

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОПЕРАТОРА-ПРОЕКТОРА

О.Н. Вылегжанин, Г.И. Шкатова

Институт «Кибернетический центр» ТПУ

E-mail: onv@am.tpu.ru

Предложен метод решения задачи линейного программирования, основанный на вычислении оператора-проектора на пространство векторов активных ограничений. Оператор-проектор вычисляется посредством процедуры рекуррентного псевдообращения, что обеспечивает более высокую устойчивость вычислений по сравнению с преобразованием Гаусса-Жордана, используемого в симплекс-методе. Метод позволяет в рамках единой процедуры учесть наличие ограничений-равенств, вырожденность матрицы ограничений неравенств.

### Ключевые слова:

Линейное программирование, оператор-проектор, рекуррентное псевдообращение.

Для решения задачи линейного программирования традиционно используют симплекс-метод Данцига, в основе которого лежит одна из форм преобразования Гаусса-Жордана [1]. Предлагаемая нами процедура решения задачи обеспечивает более высокую устойчивость вычислений по сравнению с преобразованием Гаусса-Жордана и позволяет в рамках единой процедуры учесть наличие ограничений-равенств и вырожденность матрицы ограничений неравенств, повышает точность получаемого решения и, кроме того, существенно сокращает объем вычислений.

### Постановка задачи

Найти минимум функции:

$$f = \langle g, x \rangle | A \cdot x \leq b, \quad (1)$$

где  $g$  – заданный, а  $x$  – подлежащий определению векторы,  $A$  – матрица известных коэффициентов системы ограничений,  $b$  – вектор правых частей системы неравенств.

### Стратегия поиска

Если в исходной задаче определены ограничения-равенства вида  $A_k x = b_k$ , то для их учета можно воспользоваться методом, описанным в [1].

Условия Куна-Таккера для задачи (1) имеют вид:

1.  $Ax^* \leq b$ ;
2.  $\lambda_i \cdot (b_i - a_i \cdot x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, n$ ;
3.  $g + A^T \lambda = 0$ ,

где  $x^*$  – решение задачи,  $\lambda$  – вектор неположительных коэффициентов (коэффициентов Лагранжа),  $a_i$  – строки матрицы ограничений  $A$ . Как известно, эти условия необходимы и достаточны для существования экстремума в точке  $x^*$  [2].

Множество значений  $x$ , удовлетворяющих ограничениям из (1), составляет многогранник  $M$ . Будем полагать, что  $A$  – матрица полного столбцового ранга. В противном случае, применив процедуру выбора из матрицы  $A$  базисного набора столбцов

максимального объема [3], получим матрицу полного ранга. Обозначим  $m$  – ранг матрицы  $A$ .

Для обоснования алгоритма получения опорного решения докажем два утверждения:

**Утверждение 1.** Если  $x_0$  – начальная точка, а ближайшая к ней плоскость многогранника  $M$  имеет направляющим вектором  $a_i$ , то  $x_1$  – проекция начальной точки на эту плоскость определяется как:

$$x_1 = x_0 + \frac{b_i - a_i^T \cdot x_0}{a_i^T \cdot a_i} \cdot a_i, \quad (3)$$

**Доказательство.** Преобразуем (3) к виду:

$$x_1 - x_0 = \frac{b_i - a_i^T \cdot x_0}{a_i^T \cdot a_i} \cdot a_i. \quad (4)$$

Так как  $\frac{b_i - a_i^T \cdot x_0}{a_i^T \cdot a_i}$  – скаляр, то направление из

$x_0$  на точку  $x_1$  совпадает с направляющим вектором плоскости  $a_i$ , т. е. нормально к этой плоскости. Умножим обе части (3) слева на  $a_i^T$ :

$$a_i^T \cdot x_1 = a_i^T \cdot x_0 + \frac{b_i - a_i^T \cdot x_0}{a_i^T \cdot a_i} \cdot a_i^T \cdot a_i = b_i, \quad (5)$$

т. е.  $x_1$  принадлежит плоскости, заданной направляющим вектором  $a_i$ .

**Утверждение 2.** Если точка  $x_k$  принадлежит пересечению  $k$  плоскостей, заданных направляющими векторами  $a_j, j=1 \dots k$ , то ее проекция на пересечение плоскостей, заданной строкой  $a_i$ , с пересечением плоскостей, заданных строками  $a_j, j=1 \dots k$ , составляющими матрицу  $A_k$ , есть:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{b_i - a_i^T \cdot x_k}{a_i^T \cdot \Omega \cdot a_i} \cdot \Omega \cdot a_i, \quad (6)$$

где  $\Omega = (I - A_k \cdot A_k^+)$  – проектор на пространство, перпендикулярное пространству, натянутому на строки матрицы  $A_k$ , а  $A_k^+$  – матрица, псевдообратная к матрице  $A_k$ ,  $I$  – единичная матрица.

**Доказательство.**

1. Преобразуем (6) к виду:

$$x_{k+1} - x_k = \frac{b_i - a_i^T \cdot x_k}{a_i^T \cdot \Omega \cdot a_i} \cdot \Omega \cdot a_i.$$

Так как  $\frac{b_i - a_i^T \cdot x_k}{a_i^T \cdot \Omega \cdot a_i}$  – скаляр, то направление из точки  $x_k$  на  $x_{k+1}$  перпендикулярно подпространству, натянутому на строки матрицы  $A_k$ .

2. Умножим обе части (6) слева на  $a_i^T$ :

$$a_i^T \cdot x_{k+1} = a_i^T \cdot x_k + \frac{b_i - a_i^T \cdot x_k}{a_i^T \cdot \Omega \cdot a_i} \cdot a_i^T \cdot \Omega \cdot a_i = b_i.$$

Следовательно, точка  $x_{k+1}$  принадлежит плоскости с направляющим вектором  $a_i$ .

3. Умножая (6) на матрицу  $A_k$  слева, получим:

$$A_k \cdot x_{k+1} = A_k \cdot x_k + \frac{b_i - a_i^T \cdot x_k}{a_i^T \cdot \Omega \cdot a_i} \cdot A_k \cdot \Omega \cdot a_i = A_k \cdot x_k,$$

т. к.  $\Omega \cdot a_i$  по определению принадлежит подпространству, перпендикулярному пересечению плоскостей, задаваемых строками матрицы  $A_k$ , то  $A_k \cdot \Omega \cdot a_i = 0$ .

Утверждения 1 и 2 обосновывают процесс получения опорного решения задачи линейного программирования, т. е. получения точки, принадлежащей вершине многогранника  $M$ . Выбрав произвольную начальную точку  $x_0$ , выполнив (3), перейдем к следующей точке на плоскости, ближайшей к  $x_0$ , а затем выполним последовательно (6) для тех  $i$ , для

которых  $y_i = b_i - a_i^T \cdot x_k \leq 0$ , а  $\frac{b_i - a_i^T \cdot x_k}{a_i^T \cdot \Omega \cdot a_i}$  – минимален. В

результате получим точку, для которой  $y_i \leq 0, i=1 \dots n$ , т. е. являющуюся вершиной многогранника  $M$ .

Получение оптимального решения связано с перемещением рабочей точки из этой вершины в ту, для которой значение целевой функции оптимально. Для шага перемещения необходимо из набора  $k$  ограничений-неравенств (строк матрицы  $A_k$ ), которые обращаются в равенства в этой вершине, исключить одно неравенство и добавить другое. Соответственно, необходимо пересчитать новую матрицу  $A_{k+1}$ . Для пересчета можно использовать процедуру рекуррентного псевдообращения [4]. Обозначим  $C_k$  матрицу, содержащую  $k$  столбцов, а  $c_k$  – добавляемый столбец.

Тогда [4]:

$$C_k = (C_{k-1}, c_k),$$

$$C_k^+ = \begin{pmatrix} C_{k-1}^+ [I - c_k \cdot c_k^+] \\ h_k \end{pmatrix},$$

$$\text{где } h_k = \frac{c_k^T \cdot (I - C_{k-1} \cdot C_{k-1}^+)}{c_k^T \cdot (I - C_{k-1} \cdot C_{k-1}^+) \cdot c_k}.$$

А также [5]:

$$C_{k-1}^+ = H_{k-1} \cdot (I - d_k \cdot h_k^T),$$

$$\text{где } d_k = h_k^T / h_k^T \cdot h_k^T.$$

Вычислим коэффициенты Лагранжа  $\lambda = (A_k^T)^+ \cdot g$ . Обозначим  $J$  – множество индексов соответствующих неравенств, включенным в  $A_k^+$ . Для выбора неравенства  $a_i$ , исключаемого из  $J$  на первом шаге, нужно взять максимальное среди положительных значений коэффициентов Лагранжа.

Номер неравенства, включение которого в  $J$  соответствует новой вершине, соответствует минимальному положительному значению коэффициентов Лагранжа:

$$\alpha = \frac{b_i - a_i^T \cdot x_k}{a_i^T \cdot \Omega \cdot a_i},$$

Решению задачи соответствует точка  $x^*$ , для которой все коэффициенты Лагранжа  $\lambda \leq 0$ .

Продemonстрируем предложенный метод на следующем численном примере.

**Пример.** Требуется найти минимум функции

$$y = f(x) = x_1 - 2 \cdot x_2 + x_3 - 3,424 \cdot x_4 + 0,5 \cdot x_5 - 6,25$$

при ограничениях:

$$A \cdot x = b \text{ и } A \cdot x \leq \tilde{b},$$

где:

$$A = \begin{pmatrix} 1,2 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 1,4 & -1,5 & 1 & -1 & -1 \\ -0,7 & 0,5 & 1 & -1 & 1 \\ 0,26 & -0,45 & 0,2 & -0,1 & -0,2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ 4,5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0,4 & -2 & 0,1 & 0,501 & 0,35 \\ -1 & 0,1 & -2 & 9,994 & -3,575 \\ -0,5 & 0,1 & 0,5 & -7,481 & 5,425 \\ 4,5 & -3 & -10,1 & -16,551 & -30,05 \\ 4,5 & -3 & 0 & -2,398 & -5 \\ -1 & 2 & 0,5 & -1,2 & -0,35 \\ 2,4 & -1 & -3,5 & 4 & -5,2 \\ -1 & 1 & -3 & 4,687 & -1,25 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 2,225 \\ 11,037 \\ 6,537 \\ 110,225 \\ -12 \\ -1,125 \\ 0,2 \\ -2,625 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи поиска экстремума разбивается на три подзадачи:

1. Учет ограничений равенств.
2. Определение ранга матрицы, полученной преобразованием матрицы коэффициентов.
3. Поиск экстремума преобразованной задачи.

Для учета ограничений-равенств выполним следующие шаги:

1. Выберем столбцы матрицы  $A$ , образующие базисный набор. Это столбцы: 2, 4, 5. Ранг матрицы  $A$  равен трем:  $(a_1^T \cdot R_3 \cdot a_1) \leq 1 \cdot 10^{-5}$ .
2. Найдем матрицу, псевдообратную к выделенным столбцам:

$$\hat{A}^+ = \begin{pmatrix} -0,497549 & 0,252451 & -0,250000 & -0,024510 \\ 0,253676 & -0,621324 & -0,375000 & -0,036765 \\ 0,502451 & -0,747549 & 0,750000 & -0,024510 \end{pmatrix}.$$

3. Умножим ее справа на ограничения-равенства:

$$\begin{aligned} \hat{A}^+ \cdot \hat{A} = \\ = \begin{pmatrix} 1,00000 & 0,00000 & 0,00000 & -0,07500 & -0,50000 \\ 0,00000 & 1,00000 & 0,00000 & -0,31250 & -0,75000 \\ 0,00000 & 0,00000 & 1,00000 & -0,97500 & 0,50000 \end{pmatrix}, \\ \hat{A}^+ \cdot \hat{b} = (-0,7500 \quad -2,1250 \quad 2,7500)^T. \end{aligned}$$

4. Минимизируемая форма преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} y &= \hat{A}^+ \cdot f(\bar{x}) = \\ &= \hat{A}^+ \cdot (x_1 - 2 \cdot x_2 + x_3 - 3,424 \cdot x_4 + 0,5 \cdot x_5 - 6,25) = \\ &= -3 \cdot x_1 - x_3, \end{aligned}$$

а ограничения-неравенства примут вид  $\tilde{A}' \cdot x \leq \tilde{b}'$ , где

$$\tilde{A}' = \begin{pmatrix} -0,998 & -1 \\ 8 & -3 \\ -7 & 5 \\ -26,998 & -25 \\ 2,998 & -5 \\ -0,162 & 0,4 \\ 0,455 & -3 \\ 2 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ 4,999 \\ 135 \\ 15 \\ 1 \\ 9,5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $\tilde{A}'$  — полного столбцового ранга ( $\text{rk} \tilde{A}' = 2$ ).

Для поиска экстремума преобразованной задачи (4, 5) выполняем следующие шаги:

1. Нумеруем неравенства, определенные в (5), в порядке 0, 1, 2, ..., 7.
2. Берем начальную точку  $x_0 = (2; -8)^T$ .
3. Вычисляем  $y = b - A \cdot x_0$ .
4. На основании значений  $y$  из неравенств, определенных в (5), находим неравенство, ближайшее к точке  $x_0$ . Это неравенство с номером 3.
5. Вычисляем проекцию на линию, определенную неравенством с номером 3. Это точка  $x_1 = (2,219; -7,797)^T$ .
6. Вычисляем для новой точки  $y = b - A \cdot x_1$ :  
 $y = (7,578 \ 25,145 \ -59,519 \ 0 \ 47,326 \ -4,474 \ 14,912 \ -6,4 \ 60)^T$ .
7. Точка  $x_1$  лежит на прямой, определенной неравенством с номером 3, а минимальное положительное значение соответствует неравенству с номером 0.
8. Вычисляем точку пересечения линий, определенных неравенствами с номерами 0 и 3:  $x_2 = (2; 0,0)^T$ .
9. Вычисляем для новой точки  $y = b - A \cdot x_2$ :  
 $y = (0,000 \ 0,000 \ 9,000 \ -1,320 \ -18,999 \ -3,000)^T$ .

Номера неравенств: 1, 0, 4, 5, 2, 7; исключено 3-е неравенство.

10. По вычисленным значениям определяем, что точка  $x_2$  принадлежит двум прямым, определенным неравенствами с номерами 0 и 1. Наличие положительных значений в  $y$  указывает, что опорное решение не достигнуто. Минимальное положительное значение (единственное) соответствует неравенству с номером 4.

11. Вычисляем точку пересечения линий, определенных неравенствами с номерами 4 и 1:  $x_3 = (2,5510204; 1,4693878)^T$ .

12. Вычисляем для новой точки  $y = b - A \cdot x_3$ :  
 $y = (0,000 \ 0,000 \ -0,820 \ -15,509 \ -1,163)^T$ .

Номера неравенств: 1, 4, 5, 2, 7; исключено 0-е неравенство.

13. Точка принадлежит прямым, определенным неравенствами с номерами 4 и 1. Среди элементов  $y$  нет положительных, т. е. опорное решение достигнуто. Проверим, является ли опорное решение оптимальным?

14. Вычисляем коэффициенты Лагранжа:  $\lambda = (-0,245; 0,347)^T$ . Решение не оптимально, т. к. имеется положительное значение, соответствующее неравенству номер 4.

15. Исключаем неравенство с номером 4.

16. Определяем неравенство для включения — это неравенство номер 7.

17. Определяем точку пересечения 7 и 1:  $x_4 = (2,9; 2,4)^T$ .

18. Вычисляем коэффициенты Лагранжа:  $\lambda = (0,05; -1,7)^T$ . Положительное значение соответствует неравенству номер 1.

19. Исключаем неравенство номер 1.

20. Вычисляем  $y = (-0,000 \ -13,299 \ -0,504)^T$ .

21. Номера неравенств: 7, 2, 5.

22. Включаем неравенство 6. Точка пересечения:  $x_5 = (2,61; 3,545)^T$ .

23. Вычисляем коэффициенты Лагранжа:  $\lambda = (-1,545; -0,568)^T$ . Решение оптимальное.

Таким образом, предлагаемый метод позволяет существенно сократить размерность решаемой задачи путем учета ограничений равенств, а также вырожденности матрицы ограничений-неравенств. Использование псевдообратной матрицы повышает точность вычисления коэффициентов Лагранжа и координат вычисляемой вершины многогранника. Применение операторов-проекторов гарантирует попадание из начальной точки в одну из вершин многогранника ограничений-неравенств, а затем удержание последовательности рабочих точек на поверхности этого многогранника. Приведенный численный пример подтверждает работоспособность метода.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вылегжанин О.Н., Шкатова Г.И. Учет ограничений равенств при решении оптимизационных задач с линейными ограничениями // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312. – № 5. – С. 76–78.
2. Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю. Линейное программирование. – М.: Факториал, 1998. – 323 с.
3. Вылегжанин О.Н., Шкатова Г.И. Сравнительная оценка двух методов выбора наилучших линейных регрессоров // Применение математических методов и ЭВМ в медико-биологических исследованиях / Межвузовский научно-техн. сб. под ред. В.А. Кочегурова. – Томск: Изд-во Томск. политехн. ин-та, 1988. – С. 18–22.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – 5-е изд. – М.: Физматлит, 2004. – 559 с.
5. Cline R.E. Representation for the Generalised Inverse of a Partitioned matrix // J. Soc. Industr. and Appl. Mathem. – 1964. – V. 12. – № 3. – P. 588–600.

Поступила 15.04.2009 г.

УДК 681.31:533.95

## МЕТОД СПЛАЙНОВОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА В ЗАДАЧЕ ТРАНСПОРТИРОВКИ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ

В.П. Григорьев, И.Л. Звигинцев, А.В. Козловских

Томский политехнический университет  
E-mail: 8b20@sibmail.com

Предложен метод сплайновой аппроксимации второй производной в узлах дискретной сетки по пространственной координате для решения уравнений векторного потенциала в электродинамических задачах при переходе от систем уравнений в частных производных к системам обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Показано, что разработанный метод сплайновой аппроксимации для такого рода задач работает на треть быстрее встроенных в Matlab стандартных функций сплайнов при относительно небольшом количестве узлов на сетке и равной погрешности.

**Ключевые слова:**

Сплайн-интерполяция, сплайновая аппроксимация, уравнения векторного потенциала, математическое моделирование.

В современных технологиях широко применяются низкоэнергетические сильноточные электронные пучки, как уникальные источники энергии. Для эффективного использования энергии, запасаемой в электронных пучках, требуется оптимизация их параметров и, следовательно, условий формирования и транспортировки на мишень. Для достижения этой цели из-за сложности физических процессов и дорогостоящих экспериментов большую роль приобретает численное моделирование и разработка новых математических методов [1, 2].

В данной работе предлагается новый метод для решения электродинамических задач. Апробация и тестирование этого метода проводится на примере решения проблемы транспортировки пучков к мишени в газе низкого давления.

Обычно подобного рода задачи решаются в пакете Matlab, если другие пакеты с готовыми встроенными алгоритмами (например, Comsol) не могут справиться с поставленной задачей из-за расходимости вычислений. Matlab имеет достаточно большой набор солверов, основанных на различных численных методах для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для решения жестких систем с высокой точностью подходит солвер, основанный на многошаговом методе Гира, который допускает изменение порядка точности [3]. При вычислении производных в Matlab ис-

пользуют сплайны. Для повышения скорости вычислений предложен метод, который работает быстрее, чем стандартные функции сплайн-интерполяции Matlab на относительно небольшом количестве узлов сетки. При этом большего увеличения скорости вычислений можно достичь, решая данную задачу на кластере.

Исходная задача математически представлена системой нелинейных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \frac{4\pi r_0 n_e}{v_{ef}} \frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} = \frac{4\pi}{c} e v_b n_b; \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} = \sigma_i \cdot v_b \cdot n_g \cdot n_b + n_e \cdot K_i \cdot n_g; \end{cases} \quad (1)$$

где  $A_z(r, t)$  – векторный потенциал поля,  $n_i(r, t)$  – плотность ионов,  $n_e(r, t)$  – плотность плазмы,  $r_0$  – классический радиус электрона,  $v_{ef}(r, t)$  – частота соударений электронов и ионов плазмы,  $K_i(r, t)$  – коэффициент ионизации,  $n_g(r, t)$  – плотность газа,  $n_b(r, t)$  – плотность пучка,  $v_b$  – скорость пучка,  $e$  – заряд электрона,  $\sigma_i$  – сечение ионизации.

Эти нелинейные уравнения связаны через сложную зависимость приведенных выше параметров от  $A_z(r, t)$  и  $n_i(r, t)$  [1].

Краевые условия: