

## ВВЕДЕНИЕ

Среди многочисленных типов ускорителей заряженных частиц, применяемых в научных и практических целях, бетатрон – индукционный ускоритель электронов – занимает особое место. Другие ускорители по принципу действия – резонансные (движение частиц и воздействие на них ускоряющего электрического поля строго синхронизированы). В бетатроне для ускорения электронов по круговой орбите используют электрическое поле, индуцируемое изменяющимся во времени магнитным потоком. Это поле воздействует на ускоряемый электрон непрерывно в течение всего времени ускорения. Поэтому бетатрон выделяют в отдельный класс – индукционные ускорители, где он единственный успешно действующий ускоритель. [22]

В практике бетатростроения формирование управляющего магнитного поля осуществляется двумя способами. В классических бетатронах необходимое распределение магнитного поля по радиусу задается углом наклона профилирующих участков полюсов электромагнита, а в безжелезных бетатронах – путем геометрического перераспределения витков возбуждающей обмотки в радиальном направлении. В данном случае управляющее электромагнитное поле формируется и возбуждается одновитковой обмоткой, выполненной в виде двух концентрических расположенных колец. В совокупности с изоляционным уплотнителем эти кольца выполняют функцию ускорительной камеры.

**Актуальность работы** заключается в замене сложного в использовании и хранении радиоизотопного источника индукционным ускорителем электронов. В настоящее время является значимой технической потребностью в разработке малогабаритных (малого размера, веса) излучающих устройств – ускорителей электронов на энергию 2-3МэВ с минимальной массой затрачиваемых материалов – в данной модели отсутствует железо.

**Объектом исследования** является взаимодействие электронных пучков с электромагнитными полями: вихревыми ускоряющими и фокусирующими

(слабая фокусировка).

**Предмет исследования** – магнитное поле, создаваемое токами, протекающими по системе медных колец.

**Целью** работы является выбор максимального рабочего пространства для электронов, устойчиво двигающихся по замкнутым орбитам посредством выбора кривизны медных колец, их диаметра, и величины токов, протекающих по ним. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

- Изучить принцип работы индукционного ускорителя электронов;
- Ознакомиться с графическим интерфейсом пользователя (GUI) COMSOL Multiphysics 5.1;
- Смоделировать компактный источник релятивистских электронов в среде COMSOL;
- Рассчитать характеристики магнитного поля бетатрона (магнитная индукция, плотность тока);
- Получить траекторию частиц, введенных в окрестность равновесной орбиты для ускорения.

**Научная новизна** заключается в оптимизации соотношения размеров бетатрона, кривизны профиля медных колец и энергии электронов с целью выполнения соотношения Видероз. [22]

### **Практическая значимость результатов ВКР**

Данную модель следует отнести к такой отрасли, как приборостроение, в частности, модель представляет интерес для разработчиков бетатронов. Индукционные ускорители находят широкое применение в дефектоскопии различных изделий и материалов.

### **Реализация и апробация работы**

Результатом работы является математическая модель, реализованная в среде COMSOL Multiphysics для системы металлических колец с азимутальными токами посредством выбора кривизны медных колец, их диаметра, и величины токов, протекающих по ним.

Результаты по теме ВКР были представлены на XIII Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Технологии Microsoft в теории и практике программирования».

## Обзор литературы

В настоящее время качество выпускаемой продукции играет важную роль в машиностроении, а также в производстве материалов и изделий. Поэтому, такие источники излучения, как бетатроны, находят широкое применение в различных сферах деятельности: дефектоскопия и интроскопия в промышленности, оценка злокачественных новообразований в медицине, а также анализ химических элементов в химии. К концу минувшего столетия бетатроны были заменены линейными ускорителями, имеющими более высокую, по сравнению с бетатроном, степень излучения. Однако с помощью дальнейших исследований в области бетатроностроения устройство значительно изменилось: средняя интенсивность излучения увеличилась, уменьшились габариты и масса и т.д. [22]

В связи с усовершенствованиями, нашли широкое применение малогабаритные бетатроны, производство которых осуществляется в Политехническом университете города Томска.

Особенно востребованными являются бетатроны на небольшие энергии, с возможностью их использования в медицине, т.к. на их основе могут быть созданы эффективные генераторы излучения.

## 1 ОПИСАНИЕ МОДЕЛИРУЕМОГО ОБЪЕКТА

Рассматривается вариант бетатрона, в котором управляющее электромагнитное поле формируется и возбуждается одновитковой обмоткой, выполненной в виде двух concentric rings, которые выполняют функцию ускорительной камеры. [24]

Схема формирования и возбуждения управляющего поля бетатрона представлена на рисунке 1.

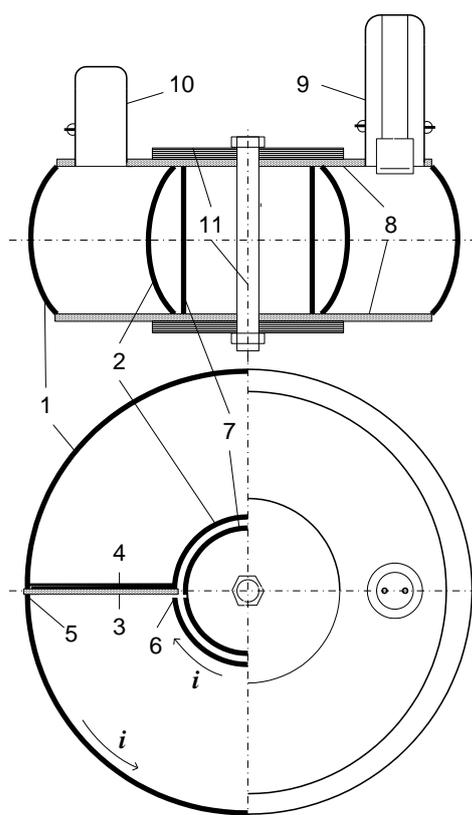


Рисунок 1 – Схема формирования и возбуждения управляющего поля бетатрона

Для формирования управляющего магнитного поля используется одновитковая обмотка, выполненная в виде двух concentric rings 1 и 2, выполненных из проводящего материала. Кольца имеют радиальный разрез 3. В месте разреза обмотки 1 и 2 с одной стороны соединены между собой электрической перемычкой 4. Электрический ток подается на одновитковую обмотку в точках разрыва цепи 5 и 6. Электрический ток  $i$  протекает по кольцам 1 и 2 в противоположных направлениях и в пространстве между ними

возникает переменное магнитное поле. Для придания магнитному полю фокусирующих свойств (создания “бочкообразной” формы силовым линиям) поверхностям цилиндров придается выгнутая форма выпуклостью наружу от оси колец. Таким образом, в пространстве, охватываемом одновитковой обмоткой, создается управляющее магнитное поле, которое обладает фокусирующими свойствами. Также необходимо отметить, что данный вариант бетатрона отличается от устройств подобного типа сравнительно малыми размерами и отсутствием железа в составе устройства.[24]

Для выполнения бетатронного соотношения 2:1 (для движения электронов по замкнутой орбите постоянного радиуса напряженность магнитного поля должна быть вдвое меньше средней напряженности поля в круге этой орбиты), внутри кольца 2 расположен индуктор 7, выполненный в виде соленоида. Синхронизация электромагнитных полей, создаваемых одновитковой обмоткой 1 и 2 и индуктором 7 обеспечивает индукционное ускорение электронов до заданной энергии.

В настоящее время под ускорением электронов в бетатроне понимается ряд процессов, наблюдающихся в продолжение всего цикла ускорения.

Основным процессом является захват электронов и ускорение, т.е. процесс введения электронов на равновесную орбиту и формирование на этой орбите сфокусированного пучка ускоряемых электронов. В вакуумную камеру с помощью инжектора (электронная пушка) в начале каждого периода нарастания магнитного поля впрыскиваются электроны, которые увлекаются вихревым электрическим полем в процесс ускорения по круговой орбите. В момент, когда магнитное поле достигает максимального значения, процесс ускорения электронов прекращается и сменяется их замедлением, так как вихревое поле меняет направление, а электродвижущая сила индукции – знак.

Электроны, достигшие наибольшей энергии, смещаются с равновесной орбиты и либо выводятся из камеры, либо направляются на специальную мишень внутри камеры, называемую тормозной. Торможение электронов в этой мишени в кулоновском поле ядер и электронов приводит к возникновению

электромагнитного тормозного излучения, максимальная энергия которого равна кинетической энергии электронов в конце ускорения. Здесь приходится иметь дело с разработкой таких условий и методов, которые гарантировали бы смещение пучка электронов с равновесной орбиты без значительной его расфокусировки и обеспечивали бы вывод из камеры наибольшего числа ускоренных электронов. [23]

## 2 КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Движение электронов в индукционном ускорителе в процессе ускорения определяется параметрами магнитного поля бетатрона. Сила, действующая на электрон в электромагнитном поле, определяется по формуле

$$F = eE + evH/c. \quad (2.1)$$

Это уравнение учитывает силу магнитного поля с напряженностью  $H$ , действующей на электрон, движущийся в этом поле со скоростью  $v$ , а также силу воздействия на этот электрон электрического поля с напряженностью  $E$ . Величины  $e$  и  $c$  – соответственно заряд электрона и скорость света в вакууме. [22]

В общем случае напряженность электрического поля является суммой напряженностей электрических полей, образованных как свободными стационарными зарядами, так и изменением магнитного поля во времени. При рассмотрении движения одиночного электрона предполагается, что в объеме, в котором происходит ускорение, не имеет никаких других зарядов, кроме ускоряемого электрона, или что создаваемое имеющимися зарядами поле настолько мало, что его влиянием можно пренебречь. Таким образом, при движении в бетатроне одиночного электрона  $E$  представляет собой напряженность вихревого электрического поля.

Как известно, при отсутствии ускоряющего электрического поля  $E$ , траектория движения электрона в произвольном магнитном поле представляет собой кривую с переменным радиусом.

Траектория движения электрона имеет наиболее простой вид при его движении в однородном магнитном поле, т.е. в поле, имеющем одинаковую величину в любой точке движения электрона. В зависимости от величины напряженности магнитного поля  $H$  и скорости электрона  $v$  его траектория будет иметь вид окружности большего или меньшего радиуса. Форма траектории движения электрона в виде окружности позволяет осуществить наиболее простую конструкцию ускорительной камеры, поэтому для управления

движением электрона целесообразно применить магнитное поле, имеющее аксиальную симметрию

$$B_r = 0; \partial B_z / \partial r = 0.$$

Если это поле изменяется во времени, то силовые линии индуцированного им вихревого электрического поля представляет собой концентрические окружности, ось которых совпадает с осью симметрии магнитного поля. При совпадении траектории движения электрона с одной из силовых линий электрического поля требуется магнитное поле, возрастающее синхронно с сродом энергии электрона и обладающее осевой симметрией.

Таким образом, начальные требования, накладываемые на магнитное поле бетатрона, сводятся к следующему: во-первых, это поле должно быть переменным во времени, и, во-вторых, оно должно обладать осевой симметрией.

Для магнитного поля с осевой симметрией лучше всего использовать цилиндрическую систему координат. Ось  $z$  принятой системы координат совпадает с осью симметрии магнитного поля, а движение электрона находится в плоскости  $r\theta$ , проходящей через начало координат ( $z = 0$ ) при отсутствии других стационарных или нестационарных зарядов. Запишем составляющие магнитного поля:

$$\left. \begin{aligned} H_\theta = 0, E_r = 0; \\ H_r = (-r/2)\partial H_z / \partial z_0, E_z = 0; \\ H_z = \bar{H}_z + (r/2)\partial \bar{H}_z / \partial r, E_\theta = (-r/2c)\partial \bar{H}_z / \partial t; \\ \bar{H}_z / \partial r = \bar{H}_r / \partial z. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Здесь  $\bar{H}_z = \frac{2}{r^2} \int_0^r r H_z dr = \frac{\bar{B}_z}{\mu} = \frac{\Phi}{\pi r^2}$  – среднее значение напряженности

магнитного поля в круге радиуса  $r$ , соответствующее средней плотности  $\bar{B}_z$  магнитного потока  $\Phi$  в этом круге,  $\mu$  – магнитная проницаемость вакуума. [22]

Уравнение движения электрона в направлении  $\theta$  можно записать в виде (с учетом (2.2.))

$$(d/dt)(mv_{\theta}r) = er[E + \frac{1}{c}(v_z H_r - v_r H_z)]. \quad (2.3)$$

В этом уравнении  $m$  – масса электрона, которую будем считать релятивистской, связанной с массой покоя электрона  $m_0$  соотношением

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}},$$

а  $v_{\theta} = r \frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta}$ ,  $v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$ ,  $v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}$  – проекции скорости электрона  $v$  на соответствующие оси координат.

Проекция силы, действующей на электрон в направлении  $\theta$ , имеет три составляющие, одна из которых ( $eE$ ) обуславливается вихревым электрически полем, а вторая и третья ( $e \frac{v_z H_r}{c}$  и  $e \frac{v_r H_z}{c}$ ) зависят от наличия магнитного поля и появляются только при отклонении электрона от круговой траектории в направлениях  $r$  или  $z$ .

Величина напряженности электрического поля  $E$  для силовой линии радиуса  $r$  определяется скоростью изменения магнитного поля во времени внутри этой окружности:

$$E = -\frac{r}{2c} \frac{\partial \bar{H}_z}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Составляющие магнитного поля  $H_r$  и  $H_z$  выражаются через величину средней напряженности  $\bar{H}_z$ :

$$\text{div}H = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rH_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial H_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (2.5)$$

откуда

$$H_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial \bar{H}_z}{\partial z}; \quad H_z = \bar{H}_z + \frac{r}{2} \frac{\partial \bar{H}_z}{\partial r}. \quad (2.6)$$

С учетом выражений (2.3) и (2.6) уравнение (2.4) можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = r \frac{e}{c} \left[ \frac{r}{2} \frac{d\bar{H}_z}{dt} + z \frac{r}{2} \frac{d\bar{H}_z}{dt} + r \left( \bar{H}_z + \frac{r}{2} \frac{d\bar{H}_z}{dt} \right) \right]. \quad (2.7)$$

Правая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал по времени от  $r^2\bar{H}_z$ . В результате уравнение движения электрона в направлении  $\theta$  запишется в виде:

$$mv_{\theta} - \frac{e}{2c} r^2 \bar{H}_z = C_1. \quad (2.8)$$

Постоянная интегрирования  $C_1$  представляет собой разность между моментом количества движения электрона при его движении по орбите  $r$  и моментом количества движения, сообщаемого электрону ускоряющим электрическим полем. При  $C_1 > 0$  траектория электрона имеет вид свертывающейся спирали, а при  $C_1 < 0$  – развертывающейся. При  $C_1 = 0$  радиус орбита электрона будет оставаться постоянной. [23]

Величина тангенциальной скорости электрона определяется из выражения (2.8):

$$v_{\theta} = \frac{e}{2c} \left[ \frac{r^2 \bar{H}_z + C_1}{\frac{2}{r}} \right]. \quad (2.9)$$

Кинетическая энергия электрона с учетом выражения (2.9) определяется соотношением

$$W = \frac{mv^2}{2} = \frac{e^2}{2mc^2} \left( \frac{r^2 \bar{H}_z + C_1}{\frac{2}{r}} \right)^2. \quad (2.10)$$

Если считать, что движение ускоряемого в бетатроне электрона происходит по окружности, то тангенциальная составляющая скорость электрона  $v_{\theta}$  равна полной скорости электрона  $v$ . Принимая это допущение, запишем функцию движения электрона в бетатроне:

$$V_M = \frac{e^2}{2mc^2 \left[ \frac{\frac{r^2 \bar{H}_z + C_1}{2}}{r} \right]}. \quad (2.11)$$

Проекции силы потенциального поля на координатные оси равны частным производным от потенциальной энергии по соответствующим координатам, взятым с обратным знаком, т.е.

$$F_r = -\frac{\partial V_M}{\partial r} = \frac{d}{dt}(mr) = -\frac{e^2}{2mc^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\frac{r^2 \bar{H}_z + C_1}{2}}{r} \right]^2, \quad (2.12)$$

$$F_z = -\frac{\partial V_M}{\partial z} = \frac{d}{dt}(mz) = -\frac{e^2}{2mc^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\frac{r^2 \bar{H}_z + C_1}{2}}{r} \right]^2. \quad (2.13)$$

Уравнения (2.12) и (2.13) позволяют проанализировать движение электронов в бетатроне и определить условия, которым должно удовлетворять электромагнитное поле для осуществления устойчивого движения электрона в продолжение всего цикла ускорения. [23]

При расчете и конструировании современных бетатронов особое внимание уделяют увеличению числа ускоряемых электронов и соответствующему повышению интенсивности тормозного излучения.

Поэтому необходимо получить наиболее «емкое» магнитное поле, способное удержать на орбите максимальный электронный заряд и учитывать собственное магнитное поле пучка.

Область фокусирующих сил магнитного поля бетатрона определяет количество электронов, которое можно захватить в ускорение при заданных условиях инжекции. Фокусирующие свойства поля оценивают исследованием показателя спадания поля  $n$  в разных точках рабочего зазора бетатрона.

Однако распределение  $n$  по радиусу не дает наглядной картины

распределения фокусирующих сил поля. Наиболее полно характеризует фокусирующие силы потенциальная функция фокусирующих сил магнитного поля бетатрона  $V_m$ , связанная с показателем спадания магнитного поля следующим образом.

Тангенциальная составляющая скорости электрона, движущегося в поле бетатрона, выражается в виде:

$$v_\theta = \sqrt{(2e/m)V_m}. \quad (2.14)$$

Фокусирующая сила в направлении оси  $z$  равна:

$$m\ddot{z} = -e \frac{\partial V_m}{\partial z} = (e/c)v_\theta H_r, \quad (2.15)$$

откуда

$$H_r = -1(\sqrt{2V_m})c\sqrt{m/e} \frac{\partial V_m}{\partial z}. \quad (2.16)$$

Фокусирующую силу в направлении  $r$  находят как

$$m\ddot{r} = -e \frac{\partial V_m}{\partial r} = (-e/c)v_\theta H_z, \quad (2.17)$$

откуда

$$\Delta H_z = 1(\sqrt{2V_m})c\sqrt{m/e} \frac{\partial V_m}{\partial r}, \quad (2.18)$$

где  $\Delta H_z = H_z - H_{zv}$  – разность между напряженностью магнитного поля, соответствующего в данной точке, и напряженностью поля, которое необходимо для движения электрона по окружности радиуса  $r$  со скоростью  $v_\theta$ .

[22]

Эта разность создает фокусирующую силу в направлении  $r$ .  $H_{zv}$  находят из выражений

$$mv_\theta^2/2 = (e/c)H_{zv}; \quad H_{zv} = (c/r)\sqrt{(2m/e)V_m}. \quad (2.19)$$

Тогда

$$H_z = H_{zv} + \Delta H_z = (c/r)\sqrt{(2m/e)V_m} + c\sqrt{m/e(1/\sqrt{2V_m})} \frac{\partial V_m}{\partial r}. \quad (2.20)$$

Так как

$$n = (-r / H_z) \frac{\partial H_z}{\partial r}, \quad (2.21)$$

то

$$n = -1 \frac{2 \frac{\partial V_m}{\partial r} + r \left[ \frac{\partial^2 V_m}{\partial r^2} + (1/2V_m) \left( \frac{\partial V_m}{\partial r} \right)^2 \right]}{2V_m/r + \frac{\partial V_m}{\partial r}}. \quad (2.22)$$

На равновесной орбите  $r=r_0$ ;  $z=0$ ;  $\frac{\partial V_m}{\partial r} = 0$  или

$$n(r) = 1 - r_0^2 \left[ \frac{\partial^2 V_m}{\partial r^2} / 2V_m \right]_{r_0}, 0 \quad (2.23)$$

Из условия  $\frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{\partial H_r}{\partial z}$  можно получить соотношение

$$n(r) = r_0^2 \left[ \frac{\partial^2 V_m}{\partial r^2} / 2V_m \right]_{r_0}, 0$$

Таким образом, рассмотрение характеристик поля бетатрона на основе потенциальной функции  $V_m$  учитывает и распределение  $n$ .

Уравнение (2.22) можно записать в виде:

$$\frac{\partial^2 V_m}{\partial z^2} - (1/2V_m) \frac{\partial^2 V_m}{\partial r^2} + ((1+n)/r) \frac{\partial V_m}{\partial r} - (1-n)2V_m/r^2 = 0. \quad (2.24)$$

При известном распределении  $n$  и заданном  $Z$  из уравнения (2.24) можно найти зависимость  $V_m$  от  $r$ . Подобное уравнение получают и для зависимости  $V_m$  от  $z$  при заданном  $r$ . Дифференцируя соотношение (2.15) и (2.20) и считая,

что  $\frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{\partial H_r}{\partial z}$ , получаем:

$$\frac{\partial^2 V_m}{\partial z^2} - (1/2V_m) \left( \frac{\partial^2 V_m}{\partial z^2} \right) - (1/r)2V_m/r^2 - (1/r) \frac{\partial V_m}{\partial r} = 0. \quad (2.25)$$

Складывая левые части (2.24) и (2.25) имеем:

$$\frac{\partial^2 V_m}{\partial r^2} + (1/r) \frac{\partial V_m}{\partial r} + \left( \frac{\partial^2 V_m}{\partial z^2} \right) - (1/2V_m) \left[ \left( \frac{\partial V_m}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_m}{\partial z} \right)^2 \right] - (2V_m / r^2) = 0 \quad (2.26)$$

Уравнение (2.26) это уравнение магнитного поля бетатрона, описывающее все основные свойства поля.

Функцию  $V_m$  можно выразить через вектор-потенциал  $A$ :

$$V_m = eA^2 / 2mc^2. \quad (2.27)$$

Подставляя в (2.25) значение  $A$  вместо  $V_m$ , получим уравнение для  $A$ :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + (1/r) \frac{\partial A}{\partial r} + \left( \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right) - (A/r^2) = 0. \quad (2.28)$$

Рассмотрим уравнение Максвелла, по которому находится распределение магнитного поля в среде. Для вакуума  $\mu=1$ , тогда уравнение примет более простой вид  $B = \mu_0 J$ . [22]

Приравнивая левую часть уравнения (2.28) к правой части уравнения Максвелла, получим:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + (1/r) \frac{\partial A}{\partial r} + \left( \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right) - (A/r^2) = \mu_0 J. \quad (2.29)$$

### 3 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Данная задача сводится к решению краевой задачи для уравнения (2.29):

$$r \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial u}{\partial r} = \mu_0 J_\phi, \quad (3.1)$$

с граничным условием магнитной изоляции  $A_\phi = 0$ .

Здесь  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ ,  $u = A_\phi / r$ ;  $A_\phi$ ,  $J_\phi$  - азимутальные составляющие векторного потенциала и объемной плотности тока.

Составляющие вектора магнитной индукции выражаются через  $u(r, z)$

$$B_r = -r \frac{\partial u}{\partial z}; \quad B_z = u + r \frac{\partial u}{\partial r};$$

Токи в кольцах необходимо подобрать таким образом, чтобы выполнялось условие равновесия

$$n = -\frac{r_0}{B_{z_0}} \frac{\partial B_z}{\partial r}; \quad (3.2)$$

где  $0.5 < n < 1$  – коэффициент спадания,

$r_0$ ,  $B_{z_0}$  – радиус равновесной орбиты и значение магнитной индукции на окружности этого радиуса соответственно.

Также необходимо, чтобы выполнялось условие Видероз [22]:

$$H_z = \frac{\bar{H}_z}{2}, \quad (3.3)$$

которое означает, что поток, проходящий внутри орбиты должен быть в два раза больше потока однородного поля на орбите, т.н. «бетатронное соотношение». Для выполнения этого условия в бетатроне в центральной области помещен железный сердечник.

## 4 ВЫБОР И ОПИСАНИЕ МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Для реализации любой задачи можно выделить два метода: метод конечных элементов и разностный метод.

Метод конечных разностей — широко известный и простейший метод интерполяции. Его суть заключается в замене коэффициентов дифференциального уравнения на разностные коэффициенты, что позволяет свести решение дифференциального уравнения к решению его разностного аналога, то есть построить его конечно-разностную схему. При решении задачи разностным методом область интегрирования разбивают на прямоугольные ячейки. Область покрывается правильной сеткой.

В пакете COMSOL реализован метод конечных элементов. Рассмотрим его более подробно.

Метод конечных элементов является аналитической процедурой и основными преимуществами являются:

- удобство формирования уравнения,
- возможность представления нерегулярных и сложных объектов и условий.

Отдельно необходимо отметить, что метод возможно применять, если объект неоднороден и состоит из большого числа отдельных конструктивных элементов. Идея метода заключается в следующем: воспользоваться простыми функциями, но не во всей области, а в её отдельных подобластях (конечных элементах), а точность решения задачи обеспечить использованием большого числа конечных элементов (КЭ). При этом КЭ могут быть простой формы и вычисление интегралов по ним достаточно простая процедура.

Этапы решения задач с помощью МКЭ:

- в рассматриваемой области фиксируется конечное число точек. Эти точки называются узловыми точками, или узлами;
- значение непрерывной величины в каждой узловой точке считается переменной, которая должна быть определена;

- область определения непрерывной величины разбивается на конечное число подобластей, называемых элементами. Эти элементы имеют общие узловые точки и в совокупности аппроксимируют форму области;
- непрерывная величина аппроксимируется на каждом элементе полиномом, который определяется с помощью узловых значений этой величины. Для каждого элемента определяется свой полином, но полиномы подбираются таким образом, чтобы сохранялась непрерывность величины вдоль границ элемента.

Процедура разбиения области состоит из задания числа, размеров и формы подобластей, которые используются для построения дискретной модели реального объекта. Элементы необходимо выбирать с достаточной точностью, т.е. размер элемента должен зависеть от сходимости задачи, поэтому нужно иметь некоторые общие соображения об окончательных значениях, с тем чтобы можно было уменьшить размеры элементов в тех областях, где значение градиентов велико, и увеличить их там, где значение градиентов близко к нулю. Отметим, что в программных комплексах типа COMSOL дискретизация области проводится пользователем. Это обусловлено тем, что общего метода разбиения на элементы в настоящее время не существует.

В COMSOL Multiphysics разработаны две стратегии генерации сетки. Во-первых – это прямая разработка сетки пользователем, который может редактировать различные параметры сетки, такие как плотность, комбинацию типов сетки и т.д. Во-вторых, это новая возможность генерации в соответствии с физикой задачи. В этом случае программа автоматически настроит сетку для моделирования. Автоматически сформированную сетку также можно редактировать.

## 5 ВЫБОР ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Метод конечных элементов реализован в различных пакетах прикладных программ. Среди наиболее известных выделим ANSYS и COMSOL Multiphysics. ANSYS – универсальная программная система конечно-элементного анализа, существующая и развивающаяся на протяжении последних 30 лет, является довольно популярной у специалистов в сфере автоматизированных инженерных расчётов и решения линейных и нелинейных, стационарных и нестационарных пространственных задач механики деформируемого твёрдого тела и механики конструкций (включая нестационарные геометрически и физически нелинейные задачи контактного взаимодействия элементов конструкций), задач механики жидкости и газа, теплопередачи и теплообмена, электродинамики, акустики, а также механики связанных полей.

Программное обеспечение пакета COMSOL предназначено для моделирования любых физических систем. COMSOL Multiphysics включает в себя графический пользовательский интерфейс (GUI) COMSOL Desktop и набор предварительно сконфигурированных пользовательских интерфейсов и инструментов моделирования (т. н. «интерфейсы физик»), которые предназначены для стандартных задач моделирования. Дополнительные модули расширяют возможности платформы мультифизического моделирования, обеспечивая моделирование для специфических областей применения и интеграцию с программными пакетами сторонних разработчиков и их функциями. Для запуска модулей расширения необходим пакет COMSOL Multiphysics.

Модули дополняют базовые интерфейсы физик пакета COMSOL Multiphysics, обеспечивая новые интерфейсы для моделирования электрических, механических, гидродинамических и химических явлений. Для решения сложных мультифизических задач можно легко комбинировать любое количество модулей.

Рассмотрим более подробно AC/DC (Переменный/постоянный ток) модуль, с помощью которого была реализована данная работа. Модуль AC/DC используется для моделирования электрических, магнитных и электромагнитных полей в статических и низкочастотных системах. Типовые случаи включают моделирование конденсаторов, индукторов, изоляторов, катушек, электродвигателей, соленоидов и сенсоров с применением специализированных инструментов для извлечения таких параметров как сопротивление, емкость, индуктивность, импеданс, сила и крутящий момент. Материалы и материальные уравнения определены в терминах диэлектрической проницаемости, магнитной проницаемости, удельной электропроводности и остаточных полей.

Преимущества пакета COMSOL Multiphysics:

- моделирование основано на дифференциальных уравнениях в частных производных (PDE) и позволяет решать уравнения методом конечных элементов;
- позволяет расширять стандартные модели, использующие одно дифференциальное уравнение, в мульти-физические модели для расчета связанных между собой физических явлений;
- коэффициенты PDE задаются в виде понятных физических свойств и условий, таких как: теплопроводность, теплоемкость, коэффициент теплоотдачи, объемная мощность;
- использование различных математических способов для задания систем;
- различные виды анализа (стационарный и переходный анализ, линейный и нелинейный анализ, модальный анализ и анализ собственных частот);
- применяется конечноэлементный анализ вместе с сеткой, учитывающей геометрическую конфигурацию тел и контролем ошибок с использованием разнообразных и дополнительных численных решателей.

Сравнивая эти два пакета можно сказать, что в COMSOL Multiphysics всегда при использовании любого модуля ясно видна постановка задачи, то есть пользователю доступны и уравнения, описывающие процесс, и краевые условия в явном виде. В ANSYS, напротив, математическая постановка скрыта от пользователя за выбором элемента. Инженер не видит уравнений и краевых условий в том виде, в которых мы их привыкли видеть физики и математики. В ANSYS выбор элемента означает выбор уравнений, описывающих процесс. В COMSOL Multiphysics выбор элемента ни к чему не обязывает, уравнения задаются отдельно при выборе модуля или заданием их коэффициентов и констант. Учитывая особенности пакетов, для моделирования бетатрона выбран COMSOL Multiphysics.

## 6 АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Схема алгоритма расчета магнитного поля бетатрона представлена на рисунке 2.



Рисунок 2 – Блок-схема алгоритма моделирования расчетной области бетатрона

В блоке 2 задается размерность модели – двумерная осесимметричная (2D Axisymmetric), а также производится задание исходных данных. Требуется ввести следующие параметры:

- $j_1$  – плотность тока в индукторе-соленоиде  $[A/m^2]$ ;
- $j_2$  – плотность тока во внутреннем кольцевом витке  $[A/m^2]$ ;
- $j_3$  – плотность тока во внешнем кольцевом витке  $[A/m^2]$ .

В блоке 3 определяется рабочая область, строится геометрия модели в соответствии с рисунком 1, а именно: внешний прямоугольник, индуктор-соленоид, внутренний кольцевой виток, внешний кольцевой виток.

В блоке 4 вводятся коэффициенты дифференциальных уравнений, задаются значения плотности тока для соответствующих элементов, условие магнитной изоляции, начальная скорость электронов и их количество.

В блоке 5 производится формирование расчетной конечно-элементной сетки, учитывающей геометрическую конфигурацию тел.

В блоке 6 осуществляется получение решения.

В блоке 7 производится визуализация результатов.

С более подробной реализацией алгоритма можно ознакомиться в Приложении А.

## 7 ПРОВЕДЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

На рисунке 3 представлена расчетная область бетатрона, построенная в пакете COMSOL с помощью графического интерфейса пользователя (GUI).

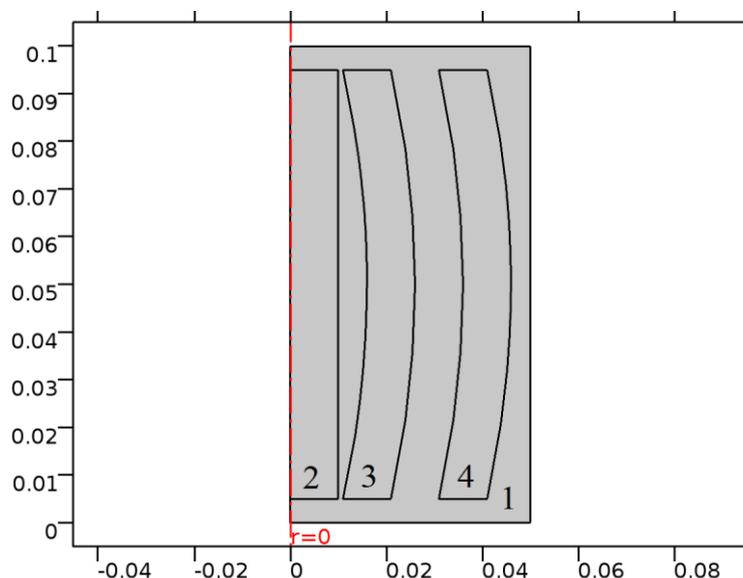


Рисунок 3 – Расчетная область бетатрона

В индукторе – соленоиде 2 объемная плотность тока  $J_\varphi = 1.5 \cdot 10^7 \text{ A}/\text{m}^2$ , во внутреннем кольцевом витке 3  $J_\varphi = -10^6 \text{ A}/\text{m}^2$ , во внешнем витке 4  $J_\varphi = 10^6 \text{ A}/\text{m}^2$ . Боковые поверхности витков 3 и 4 образованы вращением кривых Безье второго порядка относительно оси симметрии  $r=0$  м. На торцах цилиндрической области задаются граничные условия магнитной изоляции  $A_\varphi = 0$ . Область 1 – вакуум.

Силовые линии магнитного поля представлены на рисунке 3, на этом же рисунке стрелками изображается вектор магнитной индукции. Поле в области между витками 3 и 4 имеет бочкообразную структуру, характерную для полей бетатронов. Цветовая палитра характеризует распределение магнитного потока в расчетной области (рисунок 5).

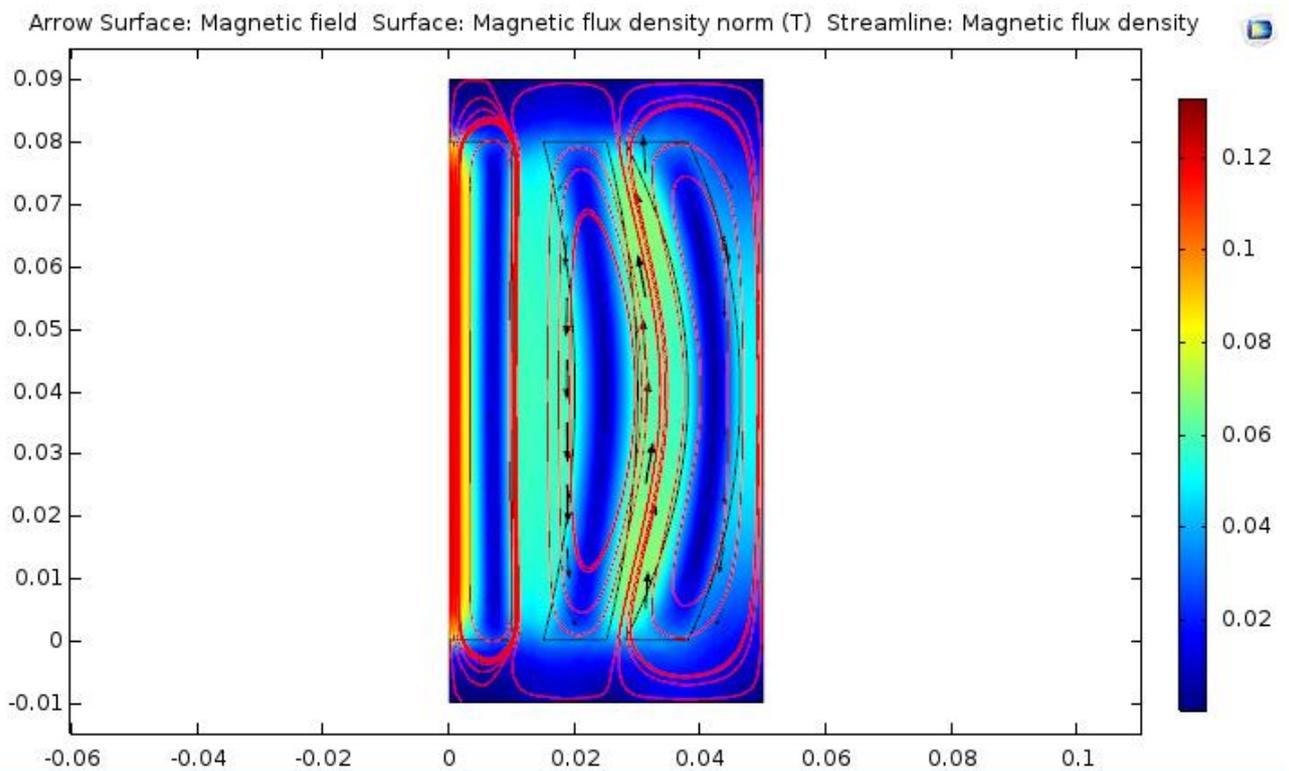


Рисунок 4 – Расчетные плотности потока (линии) и вектор (стрелки) магнитной индукции  $B$

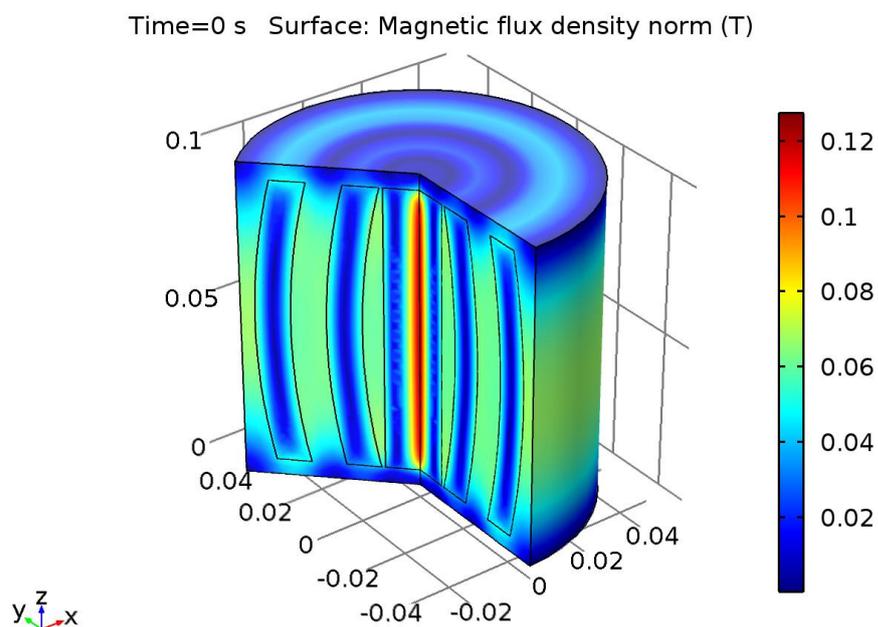


Рисунок 5 – Магнитный поток бетатрона

Распределение  $B_z$  в зависимости от радиуса приведено на рисунке 6. Поле в области между витками 3 и 4 имеет бочкообразную структуру, характерную для полей бетатрона, с показателем спадания  $n = -(r/B_z) \cdot (\partial B_z / \partial r) = 0,713$  в медианной плоскости  $z = 0.05$ , в окрестности

равновесной орбиты  $R_0 = 0.015$  м. На рисунках 7,8,9 представлены зависимости  $B_r$  от радиуса на различных плоскостях  $z=0.03;0.05;0.07$  соответственно.

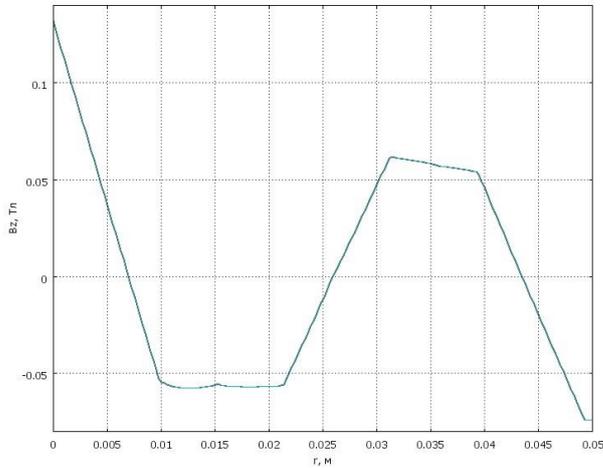


Рисунок 6 – Зависимость  $B_z$  от радиуса в медианной плоскости  $z=0.05$  м

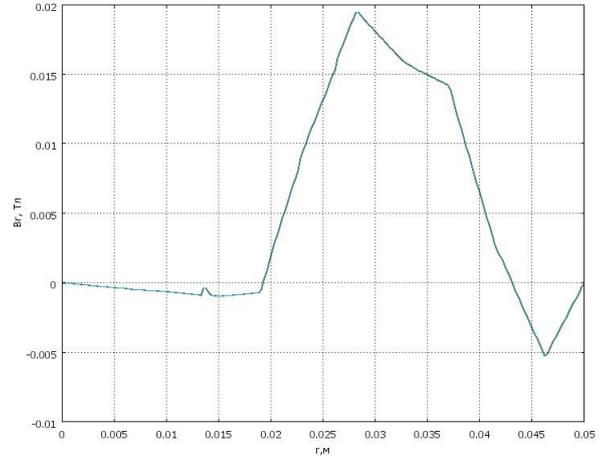


Рисунок 7– Зависимость  $B_r$  от радиуса в медианной плоскости  $z=0.03$  м

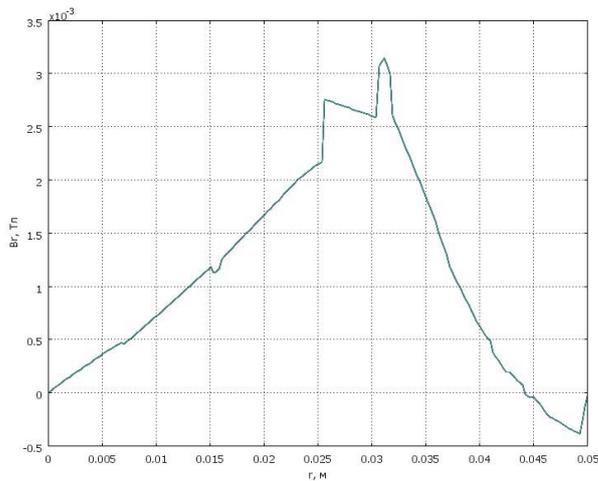


Рисунок 8 – Зависимость  $B_r$  от радиуса в медианной плоскости  $z=0.05$  м

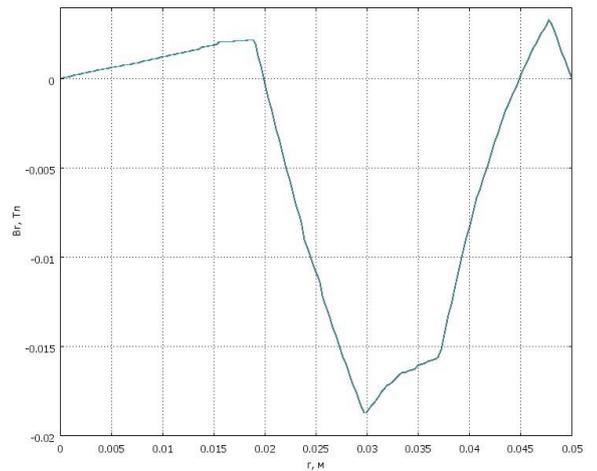


Рисунок 9 – Зависимость  $B_r$  от радиуса в медианной плоскости  $z=0.07$  м

Показателем спадания можно управлять, меняя кривизну профиля витков 3 и 4, а также изменяя величину их фланцев. Так как подобного устройства на настоящее время не существует, проверить правильность расчетов можно только исходя из соответствия полученных результатов с теоретическими положениями. При анализе зависимости  $B_r$  от радиуса в медианной плоскости можно сделать вывод, что, при увеличении радиуса

величина магнитной индукции постепенно уменьшается, т.е. происходит плавное падение магнитной индукции, а коэффициент спада в окрестности равновесной орбиты находится в пределах допустимого. Это говорит о выполнении условия равновесия (3.2) и условия Видероз (3.3). Моделирование показывает, что с помощью предложенного способа возможно формирование магнитного поля бетатронного типа.

После формирования магнитного поля бетатрона, необходимо ввести частицы в расчетное поле для ускорения. Необходимо задать начальную скорость частиц и их количество. В данной работе начальная скорость  $v_0 = 3 \cdot 10^6$  м/с, количество частиц  $N = 50$ . На рисунках 10, 11, 12 представлено положение частиц в начальный момент времени, при времени  $t = 0.5$  мс и  $t = 1$  мс соответственно.

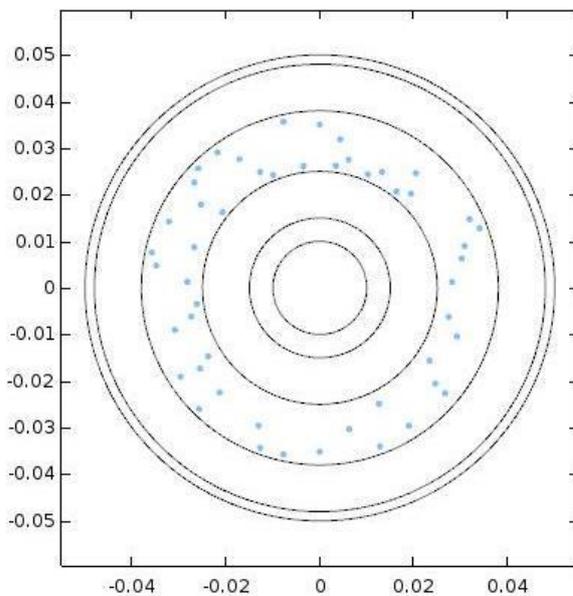


Рисунок 10 – Положение частиц при времени  $t=0$  мс

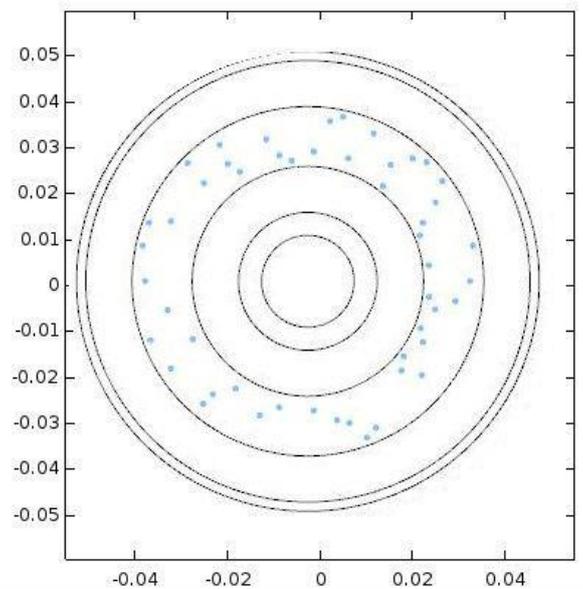


Рисунок 11 – Положение частиц при времени  $t=0.5$  мс

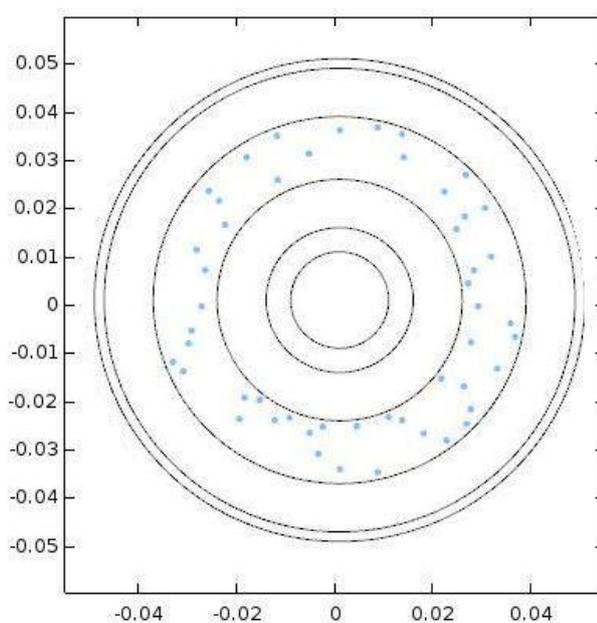


Рисунок 12 –Положение частиц при времени  $t=1$  мс

Траектория частиц в расчетной области бетатрона имеет вид спирали. Со временем частица смещается с равновесной орбиты и выводится из камеры ускорителя.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Основные результаты работы заключаются в следующем: изучены возможности моделирования с использованием графического интерфейса пользователя (GUI) COMSOL Multiphysics версии 5.1. Были изучены основные принципы работы компактных ускорителей частиц. С помощью вычислительных экспериментов были найдены такие токи и такая кривизна колец, при которых выполняется условие равновесия и условие Видероз. На основе полученных знаний методом конечных элементов осуществлялось моделирование в пакете COMSOL, а именно: решена задача для вектора магнитного потенциала, а также найдено распределение магнитной индукции. С помощью графического интерфейса пользователя была создана геометрия расчетной области, заданы исходные данные, начальные и граничные условия, сформирована сетка, получены результаты моделирования. Полученные результаты соответствуют данным в литературных источниках.

Данная модель является упрощенной, поэтому в качестве перспективы развития работы планируется модернизация разработанной модели.

## Приложение А. Инструкция по моделированию компактного ускорителя частиц.

### Построение модели

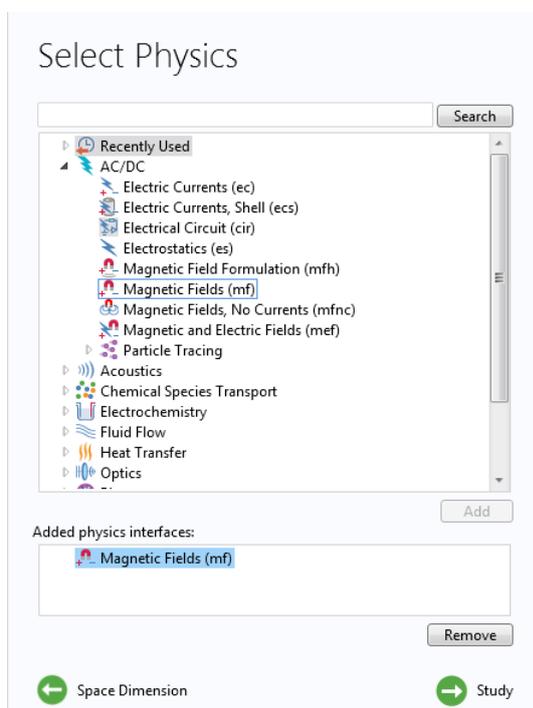
1. Для запуска приложения дважды щелкните значок COMSOL на рабочем столе, после чего откроется новое окно с двумя вариантами создания модели: **Model Wizard** (Мастер создания моделей) или **Blank Model** (Пустая модель).

2. Перейдите в окно **Model Wizard**.

3. В окне **Select Space Dimension** (Выбор размерности пространства) выберите **2D Axisymmetric** (Двумерное осесимметричное).

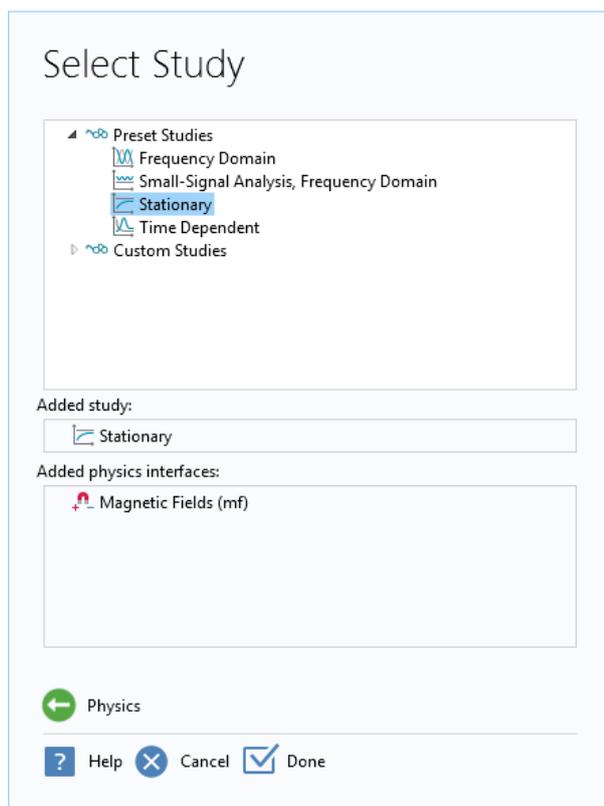


4. В **Select Physics** (Выберите физику), выберите **AC/DC > Magnetic Fields (mf)**(магнитные поля). Нажмите **Add** (Добавить).



5. Для продолжения исследования **Study** (Исследование).

6. Нажмите **Stationary** (Стационарное) в разделе **Preset Studies** (Предустановленные типы исследований). По завершении нажмите **Done** (Готово).



### Задание глобальных переменных

Узел **Global Definitions** (Глобальные определения) в Построителе моделей содержит параметры (Parameters), переменные (Variables) и функции (Functions), имеющие глобальную область действия.

1. Щелкните правой кнопкой мыши **Global Definitions** (Глобальные определения) и выберите **Parameters** (Параметры). В таблице **Parameters** (Параметры) щелкните первую строку в блоке **Name** (Имя) и введите **w1**.

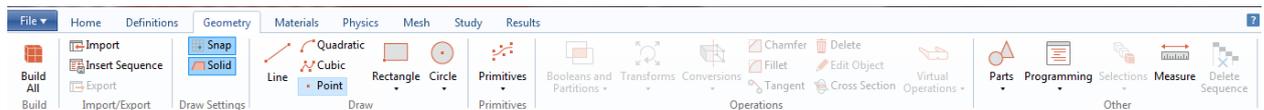
2. Щелкните первую строку в блоке **Expression** (Выражение) и введите значение для **w1**, **0.01[m]**. Единица измерения указывается в квадратных скобках.

3. Теперь добавьте остальные параметры: **r1**, **r2**, **h1**, **j1**, **j2** и **j3** из списка **Parameters** (Параметры) ниже.

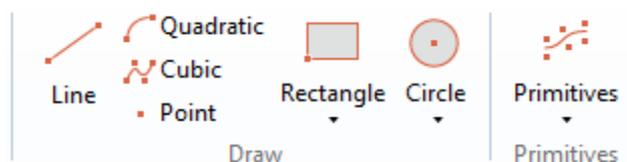
Parameters			
Name	Expression	Value	Description
w1	0.01[m]	0.01 m	width of solenoid
h1	0.09[m]	0.09 m	high of objects
r1	0.005[m]	0.005 m	distance between objects...
r2	0.003[m]	0.003 m	distance between objects...
j1	1.5e7[A/m^2]	1.5E7 A/m <sup>2</sup>	the current density in the...
j2	-10e7[A/m^2]	-1E8 A/m <sup>2</sup>	the current density in the...
j3	10e7[A/m^2]	1E8 A/m <sup>2</sup>	the current density in the...
w2	0.01[m]	0.01 m	width of inside ring
w3	0.01[m]	0.01 m	width of outside ring
k1	0.01[m]	0.01 m	the curvature of inside ring
k2	0.01[m]	0.01 m	the curvature of outside r...

## Построение геометрической модели

Геометрию можно нарисовать в Графическом окне с помощью интерактивных графических инструментов, доступных на вкладке **Work Plane** (Рабочая плоскость) ленты.



### Вкладка Work Plane (Рабочая плоскость)



### Геометрические примитивы

Далее мы создадим индуктор-соленоид.

1. В Построителе моделей в разделе **Work Plane 1** (Рабочая плоскость 1) щелкните правой кнопкой мыши **Plane Geometry** (Геометрия плоскости) и выберите **Rectangle** (Прямоугольник). В окне **Settings** (Настройки) блока **Rectangle** (Прямоугольник) в разделе **Size** (Размер) введите:

-**w1** в поле Width (Ширина).

-**h1** в поле Height (Высота).

Нажмите кнопку Build Selected (Построить выбранные).

2. Теперь создадим внутренний кольцевой виток. В разделе **Work Plane 1** (Рабочая плоскость 1) щелкните правой кнопкой мыши **Plane Geometry** (Геометрия плоскости) и выберите **Bezier Polygon** (кривая Безье). В блоке **Size** (размер) в разделе **Polygon Segments** (сегменты полигона) нажмите кнопку **Add Quadratic** (добавить квадратичный). В разделе **Control points** и **Weights** введите следующие значения:

The screenshot shows the 'General' and 'Polygon Segments' sections of a software interface. The 'Type' is set to 'Solid'. Under 'Polygon Segments', there are four segments listed, with 'Segment 1 (quadratic)' selected. Below the list are buttons for 'Add Linear', 'Add Quadratic', 'Add Cubic', and 'Delete'. The 'Control points' section has a table with columns 'r' and 'z', and a unit 'm'. The 'Weights' section has three input fields, all containing the value '1'.

	r	z	
1	$0.016+w1+r1$	$0.005+h1$	m
2	$0.016+w1+r1+k1$	$0.005+0.5*h1$	m
3	$0.016+w1+r1$	$0.005$	m

	Weights
1	1
2	1
3	1

3. Нажмите кнопку **Build Selected** (Построить выбранные).

4. Таким же образом необходимо создать еще 3 сегмента. Для этого следует повторить пункт 2 3 раза, заполняя разделы **Control points** и **Weights** следующим образом:

The first screenshot shows the configuration for Segment 2, and the second shows the configuration for Segment 3. Both follow the same structure as Segment 1, with different control point values.

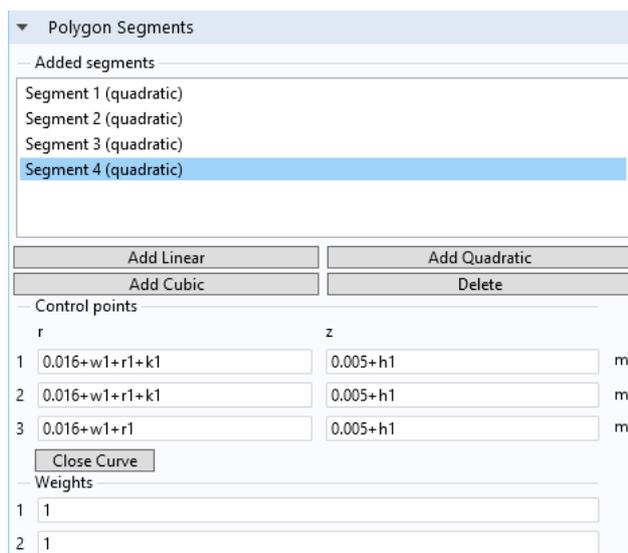
	r	z	
1	$0.016+w1+r1$	$0.005$	m
2	$0.016+w1+r1+k1$	$0.005$	m
3	$0.016+w1+r1+k1$	$0.005$	m

	Weights
1	1
2	1
3	1

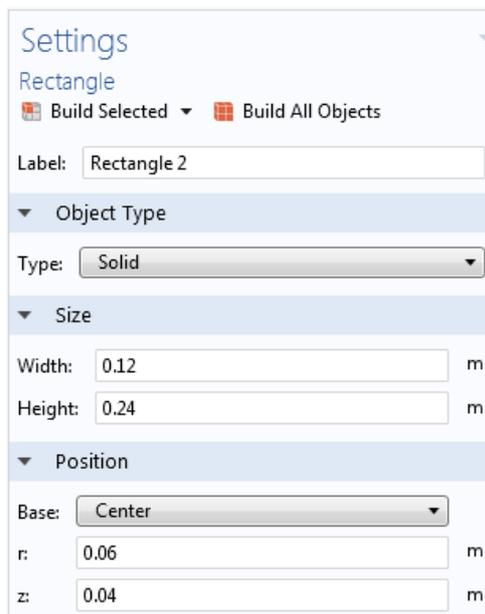
  

	r	z	
1	$0.016+w1+r1+k1$	$0.005$	m
2	$0.016+w1+r1+2*k1$	$0.005+0.5*h1$	m
3	$0.016+w1+r1+k1$	$0.005+h1$	m

	Weights
1	1
2	1
3	1



5. На следующем этапе создадим область, которая изолирует бетатрон от воздействий окружающей среды. В Построителе моделей в разделе **Work Plane 1** (Рабочая плоскость 1) щелкните правой кнопкой мыши **Plane Geometry** (Геометрия плоскости) и выберите **Rectangle** (Прямоугольник). В окне **Settings** (Настройки) блока **Rectangle** (Прямоугольник) в разделе **Size** (Размер) введите:



Нажмите кнопку **Build Selected** (Построить выбранные).

6. На заключительном этапе построения геометрии необходимо соединить все элементы в единую систему. Для этого щелкните правой кнопкой мыши на **Geometry 1>Boolean and partitions** и выберите **Compose**. Выделите все объекты и добавьте их в окно во вкладке **Compose**. В область **Set formula**

введите следующую формулу:  $r1+b1+b2+r2$ . Нажмите кнопку **Build Selected** (Построить выбранные).

## Материалы

В узле **Materials** (Материалы) хранятся свойства материалов для всех физик и всех областей узла **Component** (Компонент). Для соленоида и витков будем использовать один и тот же материал – вакуум. Вот как выбрать его в COMSOL.

1. Откройте окно **Add Materials** (Добавление материалов). Окно **Add Materials** (Добавление материалов) можно открыть двумя способами:

-Перейдите на вкладку **Home** (Главная) на ленте и нажмите **Add Material** (Добавить материал).

- Щелкните правой кнопкой мыши **Component 1>Materials** (Компонент 1 > Материалы) в Построителе моделей и выберите **Add Material** (Добавить материал).

2. В окне **Add Material** (Добавление материала) раскройте **Liquid and Gases** (Жидкости и газы)>**Gases** (Газы). Щелкните правой кнопкой мыши на **Air** (воздух) и выберите **Add to Component 1** (Добавить в Компонент 1).

## Физика областей и граничные условия

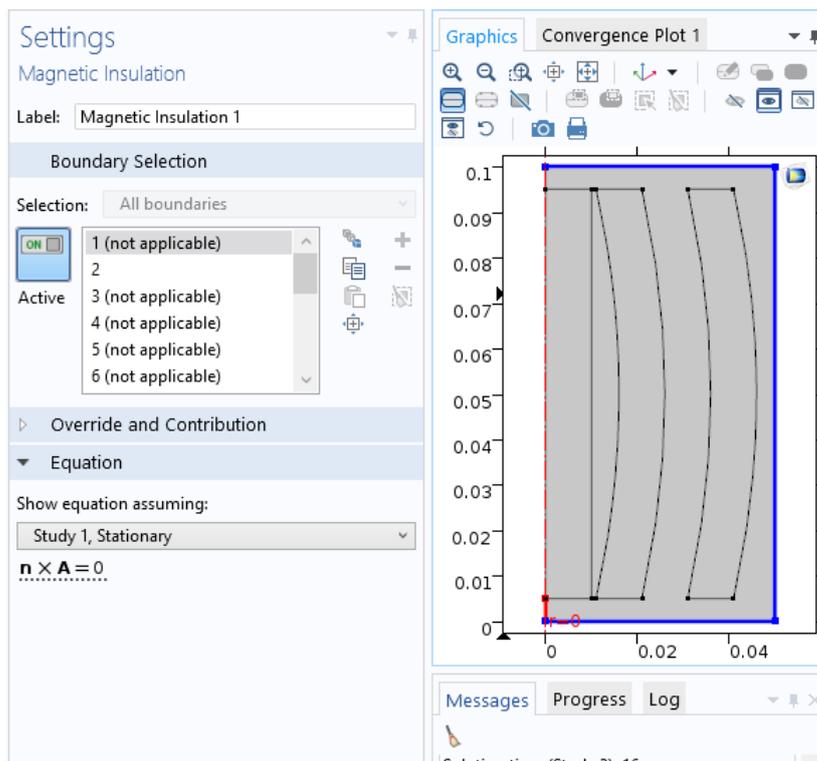
Теперь, когда заданы геометрия и материалы, вы можете установить граничные условия.

1. В Построителе моделей щелкните правой кнопкой мыши **Magnetic Fields** и выберите **External Current Density**. Во вкладке **Domain Selection** выберите область соленоида, во вкладке **External Current Density** задайте плотности тока следующее значение:

External Current Density		
External current density:		
$J_e$	0	r
	j1	phi
	0	z
A/m <sup>2</sup>		
<input type="checkbox"/> Add contribution of the external current density		

Подобным образом необходимо задать начальные условия внутреннему и внешнему виткам. Для внутреннего витка во вкладке **External Current Density** задайте плотности тока значение  $j_2$ , а для внешнего –  $j_3$ .

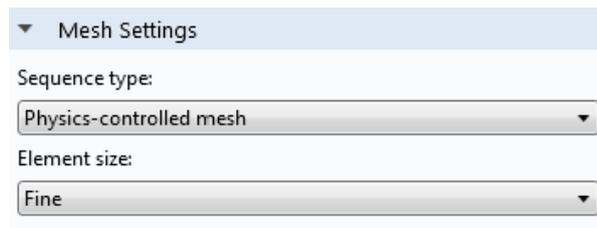
2. Также необходимо задать для расчетной области потенциал на границах равным 0. Для этого в Построителе моделей щелкните правой кнопкой мыши **Magnetic Fields** и выберите **Magnetic Insulation**. Во вкладке **Boundary Selection** выберите граничные области:



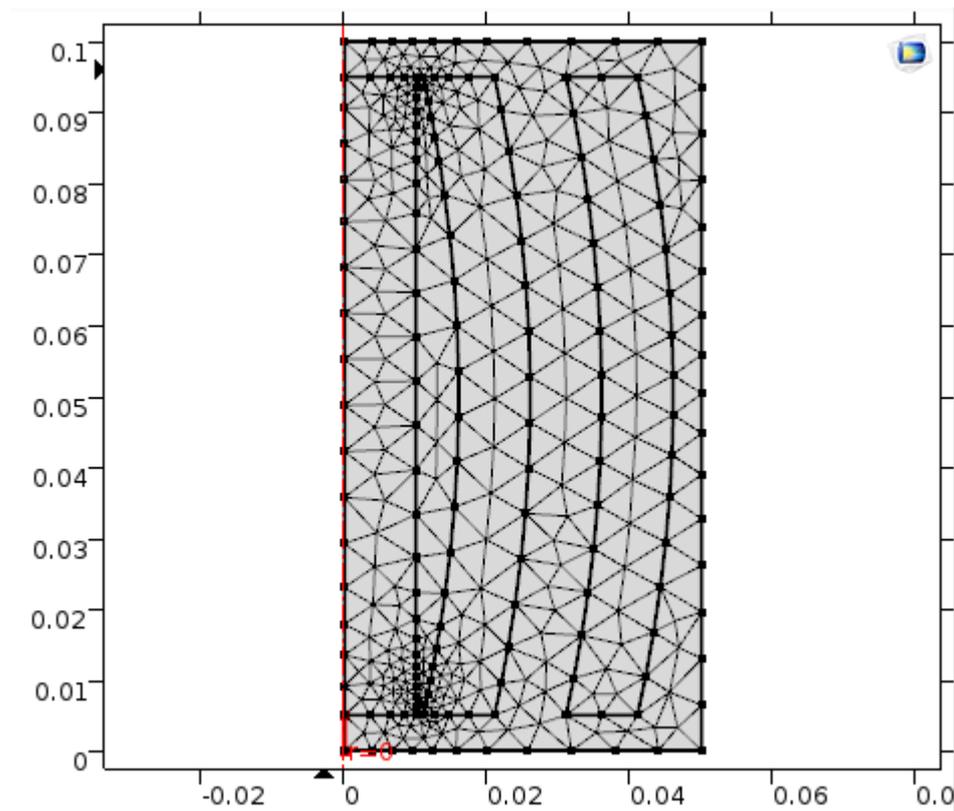
### Сетка

Настройки сетки задают разрешение сетки конечных элементов, которая используется для дискретизации модели. Согласно методу конечных элементов модель разбивается на малые геометрические примитивы.

1. В Построителе моделей в разделе **Component 1** (Компонент 1) выберите **Mesh 1** (Сетка 1). В окне настроек сетки в разделе **Mesh Settings** (Настройки сетки), выберите **Fine** (Точная) из списка **Element size** (Размер элементов).



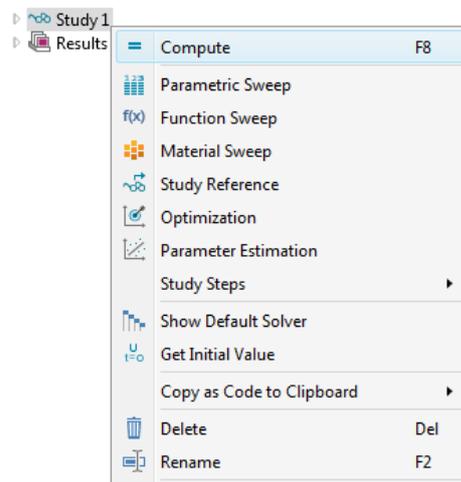
2. Нажмите кнопку Build All (Построить все) в окне настроек или на панели инструментов Mesh (Сетка).



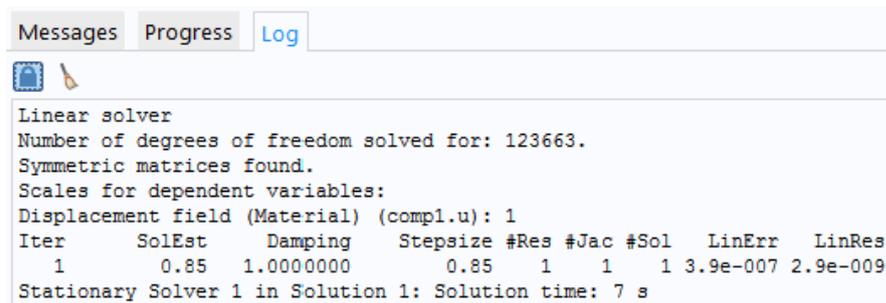
### Исследование

На первом этапе настройки модели вы выбрали стационарное исследование, для которого COMSOL использует стационарный решатель. Для запуска решателя:

1. Щелкните правой кнопкой мыши Study 1 (Исследование 1) и выберите Compute (Вычислить) (или нажмите F8).

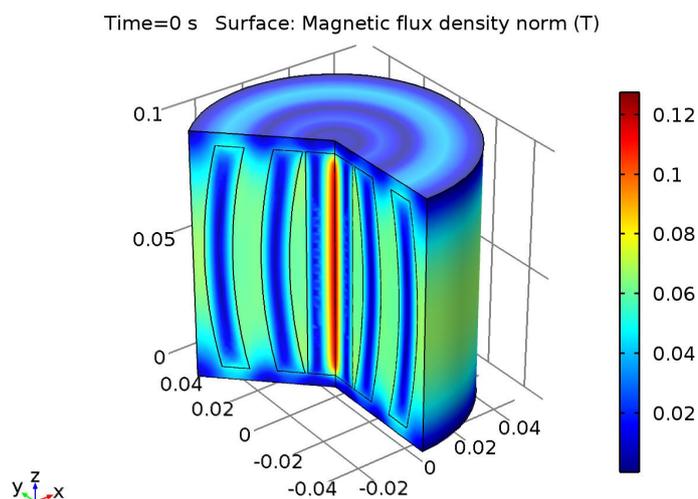


Через несколько секунд вычислений в Графическом окне отобразится график по умолчанию. Дополнительная информация о вычислениях находится в окнах Messages (Сообщения) и Log (Журнал); перейдите на вкладки Messages (Сообщения) и Log (Журнал) в окне Graphics (Графическом окне), чтобы просмотреть ее. Окно Messages (Сообщения) можно также открыть из выпадающего списка Windows (Окна) на вкладке ленты Home (Главная).



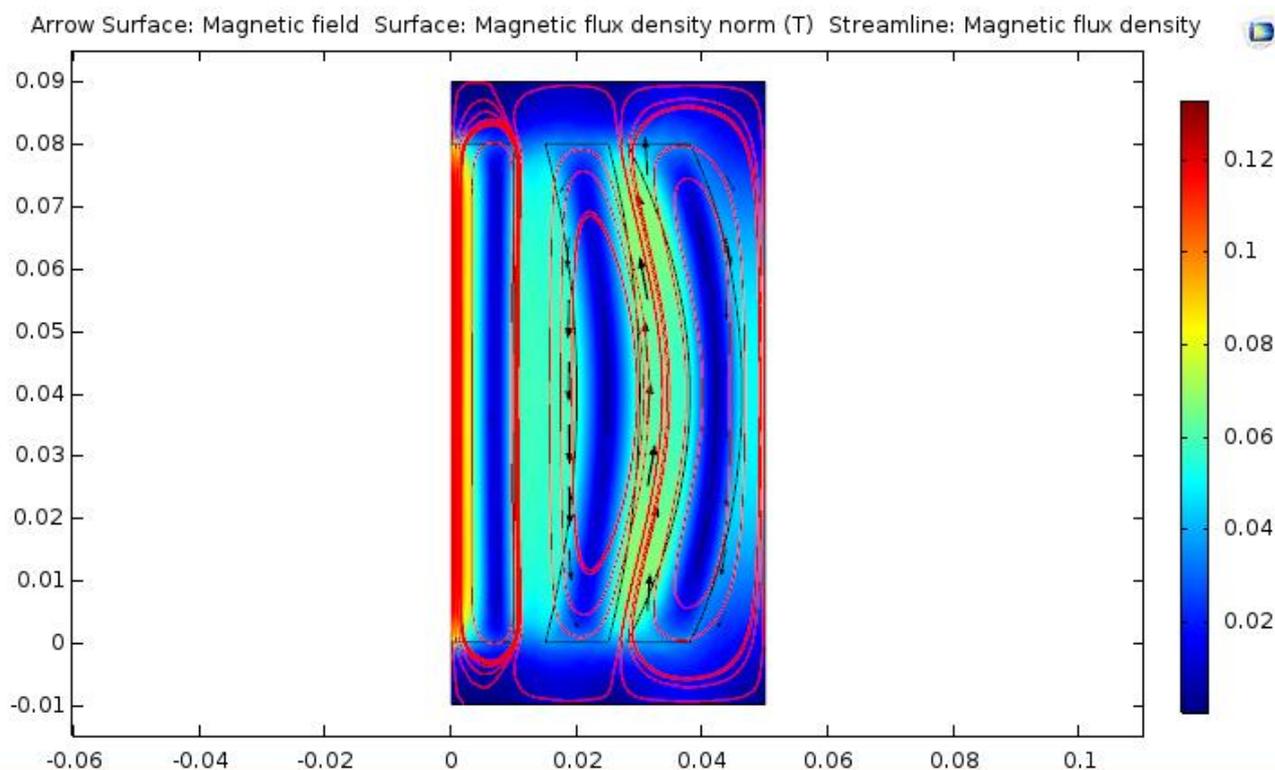
### Отображение результатов

Распределение магнитного поля отображается в Графическом окне в виде графика скалярного поля (Surface plot) по умолчанию.



Чтобы посмотреть, в какую сторону будет направлен вектор электромагнитной индукции, а также посмотреть распределение плотности тока, необходимо выполнить следующие операции:

1. Вов вкладке **Results** выбрать раздел **Magnetic flux Density norm**. Щелкнув по нему правой кнопкой мыши, выбрать **Contour** (для плотности тока), либо **Streamline** (для вектора магнитной индукции). В окне настройки следует нажать кнопку Plot. Вов вкладке Graphics отобразится следующий график:



На этом построение модели завершено.