

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВЫХОДЯЩЕГО ПОТОКА СИСТЕМЫ $MAR|GI|_{\infty}$

А.А. Назаров, И.Л. Лапатин

Томский государственный университет

E-mail: ilapatin@mail.ru

Исследуется выходящий поток системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов и входящим MAP-поток. Рассматривается модель с произвольным распределением времени обслуживания. Предложен метод просеянного потока для исследования выходящих потоков немарковских систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов. Показано, что в условии растущего времени обслуживания выходящий поток является асимптотически простейшим.

Ключевые слова:

Системы массового обслуживания, выходящий поток, метод асимптотического анализа.

Key words:

Queuing systems, output process, asymptotic analysis method.

В последние годы бурное развитие телекоммуникационных, вычислительных, производственных систем вызвало необходимость построения адекватных математических моделей таких систем и применения результатов их исследования на практике. Системы массового обслуживания [1] с неограниченным числом приборов используются как математические модели реальных систем: в технике, теории связи, страховании, банковском деле, документообороте и других областях.

Большая часть работ по исследованию систем с неограниченным числом приборов, например [2], посвящена анализу числа заявок, находящихся в системе, а описанию и изучению свойств выходящих потоков уделялось недостаточно внимания, хотя на практике часто необходимо знание характеристик таких потоков. С одной стороны, если рассматривать систему с неограниченным числом приборов как модель, например, экономической системы (страховой, банковской), то информация о выходящем потоке дает возможность прогнозировать число обслуженных клиентов. С другой стороны, обслуженные одной системой заявки, могут образовывать входящий поток для другой, что происходит в сетях массового обслуживания. Поэтому исследование выходящих потоков актуально и для развития теории сетей массового обслуживания, анализу которых посвящены, например, работы [3, 4]. На настоящий момент выходящие потоки систем массового обслуживания остаются малоизученными, что вызвано отсутствием общих подходов к их изучению, а результаты в этой области получены только для некоторых простейших систем.

Первые попытки исследования выходящих потоков в рамках классической теории были сделаны во второй половине XX в. такими учеными, как П. Берк [5], Е. Рейч, П. Финч. В работе Л.К. Горского и Н.М. Акулиничева [6] были получены асимптотические распределения вероятностей числа обслуженных заявок некоторых систем с ограничениями. Изучение свойств выходящих потоков продолжается и в настоящее время. В работе [7]

было найдено распределение числа заявок, обслуженных за период занятости в стационарной системе $Geom|Geom|1$ с дискретным временем. Анализу выходящих потоков в системах с циклическим обслуживанием посвящены работы исследователей из школы Нижегородского государственного университета (М.А. Федоткин, Е.В. Пройдакова) [8, 9].

Для систем с неограниченным числом приборов, на вход которых поступает простейший поток, было показано [10], что выходящий поток также является простейшим. Этот результат был получен еще в 1963 г., а в настоящее время для более адекватного описания реальных систем необходимо использовать более сложные модели входящих потоков.

Широким классом потоков с зависимыми длинами интервалов между моментами наступления событий является класс марковских входящих потоков (Markovian Arrival Process). Его понятие впервые было введено М. Ньютом [11], а затем уточнено Д. Луконтони. Различные определения таких потоков даны в книгах Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко [1], А.Н. Дудина [12], А.А. Назарова [13]. Исследование самого MAP-потока можно найти в работе [14].

Теперь определим понятие случайного потока.

Случайным потоком однородных событий или точечным случайным процессом по определению называется последовательность

$$t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$$

моментов наступления рассматриваемых событий.

Случайный поток однородных событий будем определять в виде случайного процесса $r(t)$ — числа событий рассматриваемого потока, наступивших за время t .

Пусть эргодическая цепь Маркова $k(t)$ с конечным числом состояний задана матрицей инфинитезимальных характеристик Q с элементами $q_{k_1 k_2}$. Также задан набор неотрицательных чисел λ_k и вероятности $d_{k_1 k_2}$, причем $d_{k_1 k_1} = 0$.

Случайный поток однородных событий будем называть МАР-поток (Markovian Arrival Process), управляемым эргодической цепью Маркова $k(t)$, если выполняются равенства

$$P\{r(t + \Delta t) = r + 1 | r(t) = r, k(t) = k_1\} = \lambda_{k_1} \Delta t + o(\Delta t),$$

$$P\{r(t + \Delta t) > r + 1 | r(t) = r, k(t) = k_1\} = o(\Delta t),$$

$$P\{r(t + \Delta t) = r + 1, k(t + \Delta t) = k_2 | r(t) = r, k(t) = k_1\} = d_{k_1 k_2} q_{k_1 k_2} \Delta t + o(\Delta t),$$

$$P\{r(t + \Delta t) = r, k(t + \Delta t) = k_2 | r(t) = r, k(t) = k_1\} = (1 - d_{k_1 k_2}) q_{k_1 k_2} \Delta t + o(\Delta t).$$

Заметим, что пока управляющая цепь Маркова $k(t)$ находится в некотором состоянии k_1 , события в МАР-поток наступают как в простейшем с параметром λ_{k_1} . Кроме событий на интервалах постоянства состояния управляющей цепи могут наступать события при переходе из одного состояния в другое. Если управляющая цепь Маркова переходит из состояния k_1 в некоторое состояние k_2 , событие в МАР-поток наступает с вероятностью $d_{k_1 k_2}$, а с вероятностью $(1 - d_{k_1 k_2})$ событие не наступает.

Состояния управляющей цепи Маркова будем называть состояниями МАР-потока.

В данной работе приводится исследование входящего потока системы с неограниченным числом приборов, на вход которой поступает МАР-поток. В случае экспоненциального времени обслуживания задача исследования немарковского процесса, определяющего число обслуженных заявок, решается [15] введением дополнительных переменных таким образом, чтобы случайный процесс в расширенном фазовом пространстве становился марковским, что в некоторых работах [16] называют «внешним» марковизированием. А при произвольной функции распределения времени обслуживания не удастся выполнить «внешнее» марковизирование. В настоящей работе для исследования выходящих потоков систем с неограниченным числом приборов и произвольным распределением времени обслуживания предлагается метод просеянного потока. Данный метод сводит исследование выходящего потока к исследованию так называемого просеянного потока, который является марковизируемым.

Рассматривается система массового обслуживания с неограниченным числом приборов. На вход поступает МАР-поток заявок. Заявка, пришедшая в систему, занимает любой из свободных приборов, на котором обслуживается в течении случайного времени. Распределение времени обслуживания поступающих заявок определяется функцией распределения $B(x)$, одинаковой для всех заявок.

Если использовать символику, предложенную Д. Кендаллом, то рассматриваемая система будет обозначаться $MAP|GI|\infty$.

В работе выполнено исследование выходящего потока этой системы методом асимптотического

анализа в условии растущего времени обслуживания, т. е. при условии, что

$$b = \int_0^{\infty} (1 - B(x)) dx,$$

имеющее смысл среднего значения времени обслуживания, стремится к бесконечности.

Методом асимптотического анализа в теории массового обслуживания называют [13] решение уравнений, определяющих какие-либо характеристики системы, при выполнении некоторого предельного условия.

Будем полагать, что выходящий поток системы $MAP|GI|\infty$ определяется случайным процессом $m(t)$ – число заявок, закончивших обслуживание в системе за некоторое время t . Очевидно, что он не является марковским. А метод марковизации этого процесса, используемый в случае экспоненциального времени обслуживания [15], не дает результатов. Поэтому будем использовать предлагаемый в данной работе метод просеянного потока.

Подробнее остановимся на этом методе.

Для произвольного входящего потока рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом приборов. Времена обслуживания поступающих заявок случайные, стохастически независимые, и определяются функцией распределения $B(x)$, одинаковой для всех заявок.

Пусть $T_1 > 0$, $T > 0$ – некоторые заданные величины, а $b = \int_0^{\infty} (1 - B(x)) dx$ – среднее значение времени обслуживания заявки, тогда обозначим

$$S(t) = \begin{cases} B(bT_1 - t + T) - B(bT_1 + T), & 0 < t \leq bT_1, \\ B(bT_1 - t + T), & bT_1 < t \leq bT_1 + T. \end{cases}$$

Будем полагать, что если событие входящего потока наступает в момент t , то с динамической (зависящей от момента времени t) вероятностью $S(t)$ эта заявка просеивается, то есть отправляется в просеянный поток, а с вероятностью $1 - S(t)$ не рассматривается.

Здесь $S(t)$ – вероятность того, что заявка, поступившая в систему в момент времени $t \in [0, bT_1 + T]$, завершит свое обслуживание в момент времени, принадлежащий интервалу $[bT_1, bT_1 + T]$.

Очевидно, что в просеянном потоке рассматриваются те заявки, которые формируют на интервале $[bT_1, bT_1 + T]$ события выходящего потока.

Обозначим $n(t)$ – число событий просеянного потока, наступивших до момента времени t , т. е. на интервале $[0, t]$.

Если в начальный момент времени $t_0 = 0$ система свободна, то число событий просеянного потока к моменту времени $bT_1 + T$ равно числу заявок, закончивших обслуживание на интервале $[bT_1, bT_1 + T]$, т. е. выполняется равенство

$$n(bT_1 + T) = m(T, bT_1), \quad (1)$$

где $m(T, bT_1)$ – число событий выходящего потока рассматриваемой системы, наступивших на интервале $[bT_1, bT_1 + T]$.

В силу начального условия о том, что в момент времени $t_0=0$ система свободна, рассматривается переходной режим функционирования системы и нестационарный выходящий поток.

Для исследования стационарного выходящего потока будем полагать, что $T_1 \rightarrow \infty$, тогда функционирование системы массового обслуживания определяется финальным распределением и стационарным режимом.

Если предлагаемый просеянный поток является марковизированным, то можно записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова для многомерного распределения вероятностей. В результате решения системы уравнений получим одномерное маргинальное распределение вероятностей для числа событий, наступивших в просеянном потоке за время t . А затем, применив равенство (1), найдем распределение вероятностей числа событий выходящего потока, наступивших в интервале $[bT_1, bT_1 + T]$ как в переходном режиме функционирования системы массового обслуживания при конечных T_1 , так и в стационарном режиме, полагая $T_1 \rightarrow \infty$.

Итак, вернемся к исследованию системы MAP/GI ∞ . Выше был определен процесс $n(t)$ – число событий просеянного потока, наступивших до момента времени t . Очевидно, он не является марковским, т. к. «просеиваем» мы входящий MAP-поток, наступление событий в котором зависит от состояний управляющей цепи $k(t)$.

Двумерный процесс $\{k(t), n(t)\}$ уже является марковским и для его распределения вероятностей

$$P(k, n, t) = P\{k(t) = k, n(t) = n\}$$

можно записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(k, n, t)}{\partial t} = & \lambda_k S(t)(P(k, n-1, t) - P(k, n, t)) + \\ & + \sum_v \left\{ P(v, n, t) + S(t)(P(v, n-1, t) - \right. \\ & \left. - P(v, n, t))d_{vk} \right\} q_{vk}. \end{aligned} \quad (2)$$

Обозначив

$$H(k, u, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{ju n} P(k, n, t),$$

где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, из системы (2) получим систему для $H(k, u, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(k, u, t)}{\partial t} = & \lambda_k (e^{ju} - 1) S(t) H(k, u, t) + \\ & + \sum_v H(v, u, t) \{1 + S(t)(e^{ju} - 1) d_{vk}\} q_{vk}, \end{aligned}$$

которую запишем в матричном виде

$$\frac{\partial H(u, t)}{\partial t} = H(u, t)[(e^{ju} - 1)S(t)B + Q], \quad (3)$$

где $H(u, t) = \{H(0, u, t), H(1, u, t), \dots\}$; Q – матрица инфинитезимальных характеристик q_{kv} ; B – матрица с элементами λ_k на главной диагонали и элементами $d_{kv} q_{kv}$ вне главной диагонали.

Систему дифференциальных уравнений (3), записанную в матричном виде, будем называть дифференциально-матричным уравнением. Отметим, что решить это уравнение аналитически не удастся, поэтому будем решать его методом асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания.

Заметим, что полученную с помощью метода просеянного потока систему дифференциальных уравнений можно решать и другими методами, например, численными.

Будем полагать, что $B(x) = B_1(x/b)$, где $B_1(x)$ – заданная функция распределения случайной величины с единичным математическим ожиданием.

Обозначим $\varepsilon = 1/b$; в уравнении (3) выполним замены

$$\tau = \varepsilon t, \quad H(u, t) = F(u, \tau, \varepsilon), \quad S(t) = S_1(\tau, \varepsilon), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} S_1(\tau, \varepsilon) = & \\ = & \begin{cases} B_1(T_1 - \tau + \varepsilon T) - B_1(T_1 - \tau), & 0 < \tau \leq T_1, \\ B_1(T_1 - \tau + \varepsilon T), & T_1 < \tau \leq T_1 + \varepsilon T. \end{cases} \end{aligned}$$

Полагая, что функция $B_1(x)$ дважды дифференцируема, вероятность $S_1(\tau, \varepsilon)$ можно записать в виде

$$S_1(\tau, \varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon T b_1(T_1 - \tau) + O(\varepsilon^2), & 0 < \tau \leq T_1 \\ O(\varepsilon^2), & T_1 < \tau \leq T_1 + \varepsilon T, \end{cases} \quad (5)$$

где $b_1(x) = b(x)$ – плотность распределения времени обслуживания

Тогда для $F(u, \tau, \varepsilon)$ получим уравнение

$$\varepsilon \frac{\partial F(u, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} = F(u, \tau, \varepsilon)[(e^{ju} - 1)S_1(\tau, \varepsilon)B + Q]. \quad (6)$$

Теорема. Предельное, при $\varepsilon \rightarrow 0$, значение $F(u, \tau)$ решения $F(u, \tau, \varepsilon)$ уравнения (6) имеет вид

$$F(u, \tau) = R \cdot \exp \left\{ (e^{ju} - 1) \kappa_1 T \int_0^{\tau} b_1(T_1 - z) dz \right\}, \quad (7)$$

где величина κ_1 определяется равенством

$$\kappa_1 = RBE, \quad (8)$$

а вектор-строка R определяется системой

$$\begin{cases} RQ = 0 \\ RE = 1 \end{cases},$$

здесь E – единичный вектор-столбец.

Если сделать предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ в дифференциально-матричном уравнении (6), то получим, что $F(u, \tau)$ является решением однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$F(u, \tau)Q = 0,$$

которая совпадает по виду с системой уравнений для стационарного распределения R состояний управляющей цепи Маркова $k(t)$

$$\begin{cases} RQ = 0, \\ RE = 1. \end{cases}$$

Поэтому $F(u, \tau)$ будет иметь вид

$$F(u, \tau) = R\Phi(u, \tau), \quad (9)$$

где $\Phi(u, \tau)$ — скалярная неизвестная функция.

Подставляя полученное выражение (9) в уравнение (6), умножая его справа на единичный вектор E , разделив на ε и устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$, получим линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $\Phi(u, \tau)$

$$\frac{\partial \Phi(u, \tau)}{\partial \tau} = (e^{ju} - 1)\kappa_1 T b_1(T_1 - \tau)\Phi(u, \tau),$$

решение которого имеет вид

$$\Phi(u, \tau) = \exp \left\{ (e^{ju} - 1)\kappa_1 T \int_0^\tau b_1(T_1 - z) dz \right\}.$$

Учитывая выражение (8), получим равенство

$$F(u, \tau) = R \cdot \exp \left\{ (e^{ju} - 1)\kappa_1 T \int_0^\tau b_1(T_1 - z) dz \right\},$$

которое совпадает с равенством (7), что доказывает теорему.

Следствие. Выходящий поток системы $MAR|GI|_\infty$, функционирующей в стационарном режиме, в условиях растущего времени обслуживания является простейшим с параметром κ_1 , где κ_1 определяется равенством (8).

Из равенства (7), учитывая замены (4), можно записать вид асимптотического приближения характеристической функции числа событий, наступивших в просеянном потоке за время t

$$Me^{jum(t)} = H(u, t) = F(u, \tau, \varepsilon) \approx$$

$$\begin{aligned} &\approx F(u, \tau) = \exp \left\{ (e^{ju} - 1)\kappa_1 T \int_0^\tau b_1(T_1 - z) dz \right\} = \\ &= \exp \left\{ (e^{ju} - 1)\kappa_1 T [B(bT_1) - B(bT_1 - t)] \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Используя равенство (1) из (10), получим асимптотическое приближение характеристической функции числа заявок, закончивших обслуживание в рассматриваемой системе на интервале $[bT_1, bT_1 + T]$

$$Me^{jum(bT_1+T)} = Me^{jum(bT_1, T)} \approx \exp \left\{ (e^{ju} - 1)\kappa_1 T B(bT_1) \right\},$$

устремляя в котором $T_1 \rightarrow \infty$ для стационарного входящего потока, запишем

$$Me^{jum(T)} \approx \exp \left\{ (e^{ju} - 1)\kappa_1 T \right\}. \quad (11)$$

Из формулы (11) следует, что выходящий поток системы $MAR|GI|_\infty$ в условии растущего времени обслуживания является простейшим с параметром κ_1 , имеющим смысл интенсивности входящего MAR -потока. Следствие доказано.

Выводы

Предложен метод просеянного потока для исследования выходящих потоков немарковских систем массового обслуживания с неограниченным числом приборов и различными моделями входящих потоков (MAR , рекуррентный, полумарковский). С помощью метода просеянного потока удалось записать систему дифференциальных уравнений Колмогорова, определяющую характеристики выходящего потока системы $MAR|GI|_\infty$. Система уравнений решалась методом асимптотического анализа в условии растущего времени обслуживания с применением метода характеристических функций. Показано, что выходящий поток системы $MAR|GI|_\infty$ в условии растущего времени обслуживания является асимптотически простейшим.

Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)» Федерального агентства по образованию по проекту «Разработка методов исследования немарковских систем массового обслуживания и их применение к сложным экономическим системам и компьютерным сетям связи».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. Изд. 3-е, испр. и доп. — М.: КомКнига, 2005. — 400 с.
2. Baum D. The Infinite Server Queue with Markov Additive Arrivals in Space // Probabilistic Analysis of Rare Events: Theory and Problems of Safety, Insurance and Ruin: Proc. of the Intern. Conf. — Rigga: RAU, 1999. — P. 136–142.
3. Ивницкий В.А. Теория сетей массового обслуживания. — М.: Физматлит, 2004. — 225 с.
4. Massey W.A., Whitt W. Networks of infinite-server queues with non-stationary Poisson input // Queuing Systems. — 1993. — № 13. — P. 183–250.
5. Burke P.J. The Output of Queuing Systems // Operations Research. — 1956. — V. 4. — P. 699–704.
6. Акулиничев Н.М., Горский Л.К. Об асимптотических распределениях выходящих потоков некоторых систем массового обслуживания // Кибернетика. — 1973. — № 1. — С. 71–78.
7. Goswami V. Distribution of the number of customs served during a busy period in a discrete time Geom|Geom|1 // Indian J. Pure Appl. Math. — 2002. — V. 33. — № 9. — P. 1405–1508.
8. Пройдакова Е.В., Федоткин М.А. Определение условий существования стационарного распределения выходных потоков в системе с циклическим управлением // Вест. Нижегород. гос. ун-та им. Н.И. Лобачевского. Математика. — 2006. — Вып. 1 (4). — С. 92–102.

9. Пройдакова Е.В., Федоткин М.А. Определение условий существования стационарного распределения выходных потоков в системе с циклическим управлением // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 6. – С. 96–106.
10. Mirasol N.M. The output of an $M|G|\infty$ queueing system is Poisson // Operations Research. – 1963. – V. 11. – P. 282–284.
11. Neuts M.F. A versatile Markovian arrival process // Journal of Appl. Prob. – 1979. – V. 16. – P. 764–779.
12. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. – Минск: БГУ, 2000. – 175 с.
13. Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. – 112 с.
14. Лопухова С.В., Назаров А.А. Исследование МАР-потока методом асимптотического анализа N -го порядка // Вестник ТГУ. Серия Информатика. Кибернетика. Математика. – 2006. – № 293. – С. 110–115.
15. Лапатын И.Л., Назаров А.А. Исследование выходящего потока системы $МАР|M|\infty$ в условиях растущего времени обслуживания // Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения: сб. науч. ст. – Вып. 2. – Минск: РИВШ, 2009. – С. 76–79.
16. Кениг Д., Штойян Д. Методы теории массового обслуживания: Пер. с нем. / Под ред. Г.П. Климова. – М.: Радио и связь, 1981. – 128 с.

Поступила 26.10.2009 г.

УДК 004.65

РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МЕТАОПИСАНИЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ БАЗЫ ЕДИНОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ СРЕДЫ ВУЗА

В.В. Осипова, И.Л. Чудинов

Томский политехнический университет

E-mail: vikosi@tpu.ru

Предложена модель представления системного описания структуры и семантики данных информационной базы единой информационной среды вуза на примере ТПУ, предназначенная для функционирования универсальных процедурно-ориентированных средств по работе с объектами базы данных в терминах предметной области.

Ключевые слова:

Структурные метаданные, семантические метаданные, универсальные процедурно-ориентированные средства, словарь данных, единая информационная среда.

Key words:

Structural metadata, semantic metadata, universal procedure-oriented tools, data dictionary, integrated information environment.

В сфере информатизации деятельности вузов в течение последних десятилетий доминирует подход, предполагающий ввод в действие информационно-программных комплексов (ИПК) для функциональных подразделений («Кадры сотрудников», «Абитуриент», «Аспирантура», «Планирование учебного процесса» и др.). С расширением состава ИПК и накоплением информации в базах данных возрастает потребность в доступе к информации различных подсистем, прежде всего, у руководителей различных уровней. Однако, каждый ИПК, как правило, имеет ограниченный набор процедур и специфику интерфейса, что затрудняет или делает невозможным удовлетворение упомянутых информационных потребностей пользователей. Кроме того, в процессе эксплуатации специализированных подсистем появляется потребность в формировании новых видов отчетов (запросов на чтение), которые могут иметь разовый характер, для автоматизации формирования которых модификация существующих ИПК часто оказывается нерациональной.

Перечисленные выше факторы делают актуальным использование наряду со специализированными предметно-ориентированными ИПК универсальных процедурно-ориентированных инструментов, которые обеспечивали бы единообразный пользовательский интерфейс, автоматически настраиваемый на любые таблицы информационной базы (ИБ), и типовый набор стандартных функций (навигация, чтение, поиск и селекция, агрегация, добавление, изменение и удаление данных). Универсальность в значительной степени обеспечивают любые программы-оболочки, которые используют метаданные словаря баз данных (БД) и реализуют интерфейс для построения SQL-запросов. Однако все эти средства ориентированы на профессиональных разработчиков, требуют специальной квалификации и знания структуры БД и поэтому плохо подходят для использования конечными пользователями. В соответствии с концепцией единой информационной среды (ЕИС) ТПУ создается универсальная информационно-справочная система, предназначенная для отображения содер-