

УДК 514.76

О СУЩЕСТВОВАНИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ И АНАЛИТИЧЕСКИХ КВАДРАТИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ ПЛОЩАДОК СЛОЕВ КАСАТЕЛЬНОГО И НОРМАЛЬНОГО РАССЛОЕНИЙ МНОГОМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.К. Барышева, Е.Т. Ивлев

Томский политехнический университет
Тел.: (382-2)-56-37-29

Рассматриваются случаи, когда на многомерной поверхности общего вида в евклидовом пространстве инвариантным образом определяются гармонические f_t и аналитические f_s отображения двумерных плоскостей L_2^1 и P_2^1 . Эти плоскости принадлежат соответствующим слоям касательного и нормального расслоений данной поверхности.

1. Поля инвариантных линейных подпространств $\tilde{L}_p \subset L_m (2 \leq p < m)$ и $\tilde{P}_q \subset P_{n-m} (m+2 \leq q < n)$

Статья является продолжением статьи [1] и посвящена рассмотрению случаев, когда отображения $f_t, f_s: L_2^1 \rightarrow P_2^1$ в смысле [1, (2.3), (2.6)] инвариантным образом определяются на m -поверхности $S_m \subset E_n$ общего вида, т.е. когда величины $h_{a_1}^{\alpha_1}$ и $q_{a_1}^{\alpha_1}$ с учетом [1, (2.12), (2.10)], удовлетворяющие четырем соответствующим соотношениям в [1, (2.16)], определяют через величины $A_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}}$ или, что то же, когда геометрические объекты [1, (2.3)] охватываются фундаментальным геометрическим объектом [1, (1.5)] m -поверхности $S_m \subset E_n$.

1.1. Каждой точке A базы $S_m \subset E_n$ в слое P_{n-m} расслоения $N_{m,n-m}$ поставим в соответствие алгебраическую поверхность второго порядка $\tilde{Q}_{n-m-1}^2$, определяемую уравнениями (см. [2, (8), с. 51]):

$$\tilde{Q}_{n-m-1}^2: A_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} x^{\hat{\alpha}} x^{\hat{\beta}} + 2A_{\hat{\alpha}\alpha} x^{\hat{\alpha}} + m = 0, \quad x^{\beta} = 0, \quad (1.1)$$

где в соответствии с [2, (10), с. 51] величины $A_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$, симметричные по нижним индексам, с учетом [1, (1.5)] определяются по формулам

$$A_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = A_{\hat{\alpha}\beta}^{\alpha} A_{\beta\alpha}^{\hat{\beta}} \quad (1.2)$$

и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dA_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} - A_{\hat{\gamma}\hat{\beta}} \omega_{\hat{\alpha}}^{\hat{\gamma}} - A_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} \omega_{\hat{\beta}}^{\hat{\gamma}} = A_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\gamma} \omega^{\gamma}, \quad (1.3)$$

здесь явный вид величин $A_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\gamma}$ для нас несущественный. Из (1.1) получаются уравнения асимптотического конуса K_{n-m-1}^2 второго порядка с вершиной A алгебраической поверхности $\tilde{Q}_{n-m-1}^2 \subset P_{n-m}$

$$K_{n-m-1}^2: A_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} x^{\hat{\alpha}} x^{\hat{\beta}} = 0, \quad x^{\alpha} = 0. \quad (1.4)$$

1.2. Точке A базы $S_m \subset E_n$ в слое L_m расслоения $T_{m,m}$ сопоставим конус Q_{m-1}^2 второго порядка с вершиной A , который в соответствии с [3, (21), с. 72] определяется уравнениями:

$$Q_{m-1}^2: A_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta} = 0, \quad x^{\hat{\alpha}} = 0. \quad (1.5)$$

Здесь величины $A_{\alpha\beta}$ в соответствии с [3, (21), с. 72] определяются по формулам

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} A_{|\alpha|\gamma}^{\hat{\alpha}} A_{|\hat{\alpha}|\beta}^{\gamma} \quad (1.6)$$

и в силу (1.5) удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$dA_{\alpha\beta} - A_{\gamma\beta} \omega_{\alpha}^{\gamma} - A_{\alpha\gamma} \omega_{\beta}^{\gamma} = A_{\alpha\beta\gamma} \omega^{\gamma}, \quad (1.7)$$

причем явный вид величин $A_{\alpha\beta\gamma}$ для нас несущественный.

Замечание 1.1. В каждой точке $A \in S_m$ слой L_m расслоения $T_{m,m}$ играет роль подпространства Π_{m-1} , о котором идет речь в [3, с. 70]. При этом квадрике $Q_{m-2} \subset \Pi_{m-1}$ в [3, (24), с. 72] в данной статье отвечает конус Q_{m-1}^2 .

1.3. Проведем такую канонизацию ортонормального репера R в каждой точке $A \in S_m \subset E_n$, при которой

$$\begin{aligned} A_{r_1 r_2} &= 0, \quad E \equiv \det[E_{r_1 r_2 s_1}^{t_2}] \neq 0, \quad (r_1, s_1, t_1 = \overline{1, p}), \\ A_{\hat{r}_1 \hat{r}_2} &= 0, \quad \hat{E} \equiv \det[\hat{E}_{\hat{r}_1 \hat{r}_2 \hat{s}_1}^{\hat{t}_2}] \neq 0, \quad (\hat{r}_1, \hat{s}_1, \hat{t}_1 = \overline{1, q}), \end{aligned} \quad (1.8)$$

$(r_2, s_2, t_2 = \overline{p+1, m}; \hat{r}_2, \hat{s}_2, \hat{t}_2 = \overline{q+1, n}; 2 \leq p < m; m+2 \leq q < n)$.
Здесь

$$\begin{aligned} E_{r_1 r_2 s_1}^{t_2} &= A_{r_1 s_1} \delta_{r_2}^{s_1} \delta_{t_2}^{t_2} - A_{s_2 r_2} \delta_{r_1}^{s_1} \delta_{t_2}^{t_2}, \\ \hat{E}_{\hat{r}_1 \hat{r}_2 \hat{s}_1}^{\hat{t}_2} &= A_{\hat{r}_1 \hat{s}_1} \delta_{\hat{r}_2}^{\hat{s}_1} \delta_{\hat{t}_2}^{\hat{t}_2} - A_{\hat{s}_2 \hat{r}_2} \delta_{\hat{r}_1}^{\hat{s}_1} \delta_{\hat{t}_2}^{\hat{t}_2}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

причем δ с соответствующими индексами означает символы Кронекера. Заметим, что каждая пара $(r_1, r_2) \{(\hat{r}_1, \hat{r}_2)\}$ в определителе $E\{E\}$ в (1.8) указывает на номер соответствующей строки квадратной матрицы этого определителя порядка $p(m-p) \{q(n-m-q)\}$, а каждая пара $(s_1, s_2) \{(\hat{s}_1, \hat{s}_2)\}$ – на номер соответствующего столбца.

Покажем, что в общем случае на m -поверхности S_m каждый из определителей E и $\tilde{E}$ не равен нулю. Для определенности покажем это, например, для определителя E . С этой целью положим

$$A_{r_1 s_1} = 0, A_{r_2 s_2} = 0, (r_1 \neq s_1, r_2 \neq s_2). \quad (1.10)$$

Тогда из (1.8) и (1.9) получаем

$$E = \prod_{(r_1 \neq s_1, r_2 \neq s_2)} (A_{r_1 r_1} - A_{s_1 s_1})(A_{r_2 r_2} - A_{s_2 s_2}), \quad (1.11)$$

где символ $\prod$ означает произведение соответствующих величин. Из (1.11) следует, что $E \neq 0$ в общем случае на m -поверхности S_m .

Заметим с учетом (1.6), что величины $A_{\alpha\beta}$ выражаются через

$$N = (n-m) \frac{m(m+1)}{2} \quad (1.12)$$

независимых величин $A_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}(\alpha, \beta = \overline{1, m}; \hat{\alpha} = \overline{m+1, n})$, симметричных с учетом [1, (1.5)] по нижним индексам. Из (1.10) и (1.8) следует, что величины $A_{\alpha\beta}$ удовлетворяют

$$N_1 = (n-m)(m-p) + p^2 \quad (1.13)$$

соотношениям. Из [1, (1.7)] следует, что $N_1 < N$. Поэтому вычисление определителя E в точке $A \in S_m$ при частных значениях (1.10) оправдано. Таким образом, $E \neq 0$ в общем случае на m -поверхности $S_m \subset E_n$. Аналогично показывается, что и определитель $\tilde{E} \neq 0$ в общем случае на m -поверхности S_m общего вида. Заметим также, что с учетом (1.2), (1.6), $2 \leq p < m$, $m+2 \leq q < n$, (1.12) и (1.13) соотношения (1.8) накладывают на величины $A_{\alpha\beta}^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ всего

$$N_2 = p(m-p) + q(n-q)$$

соотношений. Из [1, (1.7), (2.16)] замечаем, что $N_2 < N$. Поэтому соотношения (1.8) на m -поверхности S_m , с помощью которых проводится соответствующая канонизация ортонормального репера R , могут иметь место.

Соотношения (1.8) с учетом (1.9), (1.7) и (1.3) приводят к следующим дифференциальным уравнениям на m -поверхности $S_m \subset E_n$:

$$\begin{aligned} E_{r_1 r_2 s_1}^{t_2} \omega_{t_2}^{s_1} &= A_{r_1 r_2 \alpha} \omega^\alpha, \\ E_{r_1 r_2 s_1}^{\hat{t}_2} \omega_{\hat{t}_2}^{\hat{s}_1} &= A_{r_1 r_2 \alpha} \omega^\alpha. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Каждая из систем дифференциальных уравнений в (1.14) представляет собой систему линейных уравнений относительно соответствующих 1-форм с неравным нулю определителем E или $\tilde{E}$ на $S_m \subset E_n$. Поэтому каждую из этих систем можно однозначно разрешить относительно 1-форм $\omega_{t_2}^{s_1} = -\omega_{s_1}^{t_2}$ и $\omega_{\hat{t}_2}^{\hat{s}_1} = -\omega_{\hat{s}_1}^{\hat{t}_2}$. Это означает, что эти 1-формы являются главными, выражающимися через базисные формы:

$$\omega_{s_1}^{t_2} = -\omega_{t_2}^{s_1} = A_{s_1 \alpha}^{t_2} \omega^\alpha, \omega_{\hat{s}_1}^{\hat{t}_2} = -\omega_{\hat{t}_2}^{\hat{s}_1} = A_{\hat{s}_1 \alpha}^{\hat{t}_2} \omega^\alpha, \quad (1.15)$$

где с учетом [1, (1.1)] коэффициенты при ω^α удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} dA_{s_1 \beta}^{t_2} - A_{s_1 \alpha}^{t_2} \omega_\beta^\alpha - A_{t_1 \alpha}^{t_2} \omega_{s_1}^{\hat{t}_1} + A_{s_1 \beta}^{s_2} \omega_{s_2}^{t_2} &= A_{s_1 \beta \alpha}^{t_2} \omega^\alpha, \\ dA_{\hat{s}_1 \beta}^{\hat{t}_2} - A_{\hat{s}_1 \alpha}^{\hat{t}_2} \omega_\beta^\alpha - A_{\hat{t}_1 \alpha}^{\hat{t}_2} \omega_{\hat{s}_1}^{\hat{t}_1} + A_{\hat{s}_1 \beta}^{\hat{s}_2} \omega_{\hat{s}_2}^{\hat{t}_2} &= A_{\hat{s}_1 \beta \alpha}^{\hat{t}_2} \omega^\alpha, \end{aligned}$$

причем явный вид величин $A_{s_1 \alpha \beta}^{t_2}$ и $A_{\hat{s}_1 \alpha \beta}^{\hat{t}_2}$ для нас несущественный.

Замечание 1.2. Из (1.15) замечаем, что канонизация ортонормального репера R на m -поверхности $S_m \subset E_n$ по формулам (1.8) существует на этой m -поверхности в соответствии с леммой Н.М. Остиану [4]. Из (1.5), (1.1) с учетом (1.8) следует, что указанная канонизация репера R геометрически характеризуется следующим образом:

1) линейные подпространства в точке $A \in S_m \subset E_n$:

$$\tilde{L}_p = (\bar{A}, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_p), \tilde{L}_{m-p} = (\bar{A}, \bar{e}_{p+1}, \dots, \bar{e}_m) \quad (1.16)$$

в слое L_m расслоения $T_{m,m}$ выбирается так, что они ортогональны и сопряжены относительно конуса $Q_{m-1} \subset L_m$, см. (1.5);

2) линейные подпространства в точке $A \in S_m \subset E_n$:

$$\tilde{P}_q^1 = (\bar{A}, \bar{e}_{m+1}, \dots, \bar{e}_q), \tilde{P}_{n-m-q}^2 = (\bar{A}, \bar{e}_{q+1}, \dots, \bar{e}_n) \quad (1.17)$$

в слое P_{n-m} расслоения $N_{m,n-m}$ выбираются так, что они ортогональны и сопряжены относительно конуса $K_{n-m}^2 \subset P_{n-m}$, см. (1.4).

Замечание 1.3. Двумерные площадки $L_2 \subset L_m$ и $P_2^1 \subset P_{n-m}$ в точке $A \in S_m \subset E_n$ будут инвариантным образом определяться в следующем пункте в подпространствах $L_p \subset L_m$ и $P_q^1 \subset P_{n-m}$ соответственно (см. (1.16) и (1.17)), при p и q , принимающих следующие значения: $p=3, p=4, q=2$.

2. Случай $p=3, p=4, q=2$

Во всех этих случаях плоскость P_2^1 , совпадает с плоскостью $\tilde{P}_2^1 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$, что с учетом [1, (2.1)] и (1.17) возможно тогда и только тогда, когда

$$g_{\hat{a}_1}^{\hat{a}_2} = -g_{\hat{a}_2}^{\hat{a}_1} = 0.$$

Таким образом, в рассматриваемых случаях

$$\begin{aligned} P_2^1 &= \tilde{P}_2^1 = (\bar{A}, \bar{e}_{m+1}, \bar{e}_{m+2}), \\ \tilde{P}_{n-m-2}^2 &= P_{n-m-2}^2 = (\bar{A}, \bar{e}_{m+3}, \dots, \bar{e}_n), \end{aligned}$$

причем в силу (1.1) и [1, (2.10)] имеем

$$\begin{aligned} C_{b_1 c_1}^{\hat{a}_1} &= B_{b_1 c_1}^{\hat{a}_1} = A_{b_1 c_1}^{\hat{a}_1} + A_{b_1 b_2}^{\hat{a}_1} h_{c_1}^{b_2} + A_{b_2 c_1}^{\hat{a}_1} h_{b_1}^{b_2} + A_{b_1 c_2}^{\hat{a}_1} h_{b_1}^{b_2} h_{c_1}^{c_2} = C_{c_1 b_1}^{\hat{a}_1}, \\ (a_1, b_1, c_1 &= 1, 2; \hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{c}_1 = m+1, m+2; \hat{a}_2, \hat{b}_2, \hat{c}_2 = \overline{3, m}). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Заметим, что в каждом из рассматриваемых случаев величины $h_{c_1}^{\hat{c}_2}$ считаются неизвестными и будут определенным образом определяться через компоненты геометрического объекта [1, (1.5)].

2.1. Случай $p=3, q=2$

В данном случае с учетом (1.16) имеем

$$\tilde{L}_3 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3), \tilde{L}_{m-3} = (\bar{A}, \bar{e}_4, \dots, \bar{e}_m), \quad (2.2)$$

поэтому здесь предполагается, что $m \geq 3$. Заметим, что в рассматриваемый случай входит 3-поверхность S_3 в E_5 .

Поскольку плоскость L_2^1 вида [1, (2.1)] в каждой точке $A \in S_m \subset E_n$ принадлежит 3-плоскости $\tilde{L}_3^1$, мы будем искать L_2^1 инвариантным образом в этой 3-плоскости. Поэтому в силу [1, (2.1), (2.4)] и (2.2) заключаем, что

$$h_{a_1}^{r_2} = 0, \quad (r_2 = \overline{4, m}), \quad (2.3)$$

причем

$$L_{m-2}^2 = \tilde{L}_{m-3}^2 \cup L_1,$$

где прямая $L_1 = (\bar{A}, \bar{e}_3)$, $\bar{e}_3 = \bar{e}_3 + h_{a_1}^{a_3} \bar{e}_{a_1}$, $h_{a_1}^{a_3} = -h_{a_1}^{a_3}$ ортогональна плоскости $L_2^1 \subset \tilde{L}_3^1$ в точке $A \in S_m$. Из (2.3) заключаем, что в рассматриваемом случае всего неизвестных величин $h_{a_1}^{a_i}$ в точке $A \in S_m$ будет две: $h_{a_1}^{a_3} = -h_{a_1}^{a_3}$ ($a_1=1, 2$). Эти величины будем искать при условии, что отображение $f: L_2^1 \rightarrow P_2^1$ в каждой точке $A \in S_m \subset E_n$ является отображением f_* в смысле определения 2.1 в [1]. Из [1, (2.16)] с учетом (2.1) и (2.3) получаем, что искомые величины удовлетворяют следующим двум неоднородным квадратичным уравнениям:

$$\varphi^{a_1} \equiv (A_{11}^{a_1} + A_{22}^{a_1}) + 2A_{13}^{a_1} h_1^{a_3} + 2A_{23}^{a_1} h_2^{a_3} + A_{33}^{a_1} \{(h_1^{a_3})^2 + (h_2^{a_3})^2\} = 0 \quad (2.4)$$

с двумя неизвестными $h_{a_1}^{b_1} = -h_{a_1}^{b_1}$ ($a_1, b_1=1, 2$).

Рассмотрим якобиеву матрицу системы (2.4):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi^{a_1}}{\partial h_{a_1}^{b_1}} \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

где

$$\frac{\partial \varphi^{a_1}}{\partial h_{a_1}^{b_1}} = 2A_{13}^{a_1} h_1^{b_3} + 2A_{23}^{a_1} h_2^{b_3}. \quad (2.6)$$

Подсчитаем ранг матрицы (2.5), например, при значениях $h_{a_1}^{b_1} = 0$. Тогда из системы (2.4) получаем

$$A_{11}^{a_1} + A_{22}^{a_1} = 0, \quad (2.7)$$

а из (2.5) с учетом (2.6) замечаем, что указанная якобиева матрица имеет минор второго порядка

$$\Pi_2 \equiv \begin{vmatrix} A_{13}^{m+1} & A_{23}^{m+1} \\ A_{13}^{m+2} & A_{23}^{m+2} \end{vmatrix},$$

который, как легко видеть, в общем случае не равен нулю на m -поверхности $S_m \subset E_n$ ($m \geq 3$). Поэтому в общем случае на S_m ранг матрицы (2.5) равен 2, а потому система (2.4) в каждой точке $A \in S_m \subset E_n$ имеет в общем случае конечное число (не более 4) решений относительно $h_{a_1}^{b_1}$. Поэтому справедлива

Теорема 2.1. В случае $q=2$, $p=3$ в плоскости $\tilde{L}_3^1$, проходящей через точку $A \in S_m \subset E_n$ ($m \geq 3$), имеется конечное число (не более 4) плоскостей L_2^1 таких, что соответствующее отображение $f: L_2^1 \rightarrow P_2^1$ является отображением f_* в смысле определения 2.1 в [1].

Замечание 2.1. Соотношения (2.7) с учетом $\Pi_2 \neq 0$ обеспечивают канонизацию ортонормального репера R m -поверхности $S_m \subset E_n$, при которой плоскость $L_2^1 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ удовлетворяет утверждению теоремы 2.1. При такой канонизации репера R , как

следует из (2.7) и [1, (1.5)] с учетом $\Pi_2 \neq 0$, 1-формы $\omega_{a_1}^3$ становятся главными в каждой точке $A \in S_m \subset E_n$. Поэтому эта канонизация репера R существует в силу леммы Н.М. Остиану [4].

2.2. Случай $p=4$, $q=2$

В данном случае с учетом (1.16) имеем

$$\tilde{L}_4^1 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4), \quad \tilde{L}_{m-4}^2 = (\bar{A}, \bar{e}_5, \dots, \bar{e}_m). \quad (2.8)$$

Поэтому здесь предполагаем, что $m \geq 4$. Заметим, что в рассматриваемый случай входит 4-поверхность S_4 в E_6 .

Поскольку плоскость L_2^1 вида [1, (2.1)] в каждой точке $A \in S_m \subset E_n$ входит в 4-плоскость $\tilde{L}_4^1$, мы будем искать L_2^1 инвариантным образом в $\tilde{L}_4^1$. Поэтому в силу [1, (2.1)], (2.2) и (2.8) заключаем, что

$$h_{a_1}^{r_2} = 0, \quad (r_2 = 5, \dots, m), \quad (2.9)$$

причем

$$L_{m-2}^2 = \tilde{L}_{m-4}^2 \cup L_2^2,$$

где плоскость $L_2^2 = (\bar{A}, \bar{e}_3, \bar{e}_4)$, $\bar{e}_3 = \bar{e}_3 + h_{a_1}^{a_3} \bar{e}_{a_1}$, $h_{a_1}^{a_3} = -h_{a_1}^{a_3}$ ортогональна плоскости $L_2^1 \subset \tilde{L}_4^1$ в точке $A \in S_m$. Из (2.9) следует, что в рассматриваемом случае всего неизвестных величин $h_{a_1}^{a_i}$ ($a_1=1, 2$; $a_2=3, 4$) в точке $A \in S_m$ будет четыре: $h_{a_1}^{a_2} = -h_{a_1}^{a_2}$. Эти величины будем искать при условии, что отображение $f: L_2^1 \rightarrow P_2^1$ в каждой точке $A \in S_m \subset E_n$ является отображением f_* в смысле определения 2.1 в [1]. Из [1, (2.16)] с учетом (2.1) и (2.9) получаем, что величины $h_{a_1}^{a_2}$ удовлетворяют следующим четырем квадратичным уравнениям:

$$\begin{aligned} \varphi^1 &\equiv B_{11}^{m+1} + B_{22}^{m+1} = 0, \quad \varphi^2 \equiv B_{11}^{m+2} + B_{22}^{m+2} = 0, \\ \varphi^3 &\equiv B_{12}^{m+1} - B_{22}^{m+2} = 0, \quad \varphi^4 \equiv B_{12}^{m+2} - B_{22}^{m+1} = 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где величины $B_{b_1 c_1}^{a_1}$ ($a_1=m+1, m+2$; $b_1, c_1=1, 2$) определяются по формулам (2.1).

Рассмотрим якобиеву матрицу системы (2.10)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi^{a_1}}{\partial h_{a_1}^{b_1}} \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

($r_1=\overline{1, 4}$; $a_1=1, 2$; $a_2=3, 4$). Подсчитывая ранг этой системы с учетом (2.10) и (2.1), например, при

$$h_{a_1}^{a_2} = -h_{a_1}^{a_2} = 0,$$

в результате чего имеем

$$A_{11}^{a_1} + A_{22}^{a_1} = 0, \quad A_{12}^{m+1} - A_{22}^{m+2} = 0, \quad A_{12}^{m+2} + A_{22}^{m+1} = 0, \quad (2.12)$$

мы убеждаемся в том, что матрица (2.11) имеет в общем случае не равный нулю минор четвертого порядка на S_m :

$$\Pi_4 = \begin{vmatrix} A_{13}^{m+1} & A_{14}^{m+1} & A_{23}^{m+1} & A_{24}^{m+1} \\ A_{13}^{m+2} & A_{14}^{m+2} & A_{23}^{m+2} & A_{24}^{m+2} \\ A_{23}^{m+1} & A_{24}^{m+1} & A_{13}^{m+1} - 2A_{23}^{m+2} & A_{14}^{m+1} - 2A_{24}^{m+2} \\ A_{23}^{m+2} & A_{24}^{m+2} & A_{13}^{m+2} - 2A_{23}^{m+1} & A_{14}^{m+2} + 2A_{24}^{m+1} \end{vmatrix}. \quad (2.13)$$

Поэтому ранг матрицы (2.11) в общем случае равен 4, а поэтому система (2.10) в общем случае

имеет конечное число решений относительно $h_{a_1}^{a_2}$ на S_m . Следовательно справедлива

Теорема 2.2. В случае $p=4$, $q=2$ в 4-плоскости $\tilde{L}_4^1$ в каждой точке $A \in S_m \subset E_n$ ($m \geq 4$) имеется конечное число плоскостей L_2^1 таких, что соответствующее отображение $f: L_2^1 \rightarrow P_2^1$ является отображением f_a в смысле определения 2.1 в [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барышева В.К., Ивлев Е.Т. Отображение двумерных площадок касательного и нормального расслоений многомерной поверхности в евклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. — 2004. — Т. 307. — № 2. — С. 6–8.
2. Ивлев Е.Т. Об одной классификации оснащенных многомерных поверхностей проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Выпуск 22. — Межев. темат. сб. научных трудов, Калининградский университет, Калининград, 1991. — С. 49–56.

Замечание 2.2. Соотношения (2.12) с учетом $\Pi_4 \neq 0$, см. (2.13), обеспечивают канонизацию ортонормального репера R m -поверхности $S_m \subset E_n$, при которой плоскость $L_2^1 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2) \perp L_2^3 = (\bar{A}, \bar{e}_3, \bar{e}_4)$ удовлетворяет утверждению теоремы 2.2. При такой канонизации репера R , как следует из (2.12) и [1, (1.5)] с учетом $\Pi_4 \neq 0$, 1-формы $\omega_{a_1}^{a_2}$ становятся главными в каждой точке $A \in S_m \subset E_n$. Поэтому эта канонизация репера R существует в силу леммы Н.М. Остиану [4].

3. Ивлев Е.Т., Тиртый-оол, Бразевич М.В. О некоторых геометрических образах многообразия пар двойственных линейных подпространств в многомерном проективном пространстве // Математический сборник. Выпуск 1. Изд-во Томского университета. Томск. — 1974. — С. 68–91.
4. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RNR). — 1962. — № 2. — Р. 231–240.

УДК 514.76

КАНОНИЧЕСКИЙ РЕПЕР ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СЕМЕЙСТВА ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ПЯТИМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.А. Молдованова

Томский политехнический университет
E-mail: eam@front.ru

Изучается одномерное семейство двумерных плоскостей в эквиаффинном пространстве. Всем элементам построенного канонического репера даётся полная аналитическая и геометрическая интерпретация. Кроме того, в статье найдено инвариантное оснащение данного семейства. Все рассуждения носят локальный характер.

Основные обозначения и терминология соответствуют принятым в [1–6], а все функции, встречающиеся в данной статье, предполагаются аналитическими.

Рассмотрим пятимерное эквиаффинное пространство A_5 , отнесенное к эквиаффинному подвижному реперу $R = \{\bar{A}, \bar{e}_i\}$, ($i = \overline{1,5}$) с деривационными формулами:

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i, \quad d\bar{e}_i = \omega_j^i \bar{e}_j, \quad (1)$$

где ω^i , ω_j^i – формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры аффинного пространства

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i, \quad (i, j, k = \overline{1,5}), \quad (2)$$

и соотношению $\omega_1^1 + \omega_2^2 + \dots + \omega_5^5 = 0$, вытекающему из условия эквиаффинности $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5) = 1$.

В пространстве A_5 рассматривается одномерное семейство S_1 двумерных плоскостей l_2 . Присоединим к S_1 репер R так, что $l_2 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$. Здесь и в дальнейшем символом $l_s = (\bar{A}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_s)$ обозначается s -плоскость (s -мерная плоскость), проходящая через точку A , параллельно линейно независимым

векторам $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_s$. Тогда дифференциальные уравнения многообразия S_1 можно записать в следующем параметрическом виде:

$$\omega^{\hat{\alpha}} = A_1^{\hat{\alpha}} \theta^1, \quad \omega_{\alpha}^{\hat{\alpha}} = A_{\alpha 1}^{\hat{\alpha}} \theta^1, \quad (\alpha = 1, 2; \hat{\alpha} = \overline{3,5}). \quad (3)$$

где величины $A_1^{\hat{\alpha}}$ и $A_{\alpha 1}^{\hat{\alpha}}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} dA_1^{\hat{\alpha}} - A_1^{\hat{\alpha}} \theta^1 - A_{\alpha 1}^{\hat{\alpha}} \omega^{\alpha} + A_1^{\hat{\beta}} \omega_{\beta}^{\hat{\alpha}} &= B_{11}^{\hat{\alpha}} \theta^1, \\ dA_{\alpha 1}^{\hat{\alpha}} - A_{\alpha 1}^{\hat{\alpha}} \theta^1 - A_{\beta 1}^{\hat{\alpha}} \omega_{\alpha}^{\beta} + A_{\alpha 1}^{\hat{\beta}} \omega_{\beta}^{\hat{\alpha}} &= B_{\alpha 1}^{\hat{\alpha}} \theta^1, \end{aligned} \quad (4)$$

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta} = \overline{3,5}; \alpha, \beta = \overline{1,2}).$$

Кроме того, параметрическая форма θ^1 удовлетворяет квадратичному дифференциальному уравнению

$$D\theta^1 = \theta_1^1 \wedge \theta^1. \quad (5)$$

Каждой точке $B(u)$ в A_5 поставим в соответствие гиперплоскость l_4 , проходящую через $l_2 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$:

$$l_4 : x^3 x_3 + x^4 x_4 + x^5 x_5 = 0. \quad (6)$$

Используя (1), (2) и (4), получаем $d[\bar{e}_1, \bar{e}_2] = (\omega_1^1 + \omega_2^2) \cdot [\bar{e}_1, \bar{e}_2] + (A_{11}^{\hat{\alpha}} [\bar{e}_1, \bar{e}_2] + A_{21}^{\hat{\alpha}} [\bar{e}_1, \bar{e}_2]) \cdot \theta^1$. Следова-