

УДК 519.872;519.21

МНОГОФАЗНАЯ АВТОНОМНАЯ СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧАМ ДЕМОГРАФИИ

А.А. Назаров, М.Г. Носова

Томский государственный университет

E-mail: nosova_mg@mail.ru

Предложена математическая модель процесса изменения демографической ситуации в виде автономной системы массового обслуживания с двумя типами заявок и неограниченным числом приборов. Ее исследование выполняется методом моментов. Находятся первые и вторые моменты числа заявок, обслуживаемых в системе. Разработанная модель и метод применяется к прогнозированию процесса изменения демографической ситуации в Российской Федерации.

Ключевые слова:

Автономная система массового обслуживания, метод моментов, прогнозирование, численность населения, демографическая ситуация.

Key words:

Independent system of mass service, moment method, predicting, population size, demographic situation.

Необходимость перспективных расчетов общей численности и возрастно-полового состава населения делает задачу построения научно обоснованных демографических прогнозов особенно актуальной. К современным методам демографического прогнозирования относится построение математических моделей.

В работе предлагается применить модели и методы теории массового обслуживания для анализа процессов изменения демографической ситуации, учитывая специфику демографических процессов.

В качестве математической модели процесса изменения численности населения, например, населения Российской Федерации, рассматривается функционирование автономной системы массового обслуживания с двумя типами заявок и неограниченным числом приборов, рис. 1.

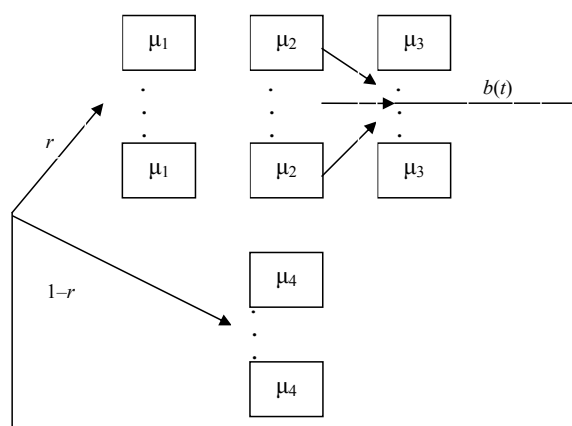


Рис. 1. Система массового обслуживания с двумя типами заявок и неограниченным числом приборов

Определим процесс функционирования системы массового обслуживания в терминах теории массового обслуживания, а также дадим демографическую интерпретацию основных элементов данной модели.

В системе различают два типа заявок: заявки первого типа и заявки второго типа. Определим процесс обслуживания заявок первого типа. Каждая заявка первого типа в момент поступления в систему занимает свободный прибор и находится на нем в течение всего времени обслуживания. Продолжительность обслуживания τ заявки первого типа складывается из трех фаз i , т. е.

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3.$$

Все τ_i — независимые и экспоненциально распределенные случайные величины с параметрами μ_i , характеризующими продолжительности фаз обслуживания. Будем считать, что для них на 2-й фазе возможно генерирование новых требований с интенсивностью $b(t)$. Тогда вероятность того, что заявка от момента t за бесконечно малый интервал времени продолжительности Δt сгенерирует новое требование составляет $b(t)\Delta t + o(\Delta t)$, а вероятность генерирования двух и более заявок является бесконечно малой величиной более высокого порядка чем Δt . Поскольку случайные величины τ_i распределены экспоненциально, то средняя продолжительность 2-й фазы составляет $1/\mu_2$. Тогда интенсивность репродукции на 2-й фазе запишем в виде

$$b(t) = \bar{b}(t)\mu_2,$$

где $\bar{b}(t)$ — суммарный коэффициент рождаемости в момент t [1]. Считаем, что с вероятностью r генерируется заявка первого типа и пополняет соответствующую численность заявок первой фазы обслуживания, а с вероятностью $1-r$ генерируется заявка второго типа и соответственно попадает в единственную группу заявок второго типа. Интенсивность генерирования новых требований для заявок первого типа на 1-й и 3-й фазах будем считать равной нулю. Обслуживание каждой новой заявки начинается на 1-й фазе. Заявка, завершив обслуживание на i -й фазе, с вероятностью q_i переходит к обслуживанию на $i+1$ -ю фазу, а с вероятностью $1-q_i$ завершает свое обслуживание и покидает систему,

$i=1,2$. С вероятностью 1 после 3-й фазы завершается полное обслуживание заявки.

Для заявок второго типа продолжительность обслуживания определяется величиной τ_4 , которая распределена экспоненциально с параметрами μ_4 . Заявка второго типа, завершив обслуживания на единственной фазе, также покидает систему.

Поскольку в рассматриваемой системе массового обслуживания отсутствует внешний источник заявок, так как все новые заявки генерируются заявками, находящимися на обслуживании, а время обслуживания заявок состоит из фаз, то такую систему будем называть *автономной системой с фазовым распределением*.

В терминах демографии под заявкой первого типа подразумевается женщина, а под заявкой второго типа – мужчина, репродуктивная 2-я фаза – репродуктивный возраст женщины [1], а время обслуживания в системе – продолжительность жизни человека.

Состояние автономной системы в момент времени t определяется четырехмерным вектором

$$n(t) = \{n_1(t), n_2(t), n_3(t), m(t)\}^T,$$

где $n_i(t)$ – число заявок первого типа, обслуживаемых на i -й фазе в момент времени t , а $m(t)$ – число заявок второго типа, обслуживаемых в системе в момент времени t . Очевидно, что $n(t)$ – четырехмерная цепь Маркова с непрерывным временем. В терминах демографии $n_i(t)$ определяет численность женщин на i -й фазе, $i=1-3$ (в i -й возрастной группе), а $m(t)$ – численность мужчин. Задача исследования данной математической модели состоит в нахождении распределения вероятностей

$$P(n_1, n_2, n_3, m, t) = P\{n_1(t) = n_1, n_2(t) = n_2, n_3(t) = n_3, m(t) = m\},$$

либо ее наиболее важных числовых характеристик.

Для этого распределения запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(n_1, n_2, n_3, m, t)}{\partial t} = & -(n_1\mu_1 + n_2\mu_2 + n_3\mu_3 + m\mu_4 + n_2b(t)) \times \\ & \times P(n_1, n_2, n_3, m, t) + \\ & + P(n_1 - 1, n_2, n_3, m, t)n_2b(t)r + \\ & + P(n_1, n_2, n_3, m - 1, t)n_2b(t)(1 - r) + \\ & + (m + 1)\mu_4P(n_1, n_2, n_3, m + 1, t) + \\ & + (n_1 + 1)\mu_1(P(n_1 + 1, n_2, n_3, m, t)(1 - q_1) + \\ & + P(n_1 + 1, n_2 - 1, n_3, m, t)q_1) + \\ & + (n_2 + 1)\mu_2(P(n_1, n_2 + 1, n_3, m, t)(1 - q_2) + \\ & + P(n_1, n_2 + 1, n_3 - 1, m, t)q_2) + \\ & + (n_3 + 1)\mu_3P(n_1, n_2, n_3 + 1, m, t). \end{aligned} \quad (1)$$

Обозначим характеристическую функцию числа обслуживаемых заявок в системе массового об-

служивания с двумя типами заявок в момент времени t в виде

$$H(u, t) = \sum_{n_1, n_2, n_3, m} P(n_1, n_2, n_3, m, t) \times \exp\{j(u_1n_1 + u_2n_2 + u_3n_3 + u_4m)\},$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, а $u = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}^T$ – четырехмерный вектор.

Характеристическая функция $H(u, t)$ является функцией векторного аргумента u и скалярного аргумента t .

Умножим (1) на $\exp\{j(u_1n_1 + u_2n_2 + u_3n_3 + u_4m)\}$ и просуммируем по n_1, n_2, n_3 и m . Получим уравнение для характеристической функции $H(u, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(u, t)}{\partial t} = & j \frac{\partial H(u, t)}{\partial u_1} \mu_1 \{1 - e^{-ju_1} + q_1 e^{-ju_1} (1 - e^{ju_2})\} + \\ & + j \frac{\partial H(u, t)}{\partial u_2} \{b(t)(1 - re^{ju_1}) + \\ & + b(t)e^{ju_4}(r - 1) + \mu_2(1 - e^{-ju_2}) + \\ & + \mu_2 e^{-ju_2} q_2 (1 - e^{ju_3})\} + j \frac{\partial H(u, t)}{\partial u_3} \mu_3 \{1 - e^{-ju_3}\} + \\ & + j \frac{\partial H(u, t)}{\partial u_4} \mu_4 \{1 - e^{-ju_4}\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Очевидно, что в явном виде не удастся записать решение этого уравнения. Поэтому для нахождения характеристик такой системы массового обслуживания применим метод моментов [2].

Известно, что производная k -го порядка в нуле от характеристической функции равна начальному моменту k -го порядка, умноженному на k -ю степень мнимой единицы [3].

Используя этот факт, найдем моменты первого и второго порядков для числа обслуживаемых заявок в рассматриваемой системе массового обслуживания.

Подставим в ур. (2) его решение и продифференцируем полученное тождество поочередно по u_1, u_2, u_3, u_4 . Обозначив

$$\left. \frac{\partial H(u, t)}{\partial u_i} \right|_{u_1=0, u_2=0, u_3=0, u_4=0} = jz_i(t), \quad i = \overline{1, 4},$$

получим следующую систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих компоненты $z_i(t)$

$$\begin{cases} z_1'(t) = -\mu_1 z_1(t) + b(t)r z_2(t), \\ z_2'(t) = \mu_1 q_1 z_1(t) - \mu_2 z_2(t), \\ z_3'(t) = \mu_2 q_2 z_2(t) - \mu_3 z_3(t), \\ z_4'(t) = b(t)(1 - r) z_2(t) - \mu_4 z_4(t) \end{cases} \quad (3)$$

вектора $z(t) = \{z_1(t), z_2(t), z_3(t), z_4(t)\}^T$.

Функция $z(t)$ в терминах теории массового обслуживания определяет среднее значение числа заявок первого и второго типов, обслуживаемых в системе в момент времени t , а в терминах демографии имеет смысл среднего значения численности мужского и женского населения.

Положим $b(t)=b$, то есть интенсивность генерирования новых заявок принимаем постоянной в любой момент времени t . Система (3) является линейной системой с постоянными коэффициентами [4]. Особенность этой системы уравнений заключается в том, что она распадается на три подсистемы, которые надо решать последовательно. Запишем общее решение

$$z_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (4)$$

$$z_2(t) = C_1 \frac{\mu_1 q_1}{\mu_2 + \lambda_1} e^{\lambda_1 t} + C_2 \frac{\mu_1 q_1}{\mu_2 + \lambda_2} e^{\lambda_2 t}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} z_3(t) = & \frac{\mu_1 q_1 \mu_2 q_2}{(\mu_3 + \lambda_1)(\mu_2 + \lambda_1)} C_1 e^{\lambda_1 t} + \\ & + \frac{\mu_1 q_1 \mu_2 q_2}{(\mu_3 + \lambda_2)(\mu_2 + \lambda_2)} C_2 e^{\lambda_2 t} + \\ & + \left(z_3(0) - \frac{\mu_1 q_1 \mu_2 q_2}{(\mu_3 + \lambda_1)(\mu_2 + \lambda_1)} C_1 - \right. \\ & \left. - \frac{\mu_1 q_1 \mu_2 q_2}{(\mu_3 + \lambda_2)(\mu_2 + \lambda_2)} C_2 \right) e^{-\mu_3 t}, \quad (6) \\ z_4(t) = & \frac{b(1-r)\mu_1 q_1}{(\mu_4 + \lambda_1)(\mu_2 + \lambda_1)} C_1 e^{\lambda_1 t} + \\ & + \frac{b(1-r)\mu_1 q_1}{(\mu_4 + \lambda_2)(\mu_2 + \lambda_2)} C_2 e^{\lambda_2 t} + \\ & + \left(z_4(0) - \frac{b(1-r)\mu_1 q_1}{(\mu_4 + \lambda_1)(\mu_2 + \lambda_1)} C_1 - \right. \\ & \left. - \frac{b(1-r)\mu_1 q_1}{(\mu_4 + \lambda_2)(\mu_2 + \lambda_2)} C_2 \right) e^{-\mu_4 t}, \quad (7) \end{aligned}$$

где характеристические корни λ_1 и λ_2 определяются как

$$\begin{aligned} \lambda_1 = & \frac{-\mu_1 - \mu_2 + \sqrt{(\mu_1 - \mu_2)^2 + 4br\mu_1 q_1}}{2}, \\ \lambda_2 = & \frac{-\mu_1 - \mu_2 - \sqrt{(\mu_1 - \mu_2)^2 + 4br\mu_1 q_1}}{2}, \end{aligned}$$

а произвольные постоянные C_1 и C_2 имеют вид

$$\begin{aligned} C_1 = & \frac{\lambda_1 + \mu_2}{\mu_1 q_1} \frac{(\lambda_2 + \mu_2)z_2(0) - \mu_1 q_1 z_1(0)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \\ C_2 = & \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\mu_1 q_1} \frac{\mu_1 q_1 z_1(0) - (\lambda_1 + \mu_2)z_2(0)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \end{aligned}$$

где $z_1(0)$, $z_2(0)$, $z_3(0)$ известные начальные условия.

Тогда, решением системы (3) является вектор $z(t) = \{z_1(t), z_2(t), z_3(t), z_4(t)\}^T$, компоненты, которого определяются равенствами (4)–(7).

Для нахождения моментов второго порядка продифференцируем второй раз поочередно по u_1 , u_2 , u_3 , u_4 равенство (2) и, обозначая

$$\frac{\partial^2 H(u, t)}{\partial u_i^2} \bigg|_{\substack{u_1=0, u_2=0, \\ u_3=0, u_4=0}} = j^2 d_i(t),$$

$$\frac{\partial^2 H(u, t)}{\partial u_i \partial u_j} \bigg|_{\substack{u_1=0, u_2=0, \\ u_3=0, u_4=0}} = j^2 d_{ij}(t), \quad i = \overline{1, 4}, j = \overline{1, 4},$$

где $d_i(t)$ – второй начальный момент величины $n_i(t)$, $i = \overline{1, 3}$, $d_4(t)$ – второй начальный момент величины $m(t)$, $d_{ij}(t)$ – второй смешанный начальный момент величин $n_i(t)$ и $n_j(t)$, $i = \overline{1, 3}$, $j = \overline{1, 3}$ и величин $n_i(t)$ и $m(t)$ соответственно при $j = 4$, нетрудно получить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} d'_1(t) = -2\mu_1 d_1(t) + 2d_{12}(t)br + \mu_1 m_1(t) + br m_2(t), \\ d'_{12}(t) = -(\mu_1 + \mu_2)d_{12}(t) + d_1(t)\mu_1 q_1 + \\ + d_2(t)br - \mu_1 q_1 m_1(t), \\ d'_{13}(t) = -(\mu_1 + \mu_3)d_{13}(t) + d_{12}(t)\mu_2 q_2 + d_{23}(t)br, \\ d'_2(t) = -2\mu_2 d_2(t) + 2d_{12}(t)\mu_1 q_1 + \\ + \mu_1 q_1 m_1(t) + \mu_2 m_2(t), \\ d'_{23}(t) = -(\mu_2 + \mu_3)d_{23}(t) + d_{13}(t)\mu_1 q_1 + \\ + d_2(t)\mu_2 q_2 - \mu_2 q_2 m_2(t), \\ d'_3(t) = -2\mu_3 d_3(t) + 2d_{23}(t)\mu_2 q_2 + \\ + \mu_2 m_2(t)q_2 + \mu_3 m_3(t), \\ d'_4(t) = -2\mu_4 d_4(t) + 2d_{24}(t)b(1-r) + \\ + m_2(t)b(1-r) + \mu_4 m_4(t), \\ d'_{14}(t) = -(\mu_1 + \mu_4)d_{14}(t) + d_{12}(t)b(1-r) + d_{24}(t)br, \\ d'_{24}(t) = -(\mu_2 + \mu_4)d_{24}(t) + \\ + d_{14}(t)\mu_1 q_1 + d_2(t)b(1-r), \\ d'_{34}(t) = -(\mu_3 + \mu_4)d_{34}(t) + \\ + d_{24}(t)\mu_2 q_2 + d_{23}(t)b(1-r). \end{cases} \quad (8)$$

Очевидно, что $d_{ij}(t) = d_{ji}(t)$, $i = \overline{1, 4}$, $j = \overline{1, 4}$.

Система дифференциальных уравнений первого порядка (8) является линейной системой с постоянными коэффициентами [4]. Отметим, что эта система обладает особенностью аналогичной особенности системы (3), и распадается на шесть подсистем, которые можно решать последовательно. При $b(t)=b$ ее решение не представляет затруднений. Общее решение приводить не будем по причине его громоздкости.

Результатом решения системы (8) являются аналитические решения $d_1(t)$, $d_2(t)$, $d_3(t)$, $d_4(t)$, $d_{12}(t)$, $d_{13}(t)$, $d_{14}(t)$, $d_{23}(t)$, $d_{24}(t)$, $d_{34}(t)$, определяющие вторые начальные моменты числа обслуживаемых заявок в рассматриваемой системе массового обслуживания.

Применим предложенную математическую модель в виде автономной системы с распределением фазового типа времени обслуживания и полученные результаты к исследованию демографической ситуации в Российской Федерации.

Предположим, что продолжительность жизни женщины условно можно разделить на три фазы: средняя продолжительность первой фазы 15 лет, второй и третьей фаз – по 30 лет. Поскольку продолжительности фаз τ_i – независимые и экспоненциально распределенные случайные величины с параметрами μ_i , то

$$\mu_1 = \frac{1}{15}, \quad \mu_2 = \frac{1}{30}, \quad \mu_3 = \frac{1}{30}.$$

Вторая фаза жизни представляет собой репродуктивный возраст женщины.

Начальной точкой будем считать 2005 г. Исходя из предположений относительно динамики суммарного коэффициента рождаемости и считая, что продолжительность жизни не будет существенно изменяться, можно сделать прогнозную оценку демографической ситуации. Согласно данным [5] суммарный коэффициент рождаемости в 2005 г. составлял 1,287. В последние годы по причине активно проводимой социальной политики ожидается его повышение до значения 2,2. Для построения сценария положим значение суммарного коэффициента рождаемости 2,2 на всем интервале прогнозирования от 2005 до 2105 гг. Тогда интенсивность репродукции на 2-й фазе составляет

$$b(t) = b = 2,2 \cdot \mu_2 = 0,073.$$

Мужчины образуют одну группу, продолжительность их нахождения в системе определяется продолжительностью фазы τ_4 с параметром μ_4 таким, что

$$\mu_4 = \frac{1}{60}.$$

Положим $q_1=q_2=1$. Вероятность рождения девочки будем считать равной $r=0,488$, мальчика $1-r=0,512$ соответственно.

Согласно [5] в начальный момент времени $t_{2005}=0$ известны следующие начальные условия:

$$m_1(0) = 10,679, \quad m_2(0) = 33,459, \quad m_3(0) = 32,733,$$

где $m_i(t)$ – численность женщин соответствующей возрастной группы $i=1-3$ (млн чел.), а численность мужчин

$$m_4(0) = 66,603.$$

Используя возможности пакета MathCAD и формулы (4)–(6) построен сценарий изменения численности женщин в каждой возрастной группе, а по формуле (7) спрогнозирована динамика общей численности мужчин на долгосрочную перспективу (до 2105 г.), рис. 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демографический энциклопедический словарь / под ред. Д.И. Валентя. – М.: Советская энциклопедия, 1985. – 608 с.
2. Назаров А.А. Теория массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2004. – 228 с.
3. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – 13-е изд., испр. – М.: Наука, 1986. – 544 с.

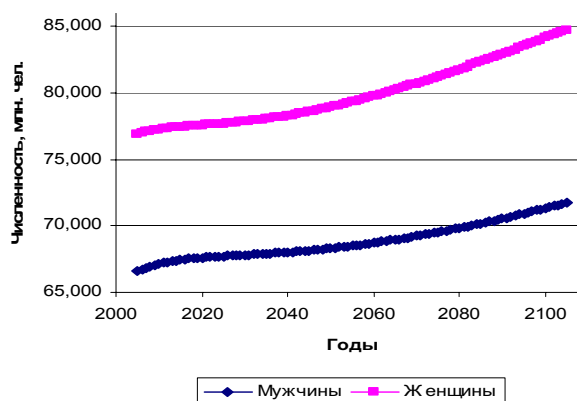


Рис. 2. Динамика суммарной численности

Заметим, что, используя решение системы (8) могут быть найдены вторые начальные моменты в долгосрочной перспективе до 2105 г.

Как видно из рис. 2, при таком предположении о суммарном коэффициенте рождаемости численность населения России возрастает. Это означает, что в России необходимо развитие на федеральном и региональном уровнях комплексных мероприятий, направленных на увеличение суммарного коэффициента рождаемости.

Выводы

1. Предложена математическая модель процесса изменения демографической ситуации в виде автономной системы массового обслуживания с двумя типами заявок и неограниченным числом приборов.
2. Математическая модель достаточно адекватно моделирует процесс изменения возрастной структуры населения и представляет широкие возможности к обобщению и модификации. При использовании модели возможен учет большого числа фаз и зависимости интенсивности генерации новых заявок от номера фазы обслуживания.
3. Полученные результаты могут быть использованы для анализа и прогноза демографической ситуации и управления общественными процессами.

Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 гг.)» Федерального агентства по образованию РФ по проекту «Разработка методов исследования немарковских систем массового обслуживания и их применения к сложным экономическим системам и компьютерным сетям связи».

4. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
5. Государственный комитет по статистике РФ (Госкомстат России): стат. сбор. // Университетская информационная система РОССИЯ (УИС РОССИЯ) [Электронный ресурс]. – М.: МГУ, 1996–2008. – режим доступа: <http://uisrussia.msu.ru>. – 28.08.2009.

Поступила 10.09.2009 г.