УДК 519.2:621.391

О СТРУКТУРЕ КОЛИЧЕСТВА ИНФОРМАЦИИ В СОВМЕСТНОЙ ЗАДАЧЕ ФИЛЬТРАЦИИ И ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ С ПАМЯТЬЮ. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Н.С. Демин*, С.В. Рожкова**

*Томский государственный университет,
**Томский политехнический университет
E-mail: svrhm@rambler.ru

Рассматривается проблема нахождения количества информации по Шеннону в совместной задаче фильтрации и интерполяции стохастических процессов по непрерывно-дискретным наблюдениям с памятью. Получены соотношения, определяющие эволюцию во времени шенноновских мер количества информации в форме разложений, в которых в явном виде выделены количество информации для раздельных задач фильтрации и интерполяции.

1. Введение

В системах калмановского типа [1, 2] основным математическим объектом является пара процессов $\{x_t;y_t\}$ с непрерывным либо дискретным временем, где x_t является ненаблюдаемым процессом, а y_t – наблюдаемым процессом. Обобщением является ситуация, когда x_t – процесс с непрерывным временем, а $y_t=y(t,t_m)=\{z_t;\eta(t_m)\}$, $m=0,1,...$, т.е. наблюдается совокупность процессов с непрерывным z_t и дискретным $\eta(t_m)$ временем, которые обладают памятью относительно ненаблюдаемого процесса и зависят как от текущих так и от прошлых значений процесса x_t. Для подобного класса процессов в [3, 4] рассмотрена задача фильтрации, в [5, 6] – задача обобщенной экстраполяции, а в [7] – задача распознавания. Любая статистическая задача имеет информационный аспект [8], суть которого заключается в нахождении соответствующих количеств информации о значениях ненаблюдаемого процесса (полезного сигнала), которые содержатся в реализациях наблюдаемых процессов (сигналов на выходе каналов передачи). Кроме того, знание количества информации позволяет исследовать вопросы, являющимися специфическими в теории информации, такие как минимизация ошибки воспроизведения сигнала [9, 10], максимизация пропускной способности каналов передачи [11], оптимальная передача сигналов [12], а также вопросы информационного обоснования задач оценивания [13, 14]. Для подобного класса процессов $\{x_t;z_t;\eta(t_m)\}$ в [15, 16] рассмотрен информационный аспект задачи фильтрации в случае наблюдений без памяти и с памятью единичной кратности, а в [8] – совместной задачи фильтрации и обобщенной экстраполяции в случае памяти произвольной памяти. В данной работе рассматриваются вопросы нахождения шенноновских мер количества информации $I^t_{\tau,t}[x_t,x_{\tau_1},...,x_{\tau_N};z^t_0,\eta^m_0]$ о значениях x_t, x_{τ_1}, ..., x_{τ_N} ненаблюдаемого процесса в текущем t и произвольном числе прошлых моментов $\tau_1,...,\tau_N$ времени, которые содержатся в реализациях наблюдаемых процессов, в форме представления $I^t_{\tau,t}[\cdot]$ через информационные количества $I_t[x_t;z^t_0,\eta^m_0]$ и $I^t_\tau[x_{\tau_1},...,x_{\tau_N};z^t_0,\eta^m_0]$ о текущих и прошлых значениях ненаблюдаемого процесса, соответственно.

Используемые обозначения: $\mathbf{P}\{\cdot\}$ – вероятность события; $M\{\cdot\}$ – математическое ожидание; $tr[A]$ – след матрицы; D^{-1} – обращение матрицы D; D^T – транспонирование матрицы или вектора; если $\varphi(x)$ – скалярная функция n-мерного аргумента x, то $\partial\varphi/\partial x$ есть вектор столбец с компонентами $\partial\varphi/\partial x_k$, $k=\overline{1;n}$, а $\partial^2\varphi/\partial x^2$ есть матрица с компонентами $\partial^2\varphi/\partial x_k\partial x_l$, $k=\overline{1;n}$, $l=\overline{1;n}$; $\partial\varphi(x_t)/\partial x_t$ и $\partial^2\varphi(x_t)/\partial x^2_t$ означают $\partial\varphi(x)/\partial x|_{x=x_t}$ и $\partial^2\varphi(x)/\partial x^2|_{x=x_t}$.

2. Постановка задачи

На вероятностном пространстве $(\Omega,\mathbf{F},F=(\mathbf{F}_t)_{t\geq 0},\mathbf{P})$ не наблюдаемый n-мерный процесс x_t (полезный сигнал) и наблюдаемый l-мерный процесс z_t (сигнал на выходе непрерывного канала передачи) определяются стохастическими дифференциальными уравнениями [17, 18]

$$dx_t = f(t,x_t)dt + \Phi_1(t)w_t,\ t\geq 0, \quad (2.1)$$

$$dz_t = h(t,x_1,x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_N},z)dt + \Phi_2(t,z)dv_t, \quad (2.2)$$

а наблюдаемый q-мерный дискретный процесс $\eta(t_m)$ (сигнал на выходе дискретного канала передачи) имеет вид

$$\eta(t_m) = g(t_m,x_{t_m},x_{\tau_1},\cdots,x_{\tau_N},z) + \Phi_3(t_m,z)\xi(t_m),\ m=0,1,..., \quad (2.3)$$

где $0\leq t_0<\tau_N<\cdots<\tau_1<t_m\leq t$. Предполагается: 1) w_t и v_t являются стандартными винеровскими процессами размеров r_1 и r_2, $\xi(t_m)$ стандартная белая гауссовская последовательность размера r_3; 2) x_0, w_t, v_t, $\xi(t_m)$ – независимы; 3) $h(\cdot)$, $\Phi_2(\cdot)$ и $g(\cdot)$, $\Phi_3(\cdot)$ являются неупреждающими функционалами от реализаций соответственно $z=z^t_0=\{z_\sigma:0\leq\sigma\leq t\}$ и $z=z_0^{t_m}$ наблюдаемого процесса z_t; 4) коэффициенты уравнений (2.1) и (2.2) удовлетворяют условиям [17, 18], обеспечивающим существования решений, а $g(\cdot)$ – непрерывна по всем аргументам; 5) $Q(\cdot)=\Phi_1(\cdot)\Phi^T_1(\cdot)>0$, $R(\cdot)=\Phi_2(\cdot)\Phi^T_2(\cdot)>0$, $V(\cdot)=\Phi_3(\cdot)\Phi^T_3(\cdot)>0$; 6) задана начальная плотность $p_0(x_0)=\partial\mathbf{P}\{x_0\leq x\}/\partial x$.

Замечание 1. Модели процессов z_t и $\eta(t_m)$ вида (2.2), (2.3), соответствуют наблюдениям с фиксированной памятью, если τ_k=const, и наблюдениям со скользящей памятью, если $\tau_k=t-t^*_k$ в (2.2) и $\tau_k=t_m-t^*_k$ в (2.3), где t^*_k=const, $k=\overline{1;N}$ [5, 6]. В данной работе рассматривается случай фиксированной памяти. Зависимость $h(\cdot)$ и $g(\cdot)$ от z означает, что каналы наблюдения обладают бесшумной обратной связью относительно процесса z_t [11, 12, 18]. Отсутствие обратной связи, когда $h(\cdot)$ и $g(\cdot)$ не зависят от z, следует как частный случай.

Ставится задача: найти соотношения, определяющие эволюцию во времени совместного количества информации $I^t_{\tau,t}[x_t,x_{\tau_1},...,x_{\tau_N};z^t_0,\eta^m_0]$ о текущих x_t и прошлых $x_{\tau_1},...,x_{\tau_N}$ значениях ненаблюдаемого процесса, которое содержится в совокупности реализаций $z^t_0=\{z_\sigma:0\le\sigma\le t\}$ и $\eta^m_0=\{\eta(t_0),\eta(t_1),...,\eta(t_m);t_m\le t\}$ наблюдаемых процессов в виде представлений $I^t_{\tau,t}[\cdot]$ через информационные количества $I_t[x_t;z^t_0,\eta^m_0]$ и $I^t_\tau[x_{\tau_1},...,x_{\tau_N};z^t_0,\eta^m_0]$ о текущих и прошлых значениях ненаблюдаемого процесса, соответственно.

Решение поставленной задачи может быть осуществлено на основе представления количества информации через плотности распределения вероятностей с использованием формул Ито [17, 18] и Ито-Вентцеля [19, 20] с использованием результатов [1, 2]. Если, аналогично [5, 7], ввести расширенные процессы и переменные

$$\tilde{x}^N_\tau=\begin{bmatrix} x_{\tau_1}\\ \cdots \\ x_{\tau_N}\end{bmatrix},\ \tilde{x}^{N+1}_{t,\tau}=\begin{bmatrix} x_t\\ \tilde{x}^N_\tau\end{bmatrix},\ \tilde{x}_N=\begin{bmatrix} x_1\\ \cdots \\ x_N\end{bmatrix},\ \tilde{x}_{N+1}=\begin{bmatrix} x\\ \tilde{x}_N\end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

то в предположении существования плотностей вероятности ($\tilde{\tau}_N=[\tau_1,...,\tau_N]$)

$$p^t_\tau(x;\tilde{x}_N)=\partial^{N+1}\mathbf{P}\{x_t\le x;\tilde{x}^N_\tau\le\tilde{x}_N\mid z^t_0,\eta^m_0\}/\partial x\partial\tilde{x}_N\ , \tag{2.5}$$

$$p(t,x;\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N)=\partial^{N+1}\mathbf{P}\{x_t\le x;\tilde{x}^N_\tau\le\tilde{x}_N\}/\partial x\partial\tilde{x}_N\ , \tag{2.6}$$

$$p_t(x)=\partial\mathbf{P}\{x_t\le x\mid z^t_0,\eta^m_0\}/\partial x, \tag{2.7}$$

$$p(t,x)=\partial\mathbf{P}\{x_t\le x\}/\partial x, \tag{2.8}$$

$$p^t_\tau(\tilde{x}_N)=\partial^N\mathbf{P}\{\tilde{x}^N_\tau\le\tilde{x}_N\mid z^t_0,\eta^m_0\}/\partial\tilde{x}_N\ , \tag{2.9}$$

$$p(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N)=\partial^N\mathbf{P}\{\tilde{x}^N_\tau\le\tilde{x}_N\}/\partial\tilde{x}_N\ , \tag{2.10}$$

$$p^t_{\tau|t}(\tilde{x}_N\mid x)=\partial^N\mathbf{P}\{\tilde{x}^N_\tau\le\tilde{x}_N\mid x_t=x,z^t_0,\eta^m_0\}/\partial\tilde{x}_N\ , \tag{2.11}$$

$$p(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N\mid t,x)=\partial^N\mathbf{P}\{\tilde{x}^N_\tau\le\tilde{x}_N\mid x_t=x\}/\partial\tilde{x}_N\ , \tag{2.12}$$

$$p^t_{t|\tau}(x\mid\tilde{x}_N)=\partial\mathbf{P}\{x_t\le x\mid\tilde{x}^N_\tau=\tilde{x}_N,z^t_0,\eta^m_0\}/\partial x, \tag{2.13}$$

$$p(t,x\mid\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N)=\partial\mathbf{P}\{x_t\le x\mid\tilde{x}^N_\tau=\tilde{x}_N\}/\partial x, \tag{2.14}$$

имеют место формулы [9, 10]

$$I^t_{\tau,t}[\tilde{x}^N_\tau,x_t;z^t_0,\eta^m_0]=I_t[x_t;z^t_0,\eta^m_0]+I^t_{\tau|t}[\tilde{x}^N_\tau;z^t_0,\eta^m_0\mid x_t], \tag{2.15}$$

$$I^t_{\tau,t}[\tilde{x}^N_\tau,x_t;z^t_0,\eta^m_0]=I^t_\tau[\tilde{x}^N_\tau;z^t_0,\eta^m_0]+I^t_{\tau|t}[x_\tau;z^t_0,\eta^m_0\mid\tilde{x}^N_\tau], \tag{2.16}$$

$$I^t_{\tau,t}[\tilde{x}^N_\tau,x_t;z^t_0,\eta^m_0]=M\{\ln[p^t_\tau(x_t;\tilde{x}^N_\tau)/p(t,x_t;\tilde{\tau}_N,\tilde{x}^N_\tau)]\}, \tag{2.17}$$

$$I_t[x_t;z^t_0,\eta^m_0]=M\{\ln[p_t(x_t)/p(t,x_t)]\}, \tag{2.18}$$

$$I^t_{\tau|t}[\tilde{x}^N_\tau;z^t_0,\eta^m_0\mid x_t]=M\{\ln[p^t_{\tau|t}(\tilde{x}^N_\tau\mid x_t)/p(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}^N_\tau\mid t,x_t)]\}, \tag{2.19}$$

$$I^t_\tau[\tilde{x}^N_\tau;z^t_0,\eta^m_0]=M\{\ln[p^t_\tau(\tilde{x}^N_\tau)/p(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}^N_\tau)]\}, \tag{2.20}$$

$$I^t_{t|\tau}[x_t;z^t_0,\eta^m_0\mid\tilde{x}^N_\tau]=M\{\ln[p^t_{t|\tau}(x_t\mid\tilde{x}^N_\tau)/p(t,x_t\mid\tilde{\tau}_N,\tilde{x}^N_\tau)]\}. \tag{2.21}$$

Замечание 2. Предполагается, аналогично [8, 15, 16]: 1) выполняются условия применимости формул Ито и Ито-Вентцеля; 2) для стохастических интегралов $J_t=\int_0^t\Psi(\tau,\omega)d\chi_\tau$ по винеровским процессам χ_τ выполняется условие $M\{\int_0^t\Psi^2(\tau,\omega)d\tau\}<\infty$, обеспечивающее свойство $M\{\int_0^t\Psi(\tau,\omega)d\chi_\tau\}=0$ [17, 18].

3. Основные результаты

Утверждение 1. Апостериорная плотность (2.5) на интервалах $t_m\le t<t_{m+1}$ определяется уравнением (см. (2.2–2.4))

$$\begin{aligned} d_tp^t_\tau(x;\tilde{x}_N)&=L_{t,x}[p^t_\tau(x;\tilde{x}_N)]dt+p^t_\tau(x;\tilde{x}_N)\times\\ &\times[h(t,x,\tilde{x}_N,z)-\overline{h(t,z)}]^TR^{-1}(t,z)d\tilde{z}_t,\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$d\tilde{z}_t=dz_t-\overline{h(t,z)}dt \tag{3.2}$$

с начальным условием

$$p^{t_m}_\tau(x;\tilde{x}_N)=[c(x,\tilde{x}_N,\eta(t_m),z)/c(\eta(t_m),z)]p^{t_m-0}_\tau(x;\tilde{x}_N), \tag{3.3}$$

где $L_{t,x}[\cdot]$ – прямой оператор Колмогорова, соответствующий процессу (2.1),

$$\overline{h(t,z)}=M\{h(t,x_t,\tilde{x}^N_\tau,z)\mid z^t_0,\eta^m_0\},$$

$$c(\eta(t_m),z)=M\{c(x_{t_m},\tilde{x}^N_\tau,\eta(t_m),z)\mid z^{t_m}_0,\eta^{m-1}_0\},$$

$$\begin{aligned} c(x,\tilde{x}_N,\eta(t_m),z)&=\exp\{-\tfrac{1}{2}[\eta(t_m)-g(t_m,x,\tilde{x}_N,z)]\times\\ &\times V^{-1}(t_m,z)[\eta(t_m)-g(t_m,x,\tilde{x}_N,z)]\}\end{aligned}$$

и $p^{t_m-0}_\tau(x;\tilde{x}_N)=\lim p^t_\tau$ при $t\uparrow t_m$.

Данное утверждение следует из Теоремы 3, Леммы 4 в [3], и Замечания 1.

Теорема 1. Количество информации (2.17) может быть представлено в виде (2.15), где $I_t[\cdot]$ и $I^t_{\tau|t}[\cdot]$ на интервалах $t_m\le t<t_{m+1}$ определяются уравнениями

$$\begin{aligned} &dI_t[x_t;z^t_0,\eta^m_0]/dt=\\ &=(1/2)tr[M\{R^{-1}(t,z)[\overline{h(\tilde{\tau}_N,z\mid x_t)}-\overline{h(t,z)}]\times\\ &\times[\overline{h(\tilde{\tau}_N,z\mid x_t)}-\overline{h(t,z)}]^T\}]-\\ &-\frac{1}{2}tr\left[Q(t)M\left\{\frac{\partial\ln p_t(x_t)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial\ln p_t(x_t)}{\partial x_t}\right)^T-\right.\right.\\ &\left.\left.-\frac{\partial\ln p(t,x_t)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial\ln p(t,x_t)}{\partial x_t}\right)^T\right\}\right],\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} &dI^t_{\tau|t}[\tilde{x}^N_\tau;z^t_0,\eta^m_0\mid x_t]/dt=\\ &=(1/2)tr[M\{R^{-1}(t,z)[h(t,x_t,\tilde{x}^N_\tau,z)-\\ &-\overline{h(\tilde{\tau}_N,z\mid x_t)}]\ [\cdot]^T\}]-\\ &-\frac{1}{2}tr\left[Q(t)M\left\{\frac{\partial\ln p^t_{\tau|t}(\tilde{x}^N_\tau\mid x_t)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial\ln p^t_{\tau|t}(\tilde{x}^N_\tau\mid x_t)}{\partial x_t}\right)^T\right.\right.\\ &\left.\left.-\frac{\partial\ln p(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}^N_\tau\mid t,x_t)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial\ln p(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}^N_\tau\mid t,x_t)}{\partial x_t}\right)^T\right\}\right]-\\ &-tr\left[Q(t)M\left\{\frac{\partial\ln p^t_{\tau|t}(\tilde{x}^N_\tau\mid x_t)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial\ln p_t(x_t)}{\partial x_t}\right)^T-\right.\right.\\ &\left.\left.-\frac{\partial\ln p(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}^N_\tau\mid t,x_t)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial\ln p(t,x_t)}{\partial x_t}\right)^T\right\}\right]\end{aligned} \tag{3.5}$$

с начальными условиями

$$I_{t_m}[x_{t_m};z_0^{t_m},\eta_0^m]=I_{t_m-0}[x_{t_m};z_0^{t_m},\eta_0^{m-1}]+\Delta I_{t_m}[x_{t_m};z_0^{t_m},\eta(t_m)], \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} I_{\tau|t_m}^{t_m}[\tilde{x}_\tau^N;z_0^{t_m},\eta_0^m\mid x_{t_m}]&=I_{\tau|t_m}^{t_m-0}[\tilde{x}_\tau^N;z_0^{t_m},\eta_0^{m-1}\mid x_{t_m}]+\\ &+\Delta I_{\tau|t_m}^{t_m}[\tilde{x}_\tau^N;z_0^{t_m},\eta(t_m)\mid x_{t_m}], \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\Delta I_{t_m}[x_{t_m};z_0^{t_m},\eta(t_m)]=M\{\ln[\overline{c(\eta(t_m),z\mid x_{t_m})}/c(\eta(t_m),z)]\}, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} &\Delta I_{\tau|t_m}^{t_m}[\tilde{x}_\tau^N;z_0^{t_m},\eta(t_m)\mid x_{t_m}]=\\ &=M\left\{\ln[c(x_{t_m},\tilde{x}_\tau^N,\eta(t_m),z)/\overline{c(\eta(t_m),z\mid x_{t_m})}]\right\}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\overline{h(\tilde{\tau}_N,z\mid x)}=M\{h(t,x_t,\tilde{x}_\tau^N,z)\mid x_t=x;z_0^t,\eta_0^m\}, \quad (3.10)$$

$$c(\eta(t_m),z\mid x)=M\{c(x_{t_m},\tilde{x}_\tau^N,\eta(t_m),z)\mid x_t=x;z_0^{t_m},\eta_0^{m-1}\} \quad (3.11)$$

и $I_{t_m-0}[\cdot]=\lim I_t[\cdot]$, $I_{\tau/t_m}^{t_m-0}[\cdot]=\lim I_{\tau/t}^t[\cdot]$ при $t\uparrow t_m$.

Доказательство. Так как, согласно (2.5), (2.7) и (2.11) $p_\tau^t(x;\tilde{x}_N)=p_{\tau/t}^t(\tilde{x}_N|x)p_t(x)$, то интегрирование (3.1) и (3.3) по $\tilde{x}_N$ с учетом (3.10), (3.11) дает, что $p_t(x)$ на интервалах $t_m\le t<t_{m+1}$ определяется уравнением

$$\begin{aligned} d_t p_t(x)&=L_{t,x}[p_t(x)]dt+\\ &+p_t(x)[\overline{h(\tilde{\tau}_N,z\mid x)}-\overline{h(t,z)}]^T R^{-1}(t,z)d\tilde{z}_t, \end{aligned} \quad (3.12)$$

с начальным условием

$$p_{t_m}(x)=[\overline{c(\eta(t_m),z\mid x)}/c(\eta(t_m),z)]p_{t_m-0}(x). \quad (3.13)$$

Априорная плотность (2.8) определяется уравнением $d_t p(t,x)=L_{t,x}[p(t,x)]dt$, которое следует из (3.12), либо в результате интегрирования по x уравнения $d_t p(t,x;\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N)=L_{t,x}[p(t,x;\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N)]dt$ для априорной плотности (2.6). Так как инновационный процесс $\tilde{z}_t$, дифференциал которого имеет вид (3.2) такой, что $\tilde{Z}_t=(\tilde{z}_t,\mathrm{F}_t^z)$ является винеровским процессом с $\mathrm{M}\{\tilde{z}_t\tilde{z}_t^T|\mathrm{F}_t^z\}=\int_0^t R(\tau,z)d\tau$ [17, 18], то дифференцирование по формуле Ито с использованием (3.12) дает

$$\begin{aligned} d_t\ln\left[\frac{p_t(x)}{p(t,x)}\right]&=\left\{\frac{1}{p_t(x)}L_{t,x}[p_t(x)]-\frac{1}{p(t,x)}L_{t,x}[p(t,x)]\right\}dt-\\ &-\frac{1}{2}[\overline{h(\tilde{\tau}_N,z\mid x)}-\overline{h(t,z)}]^T R^{-1}(t,z)[\overline{h(\tilde{\tau}_N,z\mid x)}-\overline{h(t,z)}]dt+\\ &+[\overline{h(\tilde{\tau}_N,z\mid x)}-\overline{h(t,z)}]^T R^{-1}(t,z)d\tilde{z}_t. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Применяя к (3.14) формулу Ито-Вентцеля [19, 20], аналогично [8] получаем

$$\begin{aligned} \ln\left[\frac{p_t(x_t)}{p(t,x_t)}\right]&=\ln[\cdot]\big|_{t=t_m}+\\ &+\frac{1}{2}\int_{t_m}^t tr[R^{-1}(\sigma,z)[\overline{h(\tilde{\tau}_N,z\mid x_\sigma)}-\overline{h(\sigma,z)}][\cdot]^T]d\sigma-\\ &-\frac{1}{2}\int_{t_m}^t tr\left[Q(\sigma)\left[\frac{\partial\ln p_\sigma(x_\sigma)}{\partial x_\sigma}(\cdot)^T-\frac{\partial\ln p(\sigma,x_\sigma)}{\partial x_\sigma}(\cdot)^T\right]\right]d\sigma+\\ &+\int_{t_m}^t tr\left[Q(\sigma)\left[\frac{1}{p_\sigma(x_\sigma)}\frac{\partial^2 p_\sigma(x_\sigma)}{\partial x_\sigma^2}-\frac{1}{p(\sigma,x_\sigma)}\frac{\partial^2 p(\sigma,x_\sigma)}{\partial x_\sigma^2}\right]\right]d\sigma+\\ &+\int_{t_m}^t\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\ln\frac{p_\sigma(x_\sigma)}{p(\sigma,x_\sigma)}\Phi_1(\sigma)dw_\sigma+\\ &+\int_{t_m}^t\left[\overline{h(\tilde{\tau}_N,z\mid x_\sigma)}-\overline{h(\sigma,z)}\right]^T R^{-1}(\sigma,z)\Phi_2(\sigma,z)dv_\sigma. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Аналогично [12], а также (П.13) в [15]

$$M\left\{\frac{1}{p_\sigma(x_\sigma)}\frac{\partial^2 p_\sigma(x_\sigma)}{\partial x_\sigma^2}-\frac{1}{p(\sigma,x_\sigma)}\frac{\partial^2 p(\sigma,x_\sigma)}{\partial x_\sigma^2}\right\}=O. \quad (3.16)$$

Вычисление математического ожидания от левой и правой части (3.15) с учетом (3.16) и Замечания 2, а затем последующее дифференцирование по t приводит к (3.4), а (3.6), (3.8) следуют в результате подстановки (3.13) в (2.18).

Так как, согласно (2.5), (2.7) и (2.11) $p_{\tau/t}^t(\tilde{x}_N|x)=p_\tau^t(x;\tilde{x}_N)/p_t(x)$, то дифференцирование по формуле Ито с учетом (3.1), (3.12) дает, что $p_{\tau/t}^t(\tilde{x}_N|x)$ на интервалах $t_m\le t<t_{m+1}$ определяется уравнением

$$\begin{aligned} d_t p_{\tau|t}^t(\tilde{x}_N\mid x)&=\{(1/p_t(x))(L_{t,x}[p_t(x;\tilde{x}_N)]-\\ &-p_{\tau|t}^t(\tilde{x}_N\mid x)L_{t,x}[p_t(x)])+p_{\tau|t}^t(\tilde{x}_N\mid x)[h(t,x,\tilde{x}_N,z)-\\ &-\overline{h(\tilde{\tau}_N,z\mid x)}]^T R^{-1}(t,z)[\overline{h(t,z)}-\overline{h(\tilde{\tau}_N,z\mid x)}]\}dt+\\ &+p_{\tau|t}^t(\tilde{x}_N\mid x)[h(t,x,\tilde{x}_N,z)-\overline{h(\tilde{\tau}_N,z\mid x)}]^T R^{-1}(t,z)d\tilde{z}_t \end{aligned} \quad (3.17)$$

с начальным условием

$$p_{\tau|t_m}^{t_m}(\tilde{x}_N\mid x)=[c(x,\tilde{x}_N,\eta(t_m),z)/c(\eta(t_m),z\mid x)]p_{\tau|t_m}^{t_m-0}(\tilde{x}_N\mid x), \quad (3.18)$$

которое следует из (3.3), (3.13). Априорная плотность (2.12) определяется уравнением

$$\begin{aligned} &d_t p(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N\mid t,x)=\\ &=\{(1/p(t,x))(L_{t,x}[p(t,x;\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N)]-\\ &-p(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N\mid t,x)L_{t,x}[p(t,x)])\}dt, \end{aligned} \quad (3.19)$$

которое следует из (3.17). Дальнейший вывод (3.5) проводится с использованием (3.17)–(3.19) аналогично выводу (3.4). Формулы (3.7), (3.9) получаются как результат использования (3.18) в (2.19).

Теорема 2. Количество информации (2.17) может быть представлено в виде (2.16), где $I_\tau^t[\cdot]$ и $I_{t|\tau}^t[\cdot]$ на интервалах $t_m\le t<t_{m+1}$ определяются уравнениями

$$\begin{aligned} &dI_\tau^t[\tilde{x}_\tau^N;z_0^t,\eta_0^m]/dt=\\ &=(1/2)tr[MXR^{-1}(t,z)[\overline{h(t,z\mid\tilde{x}_\tau^N)}-\overline{h(t,z)}]\times\\ &\times[\overline{h(t,z\mid\tilde{x}_\tau^N)}-\overline{h(t,z)}]^T\}], \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} &dI_{t|\tau}^t[x_t;z_0^t,\eta_0^m\mid\tilde{x}_\tau^N]/dt=\\ &=(1/2)tr[M\{R^{-1}(t,z)[h(t,x_t,\tilde{x}_\tau^N,z)-\overline{h(t,z\mid\tilde{x}_\tau^N)}][\cdot]^T\}]-\\ &-\frac{1}{2}tr\left[Q(t)M\left\{\frac{\partial\ln p_{t|\tau}^t(x_t\mid\tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial\ln p_{t|\tau}^t(x_t\mid\tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t}\right)^T-\right.\right.\\ &\left.\left.-\frac{\partial\ln p(t,x_t\mid\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial\ln p(t,x_t\mid\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t}\right)^T\right\}\right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

с начальными условиями

$$I_\tau^{t_m}[\tilde{x}_\tau^N;z_0^{t_m},\eta_0^m]=I_\tau^{t_m-0}[\tilde{x}_\tau^N;z_0^{t_m},\eta_0^{m-1}]+\Delta I_\tau^{t_m}[\tilde{x}_\tau^N;z_0^{t_m},\eta(t_m)], \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} I_{t_m|\tau}^{t_m}[x_{t_m};z_0^{t_m},\eta_0^m\mid\tilde{x}_\tau^N]&=I_{t_m|\tau}^{t_m-0}[x_{t_m};z_0^{t_m},\eta_0^{m-1}\mid\tilde{x}_\tau^N]+\\ &+\Delta I_{t_m|\tau}^{t_m}[x_{t_m};z_0^{t_m},\eta(t_m)\mid\tilde{x}_\tau^N], \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\Delta I_\tau^{t_m}[\tilde{x}_\tau^N;z_0^{t_m},\eta(t_m)]=M\{\ln[\overline{c(\eta(t_m),z\mid\tilde{x}_\tau^N)}/c(\eta(t_m),z)]\}, \quad (3.24)$$

$$\Delta I_{t_m|\tau}^{t_m}[x_{t_m}; z_0^{t_m}, \eta(t_m) \mid \tilde{x}_\tau^N] = \\ = M\{\ln[c(x_{t_m}, \tilde{x}_\tau^N, \eta(t_m), z) \big/ \overline{c(\eta(t_m), z \mid \tilde{x}_\tau^N)}]\}, \qquad (3.25)$$

$$\overline{h(t, z \mid \tilde{x}_N)} = M\{h(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z) \mid \tilde{x}_\tau^N = \tilde{x}_N; z_0^t, \eta_0^m\}, \qquad (3.26)$$

$$\overline{c(\eta(t_m), z \mid \tilde{x}_\tau^N)} = M\{c(x_{t_m}, \tilde{x}_\tau^N, \eta(t_m), z) \mid \tilde{x}_\tau^N = \tilde{x}_N; z_0^{t_m}, \eta_0^{m-1}\} \qquad (3.27)$$

и $I_\tau^{t_m-0}[\cdot]=\lim I_\tau^t[\cdot]$, $I_{t_m|\tau}^{t_m-0}[\cdot]=\lim I_{t/\tau}^t[\cdot]$ при $t\uparrow t_m$.

Доказательство. Так как, согласно (2.5), (2.9) и (2.13) $p_\tau^t(x;\tilde{x}_N)=p_{t/\tau}^t(x|\tilde{x}_N)p_\tau^t(\tilde{x}_N)$, то интегрирование (3.1) и (3.3) по x с учетом (3.26), (3.27) дает, что $p_\tau^t(\tilde{x}_N)$ на интервалах $t_m \le t < t_{m+1}$ определяется уравнением

$$d_t p_\tau^t(\tilde{x}_N) = p_\tau^t(\tilde{x}_N)[\overline{h(t, z \mid \tilde{x}_N)} - \overline{h(t,z)}]^T R^{-1}(t,z) d\tilde{z}_t \qquad (3.28)$$

с начальным условием

$$p_\tau^{t_m}(\tilde{x}_N) = [\overline{c(\eta(t_m), z \mid \tilde{x}_N)} \big/ c(\eta(t_m), z)] p_\tau^{t_m-0}(\tilde{x}_N). \qquad (3.29)$$

Так как $p_{t/\tau}^t(x|\tilde{x}_N)=p_\tau^t(x;\tilde{x}_N)/p_\tau^t(\tilde{x}_N)$, то дифференцирование по формуле Ито с учетом (3.1), (3.28) дает, что $p_{t/\tau}^t(x|\tilde{x}_N)$ на интервалах $t_m \le t < t_{m+1}$ определяется уравнением

$$d_t p_{t|\tau}^t(x \mid \tilde{x}_N) = \\ = \{L_{t,x}[p_{t|\tau}^t(x \mid \tilde{x}_N)] + p_{t|\tau}^t(x \mid \tilde{x}_N)[h(t, x, \tilde{x}_N, z) - \\ - \overline{h(t, z \mid \tilde{x}_N)}]^T R^{-1}(t,z)[\overline{h(t,z)} - \overline{h(t, z \mid \tilde{x}_N)}]\}dt + \\ + p_{t|\tau}^t(x \mid \tilde{x}_N)[h(t, x, \tilde{x}_N, z) - \overline{h(t, z \mid \tilde{x}_N)}]^T R^{-1}(t,z) d\tilde{z}_t \qquad (3.30)$$

с начальным условием

$$p_{t_m|\tau}^{t_m}(x \mid \tilde{x}_N) = [c(x, \tilde{x}_N, \eta(t_m), z) \big/ \overline{c(\eta(t_m), z \mid \tilde{x}_N)}] p_{t_m\tau}^{t_m-0}(x \mid \tilde{x}_N), \qquad (3.31)$$

которое следует из (3.3), (3.29). Априорные плотности (2.10), (2.14) определяются уравнениями $d_t p(\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N)=0$, $d_t p(t,x|\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N)=L_{t,x}[p(t,x|\tilde{\tau}_N,\tilde{x}_N)]dt$, которые следуют из (3.28), (3.30). Дальнейшее доказательство, т.е. вывод (3.20) (3.25) проводится аналогично доказательству Теоремы 1, используя формулы Ито и Ито-Вентцеля и (2.20), (2.21), (3.28) (3.31).

Следствие. Количество информации (2.17) на интервалах $t_m \le t < t_{m+1}$ определяется уравнением

$$dI_{\tau,t}^t[\tilde{x}_\tau^N, x_t; z_0^t, \eta_0^m]\big/dt = \\ = (1/2) tr[M\{R^{-1}(t,z)[h(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z) - \overline{h(t,z)}]\ [\cdot]^T\}] - \\ - \frac{1}{2} tr\left[Q(t) M\left\{\frac{\partial \ln p_\tau^t(x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial \ln p_\tau^t(x_t; \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t}\right)^T - \right.\right. \\ \left.\left. - \frac{\partial \ln p(t, x_t; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t}\left(\frac{\partial \ln p(t, x_t; \tilde{\tau}_N, \tilde{x}_\tau^N)}{\partial x_t}\right)^T\right\}\right] \qquad (3.32)$$

с начальным условием

$$I_{\tau,t_m}^{t_m}[\tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}; z_0^{t_m}, \eta_0^m] = \\ = I_{\tau,t_m}^{t_m-0}[\tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}; z_0^{t_m}, \eta_0^m] + \Delta I_{\tau,t_m}^{t_m}[\tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}; z_0^{t_m}, \eta(t_m)], \qquad (3.33)$$

где

$$\Delta I_{\tau,t_m}^{t_m}[\tilde{x}_\tau^N, x_{t_m}; z_0^{t_m}, \eta(t_m)] = \\ - M\{\ln[c(x_{t_m}, \tilde{x}_\tau^N, \eta(t_m), z) \big/ c(\eta(t_m), z)]\} \qquad (3.34)$$

и $I_{\tau,t_m}^{t_m-0}[\cdot]=\lim I_{\tau/t}^t[\cdot]$ при $t\uparrow t_m$.

Доказательство. Уравнение (3.32) следует как результат использования уравнений (3.4), (3.5) в (2.15) или (3.20), (3.21) в (2.16). Используя (3.6) (3.9) в (2.15) или (3.22) (3.25) в (2.16) мы получаем формулы (3.33), (3.34) с учетом $p_\tau^t(x;\tilde{x}_N)=p_{\tau|t}^t(\tilde{x}_N|x)p_t(x)=p_{t/\tau}^t(x|\tilde{x}_N)=p_\tau^t(\tilde{x}_N)$ и свойств условного математического ожидания [18]

$$M\{h(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z)\} = M\{M\{M\{h(\cdot) \mid x_t = x, z_0^t, \eta_0^m\} \mid z_0^t, \eta_0^m\}\} = \\ = M\{M\{\overline{h(\tilde{\tau}_N, z \mid x_t)} \mid z_0^t, \eta_0^m\}\} = M\{\overline{h(t,z)}\},$$

$$M\{h(t, x_t, \tilde{x}_\tau^N, z)\} = M\{M\{M\{h(\cdot) \mid \tilde{x}_\tau^N = \tilde{x}_N, z_0^t, \eta_0^m\} \mid z_0^t, \eta_0^m\}\} = \\ = M\{M\{\overline{h(t, z \mid \tilde{x}_\tau^N)} \mid z_0^t, \eta_0^m\}\} = M\{\overline{h(t,z)}\}.$$

4. Заключение

Полученные результаты могут быть использованы для анализа информационной эффективности систем с непрерывно-дискретными наблюдениями, а также для решения стандартных задач теории информации на рассматриваемом классе процессов x_t, z_t, $\eta(t_m)$ в частности таких, как оптимальная передача случайных сигналов по непрерывно-дискретным каналам с памятью и исследование пропускной способности таких каналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kalman R.E. A new approach to linear filtering and prediction problems // Trans. ASME. J. Basic Eng., Ser. D. – 1960. – V. 82. – P. 35–45.
2. Kalman R.E., Busy R. New results in linear filtering and prediction theory // Trans. ASME. J. Basic Eng., Ser. D. – 1961. – V. 83. – P. 95–108.
3. Абакумова О.Л., Демин Н.С., Сушко Т.В. Фильтрация стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью. I. Основное уравнение нелинейной фильтрации // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 9. – С. 49–59.
4. Абакумова О.Л., Демин Н.С., Сушко Т.В. Фильтрация стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью. II. Синтез фильтров // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 10. – С. 36–49.
5. Демин Н.С., Сушко Т.В., Яковлева А.В. Обобщенная обратная экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Известия РАН. ТиСУ. – 1997. – № 4. – С. 48–59.
6. Демин Н.С., Рожкова С.В., Рожкова О.В. Обобщенная скользящая экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Известия РАН. ТиСУ. – 2000. – № 4. – С. 39–51.
7. Dyomin N.S., Rozhkova S.V., Rozhkova O.V. Likelihood ratio determination for stochastic processes recognition problem with respect to the set of continuous and discrete observations // Informatica. – 2001. – V. 12. – № 2. – P. 263–384.
8. Dyomin N.S., Safronova I.E., Rozhkova S.V. Information amount determination for joint problem of filtering and generalized extrapolation of stochastic processes with respect to the set of continuous and discrete memory observations // Informatica. – 2003. – V. 14. – № 3. – P. 295–322.

9. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. – М.: Иностранная литература, 1963. – 829 с.
10. Галлагер Р. Теория информации и надежная связь. – М.: Советское радио, 1974. – 720 с.
11. Ihara S. Capacity of mismatched gaussian channels with and without feedback // Probab. Theory Relat. Fields. – 1990. – V. 84. – № 4. – С. 453–471.
12. Липцер Р.Ш. Оптимальное кодирование и декодирование при передаче гауссовского марковского сигнала по каналу с бесшумной обратной связью // Проблемы передачи информации. – 1974. – Т. 10. – № 4. – С. 3–15.
13. Arimoto S. Information-theoretical considerations on estimation problem // Inform. Control. – 1971. – V. 19. – № 2. – P. 181–194.
14. Tomita Y., Ohmatsu S., Soeda T. An application of the information theory to estimation problems // Information and Control. – 1976. – V. 32. – № 2. – P. 101–111.
15. Демин Н.С., Короткевич В.И. О количестве информации в задачах фильтрации компонент марковских процессов // Автоматика и телемеханика. – 1983. – № 7. – С. 87–96.
16. Демин Н.С., Короткевич В.И. Об уравнениях для шенноновского количества информации при передаче марковских диффузионных сигналов по каналам с памятью // Проблемы передачи информации. – 1987. – Т. 23. – № 1. – С. 16–27.
17. Каллианпур Г. Стохастическая теория фильтрации. – М.: Наука, 1987. – 318 с.
18. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
19. Розовский Б.Л. О формуле Ито-Вентцеля // Вестник МГУ. Серия матем. механ. – 1973. – № 1. – С. 26–32.
20. Ocone D., Pardoux E. A generelized Ito-Ventzel formula // Ann. Inst. Henri Poincare. – 1989. – V. 25. – № 1. – P. 39–71.

УДК 532.58

СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРИ МЕДЛЕННОМ ДВИЖЕНИИ ЭЛЛИПСОИДА

И.В. Дудин, Р.К. Нариманов

Томский государственный университет
E-mail: rin@ftf.tsu.ru

На основе применения преобразования простого растяжения-сжатия указана методика распространения решений задач, связанных с течениями несжимаемой вязкой жидкости в присутствии сферы, на варианты, когда сфера заменяется трехосным эллипсоидом. Решена задача о медленном обтекании эллипсоида, указана простая расчетная формула для его сопротивления. Показано удовлетворительное совпадение с литературными данными, соответствующими предельным случаям.

Введение

Некоторые задачи, связанные с интегрированием уравнений Навье-Стокса

$$\nabla\frac{\vec{v}\vec{v}}{2}-\vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{v}=-\mathrm{Eu}\,\nabla p-\frac{1}{\mathrm{Re}}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v},\quad \operatorname{div}\vec{v}=0,\qquad(1)$$

или их упрощений, в случаях присутствия твердого или жидкого объекта в виде сферы единичного радиуса успешно решены путем использования функции тока

$$\psi=\frac{1}{2}\sigma^2 f(\sigma)\sin^2\theta,\qquad(2)$$

$$\vec{\sigma}=\xi\vec{i}+\eta\vec{j}+\zeta\vec{k}=\sigma[\vec{i}\cos\theta+\sin\theta(\vec{j}\cos\varphi+\vec{k}\sin\varphi)].$$

При этом от функции $f(\sigma)$ требуется, чтобы она удовлетворяла уравнению

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v}=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\psi\nabla\varphi)=0,\qquad(3)$$

что в общем случае влечет за собой представление

$$f(\sigma)=c_1+c_2\sigma^{-1}+c_3\sigma^{-3}+c_4\sigma^2.\qquad(4)$$

При различном наборе констант интегрирования в (4) функция тока (2) будет обеспечивать кинематические картины течения как во внутренних (вихри Адамара-Рябчинского-Хилла, $c_2=c_3=0$), так и во внешних ($c_4=0$) областях. Для внутренних течений ускорение является консервативным вектором, и давление находится из полных уравнений движения Навье-Стокса; в идеальном внешнем потоке ($c_2=0$) давление определено интегралом Бернулли, а во внешнем вязком оно находится из уравнений Стокса.

Ниже обсуждается проблема распространения отмеченных и других решений на случай замены сферы трехосным эллипсоидом. Сопротивление эллипсоида вращения при его медленном движении было найдено в [1] по теории ньютоновского потенциала притяжения. В [2] предпринята попытка определить сопротивление набегающему потоку вязкой жидкости трехосного эллипсоида при параллельности потока и одной из полуосей путем использования преобразования простого растяжения-сжатия, при котором сфера переводится в эллипсоид и наоборот.

В общем случае трехосный эллипсоид имеет бесконечно много сопротивлений, что зависит от его ориентации к набегающему потоку. Поэтому исследование выполняется в предположении, что орты $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ декартовой системы координат жестко связаны с главными центральными осями эллипсоида

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,$$

который в тексте будет фигурировать в виде уравнения (при $\sigma=1$)