#### Введение

Моделирование в настоящее время привлекает пристальное внимание исследователей и получило необычайно широкое применение во многих областях знаний: от философских разделов до ядерной физики, от проблем радиотехники и электротехники до проблем механики и гидромеханики, и т.д.

Известно, что магнитные поля с успехом применяются для удержания плазмы и фокусировки пучков заряженных частиц. Однако при наличии неоднородности плазмы и магнитного поля в плазме могут возникать диамагнитные токи, приводящие к искажению внешнего магнитного поля. Последнее необходимо учитывать при создании приборов и установок с использованием замагниченной плазмы. В частности, этот эффект может существенно повлиять на процессы, связанные с транспортировкой пучков заряженных частиц в плазменных и газовых средах. Поэтому важно оценить влияние этого эффекта на искажение внешнего магнитного поля в зависимости от параметров плазмы и уровня, и градиента внешнего магнитного поля. Эта задача является сложной, так как сводится к решению нелинейных уравнений [1].

Актуальность данной темы заключается в том, что моделирование и исследование диамагнитных свойств плазмы важно при построении плазменных источников.

**Целью** данной работы является исследование влияния диамагнетизма плазмы на магнитное поле, удерживающее плазму внутри плазменной пушки. Внешнее удерживающее поле создается системой соленоидальных катушек, окружающих цилиндрическую камеру.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- изучить физику диамагнетизма плазмы;
- создать модель плазменной пушки с плазмой, удерживаемой магнитным полем, создаваемым системой соосных соленоидальных катушек;

 провести оценку вытеснения магнитного поля из области, занимаемой плазменным шнуром при заданных внешних токах в соленоидах.

Предметом исследования является магнитное поле, создаваемое системой соосных соленоидов, а также азимутальными плазменными токами.

**Объектом исследования** является диамагнетизм плазмы, проявляющийся в том, что в замагниченной плазме возникают собственные азимутальные токи, приводящие к возникновению магнитного поля, противоположно направленного полю, создаваемому внешними соленоидами.

**Практическая значимость** результатов: учет диамагнетизма плазмы, позволяет скорректировать величину токов внешних соленоидов.

Практическая новизна заключается в выполнении численного моделирования эффекта диамагнетизма в цилиндрическом плазменном шнуре в среде COMSOL Multiphysics 5.1.

В 2016 году в ТПУ проходил VIII Фестиваль Microsoft, XIII Всероссийская научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Технологии Microsoft в теории и практике программирования», на которой были представлены результаты работы ВКР.

#### 1 Содержательная постановка задачи

### 1.1 Описание свойства диамагнетизма плазмы

Плазмой называют квазинейтральную систему, содержащую положительно и отрицательно заряженные свободные частицы. Положительные частицы – это всегда ионы, а отрицательные – обычно электроны [2].

В состояние плазмы газ может перейти в том случае, если некоторые из составляющих его молекул (атомов) по какой-либо причине потеряли один или несколько электронов, таким образом став положительными ионами. Бывают случаи, когда в результате «прилипания» электронов к нейтральным атомам в плазме могут возникать отрицательные ионы [2]. Если газ не имеет нейтральных частиц, то плазма называется полностью ионизированной.

Квазинейтральный означает почти нейтральный. Квазинейтральная плазма – плазма, электрически нейтральная в среднем в достаточно больших объемах или за достаточно большие промежутки времени. Величины объемов и промежутков времени, в которых проявляется квазинейтральность, определяются пространственными и временными масштабами разделения зарядов [2].

Плазма – четвертое состояние вещества, она подчиняется газовым законам и во многих отношениях ведет себя как газ. Вместе с тем, поведение плазмы в ряде случаев, особенно при воздействии на нее электрических и магнитных полей, оказывается столь необычным, что о ней часто говорят, как о новом состоянии вещества. Сам термин «плазма» применительно к квазинейтральную ионизованному газу был введен американскими физиками Лэнгмюром и Тонксом в 1923 при описании явлений в газовом разряде [3].

Диамагнетизм характерен для всех веществ, потому что диамагнитный эффект вызван действием внешнего магнитного поля на электроны атомов вещества.

3

Диамагнетизм (от греч. *dia* – расхождение и магнетизм) - свойство веществ намагничиваться навстречу приложенному магнитному полю [4].

Диамагнетиками называются вещества, магнитные моменты атомов которых в отсутствии внешнего поля равны нулю, т.к. магнитные моменты всех электронов атома взаимно скомпенсированы (например, инертные газы, водород, азот и др.) [4].

После того, как диамагнитное вещество помещают в магнитное поле, у его атомов появляются наведенные магнитные моменты. В пределах малого объема  $\Delta V$  изотропного диамагнетика наведенные магнитные моменты  $\Delta P_m$  всех атомов одинаковы и направлены противоположно вектору **в** [4].

Вектор намагниченности диамагнетика равен:

$$\mathbf{J}_{M} = \frac{n\Delta \mathbf{P}_{m}}{\Delta V} = n_{0}\Delta \mathbf{P}_{m} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_{0}} \chi = \mathbf{H} \cdot \chi, \qquad (1)$$

где  $n_0 = \frac{n}{\Delta V}$  – концентрация атомов;

 $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  – магнитная постоянная, Гн/м;

 $\chi$  –магнитная восприимчивость среды, кг<sup>-1</sup>;

В - вектор магнитной индукции, Тл;

**Н**- вектор напряженности магнитного поля, А/м.

Для всех диамагнетиков  $\chi < 0$ . Следовательно, вектор **B**<sub>внутр</sub> магнитной индукции собственного магнитного поля, создаваемого диамагнетиком при его намагничивании во внешнем поле **B**<sub>внеш</sub> направлен в сторону, противоположную **B**<sub>внеш</sub>. У диамагнетиков  $|\chi| \approx 10^{-6} \div 10^{-5}$  [4].

Диамагнетизм плазмы – это свойство, характеризующее её магнитную восприимчивость, способность плазмы при помещении eë В магнитное поле намагничиваться навстречу направлению внешнего поля. Этот эффект обусловлен движением электронов и ионов плазмы по винтовым (ларморовским) траекториям, что эквивалентно круговому току, создающему магнитное поле, противоположное внешнему, но меньшее по величине, так уменьшается. Если равновесная что В итоге поле внутри плазмы

плазма удерживается стенками камеры, то появляются токи и диамагнетизм плазмы отсутствует; ДМ проявляется лишь при отсутствии стенок (в космосе) либо при магнитном удержании плазмы [2]. Следствием ДП является тенденция к выталкиванию магнитного поля из области, где расположена плазма.

## 1.2 Описание модели плазменного шнура

Для рассмотрения поведения плазмы в магнитном поле реализовано множество установок. Схема экспериментальной установки плазменного шнура, которая использовалась для моделирования, представлена на рисунке 1.



Рисунок 1- Схема моделируемого процесса

Схема установки состоит из следующих элементов:

- труба дрейфа;
- катод;
- анод;
- две катушки, которые образуют внешнее магнитное поле.

Главная часть установки – труба дрейфа, имеющая цилиндрическую геометрию. В ней расположена плазма. Трубку огибают две одинаковые соленоидальные катушки. В них задан ток для создания магнитного поля вокруг камеры. Катод является источником электронов, а анод их поглощает.

#### 2 Математическая постановка задачи

В установке, представленной на рисунке 1, за создание внешнего магнитного поля отвечают две одинаковые соленоидальные катушки. Плотность тока в катушке рассчитывается по формуле 2 [1]:

$$\left(\mathbf{J}^{e}\right)_{\varphi} = \left(\frac{In}{h\Delta R}\right),\tag{2}$$

где *I* – ток в катушке,

*n* – число витков,

h и  $\Delta R$  – размеры катушки вдоль оси z и по радиусу соответственно.

Выразим плотность диамагнитного тока, который возникает в неоднородной плазме, с помощью давления в плазме, величины внешнего магнитного поля и его градиента. Общий вид представлен выражением 3 [2, 5]:

$$\mathbf{J}_{M} = -\nabla \times \left(\frac{p_{\perp} \mathbf{B}}{B^{2}}\right),\tag{3}$$

где  $p_{\perp} = n_0 T_e f(r) = p_0 f(r)$  – давление плазмы поперёк силовых линий внешнего магнитного поля;

*n*<sub>0</sub> – концентрация частиц плазмы на оси канала транспортировки;

 $T_e$  – электронная температура в эВ;

*f*(*r*) – функция, описывающая неоднородность давления плазмы по радиусу.

Формула 4 необходима для преобразования уравнения 3:

$$\operatorname{rot} \times \left(\frac{p_{\perp} \mathbf{B}}{B^{2}}\right) = \frac{p_{\perp}}{B^{2}} \operatorname{rot} \mathbf{B} + \frac{1}{B^{2}} \left[\nabla p_{\perp} \cdot \mathbf{B}\right] - \frac{2p_{\perp}}{B^{3}} \left[\nabla B \cdot \mathbf{B}\right].$$
(4)

Использование преобразования 4 необходимо потому, что в аксиальносимметричной системе имеется лишь азимутальная составляющая тока намагниченности плазмы. В результате изменений получаем формулу 5:

$$(J_M)_{\varphi} = -\left(\frac{p_{\perp}}{B^2}\right) \left[ p_{\perp}^{-1} \frac{dp_{\perp}}{dr} B_z + \left(\frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial z}\right) - \frac{2}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial r} B_z - \frac{\partial B}{\partial z} B_r\right) \right].$$
 (5)

6

Магнитное поле, связанное с суммарным током (2) и (5), описывается азимутальной составляющей векторного потенциала  $A_{\varphi}(r,z)$ . Для того, чтобы избежать особенностей на оси r=0, вводится новая переменная  $u = A_{\varphi}(r,z)/r$ . Выражение, описывающее ток намагниченности плазмы, с использованием новой переменной u=u(r,z) представляется в следующем виде [1]:

$$(\mathbf{J}_{M})_{\varphi} = -\frac{p_{\perp} \Big( 2ru_{z} (2u + ru_{r})(3u_{z} + 2ru_{rz}) + \Big( (2u + ru_{r})^{2} - (ru_{z})^{2} \Big) (3u_{r} + r(u_{rr} - u_{zz})) \Big)}{\Big( (ru_{z})^{2} + (2u + ru_{r}) \Big)^{2}} + \frac{\frac{dp_{\perp}}{dr} (2u + ru_{r}) \Big( (ru_{z})^{2} + (2u + ru_{r})^{2} \Big)}{\Big( (ru_{z})^{2} + (2u + ru_{r}) \Big)^{2}} \cdot \Big( (ru_{z})^{2} + (2u + ru_{r}) \Big)^{2}$$

$$(6)$$

где *u<sub>rz</sub>*, *u<sub>rr</sub>* и *u<sub>zz</sub>* – частные производные по соответствующим координатам.

Воспользовавшись формулами 2 и 6, получаем нелинейное уравнение 7, необходимое для определения скалярной функции *u*= *u*(*r*,*z*):

$$3u_r + r(u_{rr} + u_{zz}) = -\mu_0 \left( \left( \mathbf{J}^e \right)_{\varphi} + \left( \mathbf{J}_M \right)_{\varphi} (u, r, z) \right).$$
(7)

Для расчета магнитной индукция используются формулы 8 и 9 [1]:

$$B_z = 2u + ru_r,\tag{8}$$

$$B_r = -ru_z. \tag{9}$$

Граничные условия на оси r = 0 задавались как условия аксиальной симметрии, на внешних границах задавались условия магнитной изоляции  $A_{\sigma} = 0$  [1].

#### 3 Выбор и описание метода решения поставленной задачи

Для решения задачи можно использовать аналитическое решение и численные методы, но так как задача является нелинейной, то получение аналитического решения будет очень трудоёмко.

Для решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных часто применяются такие численные методы как:

- метод разделения переменных;
- метод конечных разностей;
- метод конечных элементов.

Основная идея метода разделения переменных заключается в том, чтобы свести решение задачи для уравнения в частных производных к решению вспомогательных задач для уравнений с меньшим числом независимых переменных. Например, если в исходном уравнении содержится две независимые переменные, то вспомогательные задачи будут зависеть уже от одной переменной. Следовательно, нахождение решения уравнения в частных производных сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

Суть метода конечных разностей заключается в замене коэффициентов дифференциального уравнения на разностные коэффициенты, что позволяет свести решение дифференциального уравнения к решению его разностного аналога, то есть построить его конечно-разностную схему.

Одним из наиболее эффективных численных методов решения математических задач, описывающих состояние физических систем сложной структуры, является метод конечных элементов [6]. Этот метод реализован в большинстве универсальных пакетов.

Для решения поставленной задачи был выбран метод конечных элементов.

#### 3.1 Метод конечных элементов

В науке и технике часто возникает проблема расчета систем, имеющих сложную геометрическую конфигурацию и нерегулярную физическую

8

структуру. Компьютеры позволяют выполнять такие расчеты при помощи приближенных численных методов. Метод конечных элементов является одним из них. В последние десятилетия он занял ведущее положение и получил широкое применение [6].

Метод конечных элементов - метод решения задач математической физики, основанный на условном разбиении исследуемой области на небольшие участки правильной формы (конечные элементы). В пределах каждого элемента чаще всего на его границах выбираются отдельные точки (узлы). Узлы обеспечивают связь между соседними элементами и представление искомой функции в пределах элемента простым выражением.

Суть метода конечных элементов состоит в замене дифференциальных уравнений, описывающих процесс или объект системой алгебраических уравнений.

Большинство математических моделей содержит систему дифференциальных или интегральных уравнений относительно тех функций от координат и времени, которые являются важнейшими характеристиками исследуемого процесса. Следовательно, метод конечных элементов заменяет анализ сложной модели более простой задачей решения алгебраической системы, которая может содержать достаточно большое число неизвестных.

При реализации метода конечных элементов область можно разбить на элементы различной формы. В плоской модели, это, как правило, треугольные и четырехугольные, а в объемной постановке – тетраэдры и параллелепипеды, причем не обязательно прямоугольные. Иногда используются конечные элементы более высокого порядка (кубические), а также специальные, так называемые сингулярные элементы, которые используются, например, в механике разрушения.

Каждый элемент является частью заменяемой среды, т.е. сплошное тело лишь условно делится на отдельные элементы конечных размеров. Выделенный элемент имеет те же физические свойства и геометрические

9

характеристики, что и рассматриваемая конструкция в месте расположения элемента.

При построении дискретной модели поступают следующим образом [7]:

- в рассматриваемой области фиксируется конечное число точек. Эти точки называются узловыми точками или узлами;
- значения непрерывной величины в каждой узловой точке считается переменной, которая должна быть определена;
- область определения непрерывной величины разбивается на конечное число подобластей, называемых элементами. Эти элементы имеют общие узловые точки и в совокупности аппроксимируют форму области;
- непрерывная величина аппроксимируется на каждом элементе многочленом, который определяется с помощью узловых значений этой величины. Для каждого элемента определяется свой многочлен, но многочлены подбираются таким образом, чтобы сохранилась непрерывность величины вдоль границ элементов. Полином, связанный с каждым элементом, называют функцией элемента;
- объединение конечных элементов в ансамбль. В этом ансамбле узловые значения неизвестной функции должны быть отрегулированы таким образом, чтобы обеспечить наилучшее приближение к истинному непрерывному распределению. Этот этап приводит к алгебраической системе линейных уравнений относительно узловых значений. Эта система и является моделью искомой функции;
- решение полученной системы уравнений, то есть нахождение узловых значений;
- нахождение значения искомой величины в любой точке области по узловым значениям и функциям элементов.

#### 4 Программная реализация

## 4.1 Выбор программной среды

В настоящее время в технических вузах нашли своё применение мощные программные средства для компьютерного моделирования, в которых реализован метод конечных элементов, например, COMSOL Multiphysics, ANSYS, MSC.Nastran и др. Данные программные пакеты предназначены для моделирования физический процессов из множества областей.

ANSYS - это универсальная программная система конечноэлементного анализа, имеющая широкое применение у специалистов в сфере автоматизированных расчётов и конечно - элементных решений нелинейных и линейных, стационарных и нет пространственных задач механики, теплопередачи и теплообмена, электродинамики и т.д.

MSC Nastran - это современная расчетная система. На компьютере создается точная модель изделия и глобально исследуется её функционирование в рабочих и экстремальных условиях, тем самым, модернизируя изделие, исходя из "компьютерных испытаний". MSC Nastran обеспечивает полный набор расчетов, таких как анализ устойчивости, исследование установившихся и неустановившихся динамических процессов, решение задач теплопередачи, нелинейных статических и нелинейных переходных процессов и т.д.

СОМЅОL Multiphysics – это программная среда, которая обеспечивает все этапы моделирования (установление геометрических параметров, формулировка физики, визуализация), даёт возможность моделировать любые физические процессы, которые могут быть представлены в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных. Среди рассматриваемых дисциплин — механика конструкций, теплоперенос, инженерная химия, электротехника, оптические и высокочастотные эффекты и т.д.

11

Для данной работы выбран пакет мультифизического моделирования COMSOL Multiphysics 5.1, так как данная задача построена на решении дифференциальных уравнений в частных производных, также COMSOL позволяет воссоздать любой физический процесс и достаточно удобен в использовании.

## 4.2 Описание пакета COMSOL Multiphysics 5.1

COMSOL первая и единственная интегрированная программная среда, которая позволяет работать с мультифизическими моделями, а также создавать простые и удобные приложения для моделирования.

Версия COMSOL Multiphysics 5.1 вышла в 2015 году, поэтому работа в этой среде моделирования на данный момент является актуальной.

COMSOL Multiphysics версии 5.1 может увеличить продуктивность работы при помощи 20 демонстрационных приложений, новой библиотеки функций, возможности отправлять отчеты о результатах моделирования по электронной почте и более тесной интеграции между Средами разработки моделей (Model Builder) и приложений (Application Builder). Также, новая версия позволяет открывать и изучать модели и приложения даже когда лицензия не содержит все необходимые модули. Для случаев моделирования бесконечных областей появилась возможность отображать поля за границами расчетной сетки. Последняя возможность будет полезна, моделирования распространения например. для акустических волн, радиочастот, микроволн, оптических и упругих волн.

В области механики, ряд обновлений включает гигроскопическое расширение и нелинейные материалы для мембран. Новая библиотека оптических материалов порадует специалистов в сфере оптики. Новый инструмент анализа геометрии катушек позволяет моделировать катушки с переменным сечением.

COMSOL Server получил возможность распределять нагрузку запуская приложения на разных компьютерах. Среда разработки приложений

12

стала еще лучше, получив ряд усовершенствований таких как улучшенная обработка файлов, поиск по фразам и ключевым словам, сортировка таблиц и т.д [7].

Более 25 модулей получили обновления и новые возможности, которые предназначены для создания моделей любых типов физик в различных областях.

Преимущества пакета COMSOL Multiphysics [9]:

- моделирование основано на дифференциальных уравнениях в частных производных (PDE) и позволяет решать уравнения методом конечных элементов;
- позволяет расширять стандартные модели, использующие одно дифференциальное уравнение, в мульти-физические модели для расчета связанных между собой физических явлений;
- коэффициенты PDE задаются в виде понятных физических свойств и условий, таких как: теплопроводность, теплоемкость, коэффициент теплоотдачи, объемная мощность;
- использование различных математических способов для задания систем;
- различные виды анализа (стационарный и переходный анализ, линейный и нелинейный анализ, модальный анализ и анализ собственных частот);
- применяется конечноэлементный анализ вместе с сеткой, учитывающей геометрическую конфигурацию тел и контролем ошибок с использованием разнообразных и дополнительных численных решателей;
- позволяет с помощью переменных связи (coupling variables)
   соединять модели в разных геометриях и связывать между собой модели разных размерностей.

Модуль AC/DC предназначен для моделирования задач электромагнитных явлений как переменного, так и постоянного тока. При

помощи предварительно подготовленных приложений можно моделировать электромоторы, электромагниты, трансформаторы напряжения и тока, индукторы, конденсаторы, микросенсоры и др. Модуль AC/DC содержит приложения для общего статического и квазистатического электромагнетизма двухмерных (2D) и трехмерных (3D) моделей, включая симметрические геометрии. При расчетах моделей можно осуществить статический, гармонический и переходный анализ или анализ явлений во времени и т.д. [8].

# 4.3 Программная реализация алгоритма расчета магнитного поля плазменного шнура в пакете программ COMSOL Multiphysics 5.1

Реализация алгоритма расчета магнитного поля плазменного шнура производилась в интегрированной программной среде COMSOL Multiphysics 5.1. В соответствии с методикой моделирования физических процессов в данном пакете программ, требуется выполнить следующие шаги:

- выбор начальных параметров моделирования;
- определение расчетной области и задание геометрии модели;
- задание переменных и исходных данных;
- формирование начальных условий;
- установление физических свойств объекта;
- задание граничных условий;
- задание параметров и генерации сетки;
- задание параметров решающего устройства;
- запуск задачи на счет;
- настройка режима отображение результатов.

#### Выбор начальных параметров моделирования

Работа в программной среде COMSOL Multiphysics 5.1 начинается с выбора одного из вариантов создания моделей: *Model Wizard* (Мастер создания моделей) или *Blank Model* (Пустая модель). В данной работе берется первый вариант. После сделанного выбора откроется диалоговое окно,

представленное на рисунке 2, в котором необходимо задать размерность пространства (*Select Space Dimension*), в данном случае берётся 2D Axisymmetric.



Рисунок 2 - Окно Select Space Dimension

В следующем окне Select Physics (Выбор физики) нужно сделать выбор вкладки Magnetic Field (Магнитное поле). Для этого щелчком мыши открывается модуль AC/DC, выбираем Magnetic Field и, нажав кнопку Add Physics (Добавить физику), фиксируем выбор физики.

Так нелинейных как данная задача связана С решением дифференциальных уравнений в частных производных, то необходимо добавить General Form PDE (Общая форма ДУЧП). Для этого, выбирается вкладка *Mathematics* (Математика), затем *PDE Interfaces* (Интерфейсы ДУЧП). После того, как раскроется список шаблонов, дважды щелкаем на General Form PDE. После добавления всех физик, в окошке Added physics interface (Добавленные физики) должны появится необходимые элементы, как представлено на рисунке 3.



Рисунок 3 - Окно Select Physics

Для продолжения следует нажать кнопку *Study* (Исследование). Необходимо из вкладки *Select Study* (Выбор исследования) раскрыть список *Present Studies* (Предустановленные типы исследований) и выбрать стационарное исследование (*Stationary*). После добавления данных свойств щелчком мыши активируется кнопка

## Определение расчетной области и задание геометрии модели

Геометрическая модель включает в себя шесть элементов, которые представляют собой прямоугольники. Размеры компонентов, составляющих расчетную область, приведены в таблице 1.

	Прямоуголь	Размеры	Размеры	r	Z
	ник	вдоль r, м	вдоль z,		
			М		
Внешняя область	R1	0.8	1.6	0	-0.8
катушка	R2	0.026	0.052	0.01	0.034
катушка	R3	0.026	0.052	0.01	-0.0865
Плазменный шнур	R4	0.1	1.6	0	-0.8
анод	R5	0.05	0.01	0	0.15
катод	R6	0.05	0.01	0	-0.15

Таблица 1 - Размеры моделируемой геометрии

На рисунке 4 представлена геометрия.



Рисунок 4 - Расчетная область: 1 - внешняя область; 2, 3– соленоидальные катушки; 4 – плазменная трубка; 5 – анод; 6– катод.

Для создания геометрии в COMSOL Multiphysics 5.1 следует выбрать элемент древовидного меню *Geometry 1* (Геометрия 1). Щелкаем по нему правой кнопкой мыши, выбираем построение прямоугольников (*Rectangle*) и задаём размеры в разделе *Settings-> Size*, в соответствии с параметрами ввода, представленными в таблице 1. Тип объекта (*Object type*) задаём *Solid* (Твердое тело) для каждого элемента. Заданные данные представлены на рисунке 5.

Setti Rectar Bui Bui	ngs ngle Id Selected 🔻 Id All Objects	* #	
Label:	Plasma colum	n ^	
▼ Oł	oject Type		
Туре:	Solid	~	
🔻 Siz	ze –		
Width:	0.05	m	
Height	0.4	m	
<ul> <li>Position</li> </ul>			
Base:	Corner v		
r:	0	m	
Z:	0	m	

Рисунок 5 - Окно Settings Rectangle

После выполнения этих действий, кликаем мышкой по значку *Build All Objects* (Построение всех объектов) и на экране появится требуемая модель, представленная на рисунке 6.



Рисунок 6 - Геометрия модели

После того, как все элементы модели созданы, необходимо объединить все получившиеся объекты. Для этого в построителе моделей в разделе *Component 1* (Компонент 1) щелкнуть правой кнопкой мыши по вкладке *Geometry 1* (Геометрия 1), выбрать *Booleans and Partitions* (Логические операции и разбиение) и открыть элемент древовидного меню *Compose* (Составление). В этом окошке в *Input objects* (Входные компоненты) выбрать все элементы модели и в строке *Set formula* и представить, как r1+r2+r3+r4+r5+r6. На рисунке 7 представлено окно настроек *Compose*.

Settings Compose Build Selected - III	♥ J Build All Objects		
Label: Compose 1			
<ul> <li>Compose</li> </ul>			
Input objects:           Imperiation         r1           r2         r3           r4         r5           r6         r6	<b>十</b> 顾 使		
Keep input objects			
Set formula:	r1+r2+r3+r4+r5+r6		
Keep interior boundaries			
Relative repair tolerance: 1E-6			

Рисунок 7 - Вкладка Compose

Задание исходных данных и переменных

В Построителе моделей, щелкнув правой кнопкой мыши Global Definitions (Глобальные определения), необходимо выбрать Parameters (Параметры). В окне настроек параметром Settings (Настройки) в таблице Parameters (Параметры) или в полях под этой таблицей следует задать переменные, согласно таблице 2. В таблицу Parameters заносятся значения переменных, их единицы измерения и, по желанию, можно добавить описания переменных. Далее они будут использоваться для расчетов.

Таблица 2 – Исходные данные

<ul> <li>Param</li> </ul>	eters		
** Name	Expression	Value	Description
p0	4000[Pa]	4000 Pa	Gas pressure
I	120[A]	120 A	Current
n	270	270	
deltaR	0.026[m]	0.026 m	
n0	10^16[m^-3]	1E16 1/m <sup>3</sup>	
Te	5[eV]	8.0109E-19 J	
f1	1	1	
mu0	4*pi*10^-12[H/m]	1.2566E-11 H/	
h	0.052[m]	0.052 m	

В таблицу занесены переменные, соответствующие математической постановке задачи, где p0 – начальное давление;

I – ток в катушке;

n – число витков;

h – размеры катушки вдоль оси z;

deltaR – размеры катушки по радиусу;

n0 – концентрация частиц плазмы на оси канала транспортировки;

Те – электронная температура;

f1 – функция, описывающая неоднородность давления плазмы по радиусу;

mu0 – магнитная проницаемость.

Для создания переменных, описанных функциями, требуется раскрыть Global Definitions, открыть вкладку Component 1 (Компонента 1), раскрыть Definition (Определения), выбрать из представленного списка Variables 1 (Переменные 1). После выполненных действий откроется окно Settings (Настройки), в котором появится таблица Variables (Переменные), её необходимо заполнить согласно таблице 3. Переменные  $J_m$  и  $J_e$ , заполняем согласно формулам 2 и 6. Переменная *и* является встроенной, поэтому задавать её ранее не надо.

Таблица 3 – Задание переменных

<ul> <li>Variab</li> </ul>	les		
** Name	Expression	Unit	Description
f2	1-(r/3)^2	m²	
f3	1-(r/9.5)^2	m²	
р	n0*Te*f3	J/m	
p1	p0*f1	Pa	
Je	I*n/(h*deltaR)	A/m²	
Jm	(-p*(2*r*uz*(2*u+r*ur)*(3*uz+2*r*urz)+(((2*u		

В таблицу занесены переменные, соответствующие математической постановке задачи, где f2, f3 – функции, описывающие неоднородность давления плазмы по радиусу;

р, p1, p2, p3 – давления плазмы поперёк силовых линий внешнего магнитного поля;

J<sub>e</sub>- внешнее магнитное поле;

J<sub>m</sub> – плотность диамагнитного тока, возникающая в неоднородной плазме.

Для загрузки материала необходимо нажать правой кнопкой мыши на вкладку *Materials* (Материалы), выбрать из раскрывающегося списка *Add Material* (Добавить материал) и выбрать *Air* (воздух). После того, как материал загружен, в области настроек, в таблице *Material Overview*, можно увидеть добавленный материал. Раскрыв список *Materials* (Материалы) и, щелкнув на *Air* (воздух), в окне настроек, в области *Geometric Enity Selection* (Выбор геометрических элементов), выберем все элементы. Всё остальное без изменений.

Для создания внешнего магнитного поля, выберем *Component* 1-> *Magnetic Fields* (Магнитное поле) -> *External Current Density1* (Внешняя плотность тока). В открывшемся окне настроек *Domain Selection* (Выбор

области) выбрать области, в которых будет задаваться внешняя плотность тока – это катушки, на рисунке 8 они выделены.



Рисунок 8 - Элементы модели с внешней плотность тока

Пролистнув это окно до самого конца остановимся на вкладке *External Current Density* (Внешняя плотность тока). В одноименной таблице необходимо задать значение тока  $(J_e)_{\varphi}$  равное 32579185.5. Данное значение получилось при расчете тока по формуле 2. Остальные значения без изменений. Должно получиться так, как показано на рисунке 9.

Exte	rnal current density:		
	0	r	
Je	32579185.5	phi	A/m <sup>2</sup>
	0	z	

Рисунок 9 - Внешняя плотность тока

Открыв вкладку General Form PDE появится окно настроек, в пункте Domain Selection (Выбор области) указать область плазменного шнура. Для этого, в предложенном списке Selection (Выбор) выбираем Manual (Ручной режим) и удаляем все области, кроме той, где указан шнур. Затем в пункте Units (Блоки) в списке Dependent variable quantity (Зависимая переменная) выбираем Magnetic Fields (Магнитное поле). А немного ниже, в списке Source term quantity (Источник выражения) поставим Magnetic vector potential (Векторный потенциал). Результат должен соответствовать рисунку 10.

Domain Selection	
Selection: Manual	•
Active 1	* + ■ - © X ⊕
▼ Units	
Dependent variable quantity	
Magnetic field (A/m)	•
- Source term quantity	
Magnetic vector potential (Wb/m)	•

Рисунок 10 – Окно General Form PDE

Далее заходим в General Form PDE. Здесь в пункте Equation (Уравнение) представлен общий вид нелинейного уравнения. Общий вид необходимо преобразовать под данную задачу. В текущем случае задача является стационарной, поэтому, коэффициенты, которые стоят перед производной по времени обращаем в ноль. Функцию, описывающую правую часть уравнения, зададим как указано в формуле 6. Коэффициент  $\Gamma$  оставим без изменений. Итог показан на рисунке 11.

<ul> <li>Equation</li> </ul>
Show equation assuming:
Study 1, Stationary 🔹
$e_{\mathbf{a}}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_{\mathbf{a}}\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma = f$
$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial z}\right]$
<ul> <li>Conservative Flux</li> </ul>
-ur         r           -uz         z
<ul> <li>Source Term</li> </ul>
f -mu0*(Je+Jm) Wb/m
<ul> <li>Damping or Mass Coefficient</li> </ul>
d <sub>a</sub> 0 kg·m <sup>2</sup> /(s·A <sup>2</sup> )
<ul> <li>Mass Coefficient</li> </ul>
e <sub>a</sub> 0 kg·m²/A²

Рисунок 11 – Окно Equation

В пункте *Initial Values 1* (Начальные значения) задаём значения переменной *и* равной 0.15.

## Генерация сетки

Сетка генерируется следующим образом: выбираем вкладку Mesh 1 (Сетка) для создания сетки. В появившемся окне Settings (Настройки) в разделе Mesh (Сетка) из списка Sequence type (Тип последовательности) выбираем Physics-controlled mesh (Сетка под управлением физики), размер элемента в Element size, нажимаем мышкой на значок Build All (Строить всё) и получаем геометрию, всю покрытую неравномерными треугольниками. По-другому, выбрав сетку можно создать, ИЗ списка Sequence type (Тип последовательности) User-controlled mesh (Сетка под управлением пользователя). Далее в разделе Mesh 1 щелкнуть Size (Размер). В данном блоке разделе Element Size (Размер элемента) выбрать кнопку Custom В (Пользовательский). Далее можно задать различные значения элементов, в зависимости от того, насколько мелкая или крупная нужна сетка. Для данной работы сетка задавалась так, как представлено на рисунке 12.

Element Size		
Calibrate for:		
General physics	•	
Predefined     Normal	Ŧ	
Oustom		
<ul> <li>Element Size Parameters</li> </ul>		
Maximum element size:		
0.107	m	=
Minimum element size:		
4.8E-4	m	
Maximum element growth rate:		
1.2		
Curvature factor:		
0.2		
Resolution of narrow regions:		
0.5		Ļ

Рисунок 12 – Раздел Size

В результате сетка для данной модели выглядит так, как показано на рисунке 13.



Запуск задачи на счет

Запуск задачи на счет выполняется следующим образом. Из древовидного меню вбирается вкладка *Study 1* (Исследование 1). После её выбора открывается окно *Settings Stationary*, в котором необходимо выбрать кнопку *Compute* (Вычисление). После этого, COMSOL Multiphysics начнёт решать данную задачу. Для реализации метода конечных элементов использовался нелинейный решатель. Если всё было выполнено верно, то должны получиться результаты, которые будут представлены в главе «Проведение вычислительных экспериментов и обсуждение результатов».

#### Настройка режима отображения

Для графического отображения полученных результатов в программной среде COMSOL Multiphysics используется раздел *Results* (Результаты).

В древовидном меню необходимо выбрать *Results* (Результаты), после щелчка правой кнопкой мыши по нему, выпадет список для построения различный графиков. Для данной работы необходимо выбрать *1D Plot Group*. Для создания графика, необходимо указать координаты точек, через которые будет проходить прямая, с которой будут считываться данные. Координаты

точек указываются в разделе *Data Sets* (Набор данных) добавлением элементов *Cut Line 3D*. В этом пункте указываются координаты точек прямой, которая необходима. Далее в *1D Plot Group* добавляют линейный график (*Line Graph*). И уже в пункте *Line Graph* ссылаются на *Cut Line 3D* в окне настроек, подписывают оси, строят легенду и всё необходимое.

## 5 Результаты проведения экспериментов и обсуждение результатов

Целью проведения вычислительных экспериментов является проведение контрольных расчетов, направленных на исследование влияния входных переменных на результаты, для оценки чувствительности модели.

## 5.1 Контрольные расчеты

После запуска задачи на счет получены результаты моделирования в виде распределения магнитной индукции. На рисунке 14 представлена 2D геометрия модели в исходном и увеличенном представлении.



Рисунок 14 – Магнитная индукция и направление силовых линий в 2D геометрии

На рисунке 15 представлена 3D геометрия модели в исходном и увеличенном представлении.



Рисунок 15 – Магнитная индукция и направление силовых линий в 3D геометрии

На данных рисунках направление силовых линий магнитного поля показаны стрелками. Модификация магнитной индукции представлена изменением цветовой палитры. Модель реализована правильно, т.к. она соответствует математической постановке задачи. В катушках, как видно из рисунков, создается внешнее магнитное поле, которое удерживает плазму. Стоит заметить, что поле, внутри плазменного шнура меньше, это соответствует определению диамагнетизма плазмы.

Для расчетов использовались наиболее интересные и часто применяемые параметры плазмы:

- величина тока *I* = 160 А;
- количество витков в катушке n = 270;
- размеры катушки вдоль оси z *h*=0,052 м;
- размеры катушки по радиусу  $\Delta R = 0,26$  м;
- концентрация частиц плазмы на оси канала транспортировки  $n_0 = 10^{10} \div 10^{15} cm^{-3};$
- электронная температура  $T_e = 1 \div 10 \Im B$ ;

- начальное давление  $p_0 = 1 \div 6000 \Pi a$ .

Функция f(r), которая описывает распределение плазмы, и, зависящая от радиуса r, задавалась следующим образом:

- 1)  $f_1=1;$
- 2) *f*<sub>2</sub>=1-(*r*/3)<sup>2</sup>, где *r*<3 или *r*>3, *f*<sub>2</sub>=0;
- 3)  $f_3=1-(r/9,5)^2$ .

На рисунках 16 и 17 представлены результаты расчетов плотности тока намагниченности плазмы  $J_{\varphi}$  в зависимости от расстояния до катода z, при использовании различных давлений плазмы  $p_{\perp}$ :

- 1)  $(1 \div 6000) f_1 \Pi a;$
- 2) 2000 *f*<sub>2</sub> Па;
- 3) 4000 *f*<sub>2</sub> Па;
- 4) 6000 *f*<sub>2</sub> Па;
- 5) 2000 *f*<sub>3</sub> Па;
- 6) 4000 *f*<sub>3</sub> Па;
- 7) 6000 *f*<sub>3</sub> Па;



Рисунок 16 – Плотность тока с расстоянием до катода r = 2 см



Рисунок 17 - Плотность тока с расстоянием до катода r = 5 см

Из полученных результатов можно сказать, что определение плотности тока  $J_{\varphi}$  зависит от давления  $p_{\perp}$  и выбора функции распределения плазмы. Так, при выборе параболической зависимости функции  $f_2$  плотность тока значительно меньше, чем при выборе функции  $f_3$ . Также из графиков следует, чем больше давление, тем меньше плотность тока.

На рисунке 18 представлена зависимость магнитной индукции  $B_z$  от давления плазмы  $p_{\perp}$ , с расстоянием до катода, которое равно 2 см.



Рисунок 18 - Зависимость  $B_z$  от различного давления плазмы с расстоянием до катода r = 2 см

На рисунке 19 представлена зависимость магнитной индукции  $B_z$  от давления плазмы, с расстоянием до катода равным 5 см.



Из полученных результатов видно, что магнитная индукция  $B_z$  зависит от различного давления плазмы и от расстояния до катода. При увеличении давления от 1 до 6000 Па величина магнитной индукции уменьшая на 12%. Зависимость от вида функции радиального распределения давления f(r) влечет за собой уменьшение магнитной индукции  $B_z$ . При зависимости магнитной индукции от  $f_2$  её убывание меньше, чем в 1,5-2 раза, в отличие от зависимости от  $f_3$ .

## Заключение

В ходе выполнения выпускной квалификационной работы получены следующие результаты:

- на основании проанализированной литературы разработана математическая модель, которая позволяет рассмотреть влияние диамагнетизма плазмы на магнитное поле;
- 2) в среде моделирования COMSOL Multiphysics 5.1 реализована модель плазменной пушки с плазмой, удерживаемой магнитным полем, создаваемым системой соосных соленоидальных катушек;
- 3) составлен пошаговый алгоритм моделирования плазменной пушки;
- 4) приведенные иллюстрации в 2D и 3D геометрии показывают, что модель реализована корректно;
- 5) исследовано влияние давления на магнитную индукцию: при увеличении давления, магнитная индукция уменьшается;
- при зазоре между поверхностью плазмы и стенками трубы магнитная индукция внутри плазменного шнура уменьшается сильнее (1,5 – 2 раза).

В дальнейшем предполагается параметрическая оптимизация, с использованием параллельных вычислений.