma_2\right)\times$$

$$\times\ln[\tilde{\gamma}_1 - \exp\{-2\lambda(t-t_0)\}]. \quad (42)$$

Так как согласно (27)

$$\frac{\gamma_2\tilde{\gamma}_2}{\tilde{\gamma}_1} = \gamma_1, \gamma_1 - \gamma_2 = \frac{2\lambda}{\delta}, \quad (43)$$

то из (42) получаем, что

$$\int\gamma(t)\,dt = \gamma_1\,t + \frac{1}{\delta}\ln[\tilde{\gamma}_1 - \exp\{-2\lambda(t-t_0)\}]. \quad (44)$$

Подставим (44) в (39)

$$\ln\gamma_{01}(\tau,t) =$$

$$= -(a + \delta\gamma_1)\;t - \ln[\tilde{\gamma}_1 - \exp\{-2\lambda(t-t_0)\}] + \ln C. \quad (45)$$

Из (20) следует, что $a+\delta\gamma_1=\lambda$. Тогда общее решение уравнения имеет вид

$$\gamma_{01}(\tau,t) = \frac{C}{[\tilde{\gamma}_1 - \exp\{-2\lambda(t-t_0)\}]}\exp\{-\lambda t\}. \quad (46)$$

Из (46) и начального условия (22) следует, что

$$C = \gamma(\tau)[\tilde{\gamma}_1 - \exp\{-2\lambda(\tau-t_0)\}]\exp\{\lambda\tau\}. \quad (47)$$

Подстановка (47) в (45) приводит к (28).

3) Получение формулы (29) (решение уравнения (6)).

Интегрируя уравнение (6) получаем, что

$$\gamma_{11}(\tau,t) = -\delta\int\gamma_{01}^2(\tau,t)\,dt + C. \quad (48)$$

Учитывая (28), можем записать (48) в виде

$$\gamma_{11}(\tau,t) =$$

$$= -\delta\gamma^2(\tau)\exp\{2\lambda\tau\}[\tilde{\gamma}_1 - \exp\{-2\lambda(\tau-t_0)\}]^2\times$$

$$\times\int\frac{\exp\{-2\lambda t\}dt}{[\tilde{\gamma}_1 - \exp\{-2\lambda(t-t_0)\}]^2} + C, \quad (49)$$

где

$$\int\frac{\exp\{-2\lambda t\}dt}{[\tilde{\gamma}_1 - \exp\{-2\lambda(t-t_0)\}]^2} =$$

$$= \frac{\exp\{-2\lambda t_0\}}{2\lambda}\int\frac{d[\tilde{\gamma}_1 - \exp\{-2\lambda(t-t_0)\}]}{[\tilde{\gamma}_1 - \exp\{-2\lambda(t-t_0)\}]^2} =$$

$$= \frac{\exp\{-2\lambda t_0\}}{2\lambda[\tilde{\gamma}_1 - \exp\{-2\lambda(t-t_0)\}]}. \quad (50)$$

Тогда общее решение уравнения (6) имеет вид

$$\gamma_{11}(\tau,t) = \frac{\delta}{2\lambda}\gamma^2(\tau)\exp\{2\lambda(t-t_0)\}\times$$

$$\times\frac{[\tilde{\gamma}_1 - \exp\{-2\lambda(t-t_0)\}]^2}{\tilde{\gamma}_1 - \exp\{-2\lambda(t-t_0)\}} + C. \quad (51)$$

Из (51) и начального условия (23) следует, что

$$C = \gamma(\tau) - \frac{\delta}{2\lambda}\gamma^2(\tau)\exp\{2\lambda(\tau-t_0)\}\times$$

$$\times[\tilde{\gamma}_1 - \exp\{-2\lambda(\tau-t_0)\}]. \quad (52)$$

Подстановка (52) в (51) приводит к (29).

4) Получение формулы (30) (решение уравнения (7)).

Используя (4), можем записать (7) в следующем виде:

$$\frac{d\gamma_0^1(s,t)}{dt} = \left[a + \frac{1}{\gamma(t)}\frac{d\gamma(t)}{dt}\right]\gamma_0^1(s,t). \quad (53)$$

Тогда из (53) получим общее решение уравнения (7)

$$\gamma_0^1(s,t) = C\gamma(t)\exp\{at\}. \quad (54)$$

Из (54) и начального условия (24), получаем

$$C = \exp\{-as\}. \quad (55)$$

Подстановка (55) в (54) приводит к (7).

5) Получение формулы (31) (решение уравнения (8)).

С учетом (30) можем записать (8) в следующем виде

$$\frac{d\gamma^{11}(s,t)}{dt} = -\delta\gamma^2(t)\,\exp\{-2aT\}. \quad (56)$$

Использование (4) в (55) дает, что

$$\frac{d\gamma^{11}(s,t)}{dt} = \left[\frac{d\gamma(t)}{dt} + 2a\gamma(t) - Q(t)\right]\exp\{-2aT\}. \quad (57)$$

Из (57) получим общее решение уравнения (8)

$$\gamma^{11}(s,t) = \left[\gamma(t) - \frac{Q}{2a}\right]\exp\{-2aT\} + C. \quad (58)$$

Из (58) и начального условия (25) получаем

$$C = \frac{Q}{2a}. \quad (59)$$

Подстановка (59) в (58) приводит к (31).

6) Получение формулы (32) (решение уравнения (9)).

С учетом (30) можем записать (9) в виде

$$\frac{d\gamma_1^1(\tau,s,t)}{dt}=\left[\frac{d\gamma_{01}(\tau,t)}{dt}+a\gamma_{01}(\tau,t)\right]\exp\{-aT\}. \quad (60)$$

Из (60) получим общее решение уравнения (9)

$$\gamma_1^1(\tau,s,t)=\gamma_{01}(\tau,t)\exp\{-aT\}+C. \quad (61)$$

Из (61) и начального условия (26), получаем

$$C=0. \quad (62)$$

Подстановка (62) в (61) приводит к (32).

Начальные условия (21–26) с учетом (1) следуют из смысла задач фильтрации, интерполяции и экстраполяции.

Стационарные решения ($t\to\infty$, $\tau\to\infty$, t^* и T – конечны) следуют из (27-32) и имеют вид

$$\gamma=\gamma_1={(\lambda-a)}/{\delta},\ \gamma_{01}(t^*)=\gamma\exp\{-\lambda t^*\},$$
$$\gamma_{11}(t^*)=\gamma[\chi+(1-\chi)\exp\{-2\lambda t^*\}],$$
$$\gamma_0^1(T)=\gamma\exp\{-aT\},$$
$$\gamma^{11}(T)=\frac{Q}{2a}+\exp\{-2aT\}\left(\gamma-\frac{Q}{2a}\right),$$
$$\gamma_1^1(t^*,T)=\gamma\exp\{-\lambda t^*\}\exp\{-aT\}. \quad (63)$$

Формулы (27–32) определяют для указанных процессов x_t и z_t решение обобщенной задачи фильтрации-интерполяции-экстраполяции в случае непрерывных наблюдений без памяти при конечном времени, а (63) при бесконечном времени наблюдения. С помощью этих формул проводится исследование эффективности дискретного канала с фиксированной памятью единичной кратности относительно дискретного канала без памяти

$$\tilde{\eta}(t_m)=G_0x_{t_m}+\Phi_3\xi(t_m) \quad (64)$$

в задаче экстраполяции в случае редких дискретных наблюдений, когда на интервалах $t\in[t_m,t_{m+1})$ решения (27–32) достигают стационарных значений (63). Тогда, согласно (14, 18, 19) среднеквадратические ошибки $\gamma^{11}(T)$, $\tilde{\gamma}^{11}(T)$, оценок $\mu(s,t_m)$, $\tilde{\mu}(s,t_m)$, соответствующих и $\eta(t_m)$ и $\tilde{\eta}(t_m)$, будут определяться формулами

$$\gamma^{11}(s,t_m)=\gamma^{11}(T)-\frac{\tilde{G}_2^2}{W}, \quad (65)$$

$$\tilde{\gamma}^{11}(s,t_m)=\gamma^{11}(T)-\frac{\tilde{\tilde{G}}_2^2}{\tilde{W}}, \quad (66)$$

$$\tilde{G}_2=G_0\gamma_0^1(T)+G_1\gamma_1^1(t^*,T),\quad \tilde{\tilde{G}}_2=G_0\gamma_{02}^1(T),$$
$$W=V+g(t^*),\quad \tilde{W}=V+\tilde{g}(t^*), \quad (67)$$

$$g(t^*)=G_0^2\gamma+2G_0G_1\gamma_{01}(t^*)+G_1^2\gamma_{11}(t^*),$$
$$\tilde{g}(t^*)=G_0^2\gamma. \quad (68)$$

Дальнейшее исследование проводим, взяв в качестве меры эффективности величину

$$\varepsilon_{10}=\frac{\gamma^{11}(s,t_m)}{\tilde{\gamma}^{11}(s,t_m)}.$$

Большая глубина памяти ($t^*\to\infty$). Обозначая $\lim\gamma^{11}(s,t_m)=\gamma_\infty^{11}(s,t_m)$ при $t^*\to\infty$, получаем из (65, 66) с учетом (63, 67, 68), что

$$\tilde{\gamma}^{11}(s,t_m)=\gamma^{11}(T)-\frac{\tilde{\tilde{G}}_2^2}{\tilde{W}},\ \gamma_\infty^{11}(s,t_m)=\gamma^{11}(T)-\frac{\tilde{G}_2^2}{W},$$
$$\tilde{G}_2=\tilde{\tilde{G}}_2=G_0\gamma\exp\{-aT\},\quad \tilde{W}=V+G_0^2\gamma,$$
$$W=V+(G_0^2+G_1^2\chi)\gamma=\tilde{W}+G_1^2\gamma\chi. \quad (69)$$

Из (69) следует, что при большой относительно x_τ глубине памяти наблюдения с памятью единичной кратности эквивалентны наблюдениям без памяти с более мощным шумом интенсивности $\tilde{V}=V+G_1^2\gamma\chi$. Очевидно, что $1/2\le\chi\le1$, причем $\chi\to1/2$ при $\delta\to\infty$ и $\chi\to1$ при $\delta\to0$. Поскольку случаю $\delta=\infty$ соответствуют идеальные непрерывные наблюдения ($\gamma=0$) а случаю $\delta=0$ – отсутствие непрерывных наблюдений, то интенсивность $\tilde{V}$ эквивалентного шума тем меньше, чем качественнее непрерывные наблюдения.

С использованием (69) можно показать, что $\lim\varepsilon_{10}=\varepsilon_{10}^\infty$ при $t^*\to\infty$ имеет представление $\varepsilon_{10}^\infty=1+\Delta_\infty$, где $\Delta_\infty>0$, то есть $\varepsilon_{10}^\infty>1$ и при большой глубине памяти наблюдения с памятью менее эффективны наблюдений без памяти. Таким образом, наличие памяти только ухудшает качество экстраполяции при большой глубине памяти. Объяснение этому заключается в следующем. Поскольку в рассматриваемом случае $\alpha_k<<t^*$, где α_k – время корреляции процесса x_t, то между x_τ и x_{t_m} отсутствуют корреляционные связи и сигнал $Y(\tau)=G_1x_\tau$ действует в дискретном канале относительно сигнала $G_0x_{t_m}$ как дополнительный шум. С точки зрения указанной выше эквивалентности наблюдение кратности $N=1$ представляется как наблюдение без памяти $\tilde{\eta}(t_m)=G_0x_{t_m}+\xi(t_m)$ где $\tilde{\xi}(t_m)=G_1x_\tau+\Phi_3\xi(t_m)$ – эквивалентный шум интенсивности $\tilde{V}=V+G_1^2\gamma\chi$.

Малая глубина памяти ($t^*\to0$). Обозначая $\lim\gamma^{11}(s,t_m)=\gamma_0^{11}(s,t_m)$ при $t^*\to0$, получаем из (65, 66) с учетом (63, 67, 68), что

$$\tilde{\gamma}^{11}(s,t_m)=\gamma^{11}(T)-\frac{\tilde{\tilde{G}}_2^2}{\tilde{W}},\ \gamma_0^{11}(s,t_m)=\gamma^{11}(T)-\frac{\tilde{G}_2^2}{W},$$
$$\tilde{G}_2=(G_0+G_1)\gamma\exp\{-aT\},\ \tilde{\tilde{G}}_2=G_0\gamma\exp\{-aT\},$$
$$\tilde{W}=V+G_0^2\gamma,$$
$$W=V+(G_0+G_1)^2\gamma=\tilde{W}+(G_1^2+2G_0G_1)\gamma. \quad (70)$$

С использованием (70) можно показать, что $\lim\varepsilon_{10}=\varepsilon_{10}^0$ при $t^*\to0$ имеет представление $\varepsilon_{10}^0=1-\Delta_0$ причем $\Delta_0\le0$, т. е. $\varepsilon_{10}^0\ge1$ если $(G_0,G_1)\in\mathbf{G}$ и $0<\Delta_0<1$ то есть $0<\varepsilon_{10}^0<1$ если $(G_0,G_1)\notin\mathbf{G}$, где

$$\mathbf{G}=\{(G_0,G_1):G_1^2+2G_0G_1\le0\}, \quad (71)$$

Условие (71) равносильно условию

$$\mathbf{G}=\{(G_0,G_1):|G_0+G_1|\le|G_0|\}, \quad (72)$$

Таким образом, при малой глубине памяти наблюдения с памятью эффективнее наблюдений без памяти в случае $(G_0,G_1)\notin\mathbf{G}$ и менее эффективны в противном случае. Поскольку в рассматриваемой ситуации коэффициент корреляции между x_{t_m} и x_τ, близок к единице, то наблюдения с $\eta(t_m)$ воспринимаются как $\eta(t_m)=(G_0+G_1)x_{t_m}+\Phi_3\xi(t_m)$. Условие $(G_0,G_1)\notin\mathbf{G}$ означает $|G_0+G_1|>|G_0|$, поэтому интенсивность процесса $Y(t_m,\tau)=G_0x_{t_m}+G_1x_\tau=(G_0+G_1)x_{t_m}$ выше интенсивности процесса $\bar{Y}(t_m)=G_0x_{t_m}$.

Таким образом, при малой глубине памяти дискретный канал с памятью оказывается более информативным, нежели дискретный канал без памяти. Это дает более существенное уменьшение среднеквадратической ошибки в случае наблюдений с памятью относительно наблюдений без памяти, что приводит к свойству $\varepsilon_{10}^0<1$.

Исследование $\varepsilon_{10}(t^*)$ как функции t^* при соблюдении условия $(G_0,G_1)\notin\mathbf{G}$ дает следующий результат.

Утверждение 2. Если $(G_0,G_1)\in\mathbf{G}$, то $\varepsilon_{10}(t^*)>1$ для всех $t^*\geq 0$, при произвольном значении глубины памяти. Если $(G_0,G_1)\notin\mathbf{G}$, $\varepsilon_{10}(t^*)$ при $t^*\to\infty$ монотонно возрастает от $\varepsilon_{10}^0<1$, определяемой формулой

$$\varepsilon_{10}^0 = \\ =1-\frac{V\gamma^2(G_1^2+2G_0G_1)\exp\{-2aT\}}{\left(\begin{array}{l}[\gamma_{11}(T)(V+\gamma\, G_0^2)-\gamma^2G_0^2\exp\{-2aT\}]\times\\ \times[V+\gamma\,\{G_0+G_1\}^2]\end{array}\right)}, \quad (73)$$

до $\varepsilon_{10}^\infty>1$, определяемой формулой

$$\varepsilon_{10}^\infty = \\ =1+\frac{\chi\gamma^3G_0^2G_1^2\exp\{-2aT\}}{\left(\begin{array}{l}[\gamma^{11}(T)(V+\gamma\, G_0^2)-\gamma^2G_0^2\exp\{-2aT\}]\times\\ \times[(V+\gamma\, G_0^2)+\chi\,\gamma\, G_1^2]\end{array}\right)}, \quad (74)$$

с равенством единице в точке $t^*=t^*_{eff}$, определяемой формулой

$$t^*_{eff}=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{|G_1|(V+\chi\gamma G_0^2)}{|G_0|[\sqrt{V^2+\chi\,\gamma\, G_1^2\,(V+\chi\,\gamma\, G_0^2)}\mp V]}, \quad (75)$$

где знак «–» берется в том случае, если $G_0G_1=|G_0|\cdot|G_1|$, а знак «+», если $G_0G_1=-|G_0|\cdot|G_1|$.

Формулы (73, 74) получены с использованием (69, 70). Формула (75) получается как единственный положительный корень уравнения $\varepsilon_{10}(t^*)=1$, имеющего вид

$$G_1^2(V+\chi\,\gamma\, G_0^2)\exp\{-2\lambda t^*\}+ \\ +2V\, G_0G_1\exp\{-\lambda t^*\}-\chi\,\gamma\, G_0^2G_1^2=0.$$

Влияние непрерывного канала наблюдения осуществляется через параметр δ, пропорциональный отношению сигнал/шум по интенсивности.

Величину t^*_{eff} можно определить как эффективную глубину памяти наблюдений с памятью относительно наблюдений без памяти. В частности, при отсутствии непрерывных наблюдений, когда $\delta=0$, $\lambda=a$, $\chi=1$, $\gamma=Q/2a$, формула для t^*_{eff} принимает вид

$$t^*_{eff}=\frac{1}{a}\ln\frac{|G_1|\left(V+\dfrac{Q}{2a}G_0^2\right)}{|G_0|\left[\sqrt{V^2+\dfrac{Q}{2a}G_1^2\left(V+\dfrac{Q}{2a}G_0^2\right)}\mp V\right]}. \quad (76)$$

Таким образом, из (76) следует явная зависимость эффективной глубины памяти от времени корреляции $\alpha_k=1/a$ процесса x_t.

Заключение

Получено точное решение системы дифференциальных уравнений, определяющих точность (среднеквадратическую ошибку) оценки экстраполяции. Исследованы два предельных случая малой и большой глубины памяти. Приведен анализ временной зависимости точности оценки и получена формула, определяющая эффективную глубину памяти при отсутствии непрерывных наблюдений, в том числе ее зависимость от времени корреляции ненаблюдаемого процесса (информационного сигнала).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. – М.: Советское радио, 1972. – Т. 1. – 744 с.
2. Девис М.Х.А. Линейное оценивание и стохастическое управление. – М.: Наука, 1984. – 205 с.
3. Тихонов В.И., Кульман Н.К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. – М.: Советское радио, 1975. – 704 с.
4. Basin M.V., Zuniga M.R. Optimal linear filtering over observation with multiple delays // Intern J. of Robust and Nonlinear Contr. – 2004. – V. 14. – № 8. – P. 685–696.
5. Basin M.V., Zuniga M.R., Rodriguez J.G. Optimal filtering for linear state delay systems // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2005. – V. AC-50. – № 5. – P. 684–690.
6. Wang Z., Ho D.W.C. Filtering on nonlinear time-delay stochastic systems // Automatic. – 2003. – V. 39. – № 1. – P. 101–109.
7. Демин Н.С., Рожкова О.В., Рожкова С.В. Обобщенная скользящая экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2000. – № 4. – С. 39–51.
8. Мельников А.В. О стохастическом анализе в современной математике страхования // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 1995. – Т. 2. – № 4. – С. 514–526.
9. Ширяев А.Н. О некоторых понятиях в стохастических моделях финансовой математики // Теория вероятностей и ее применения. – 1994. – Т. 39. – № 1. – С. 5–22.
10. Матвеев А.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1967. – 409 с.
11. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. – М.: Наука, 1998. – 608 с.

Поступила 13. 04. 2009 г.